Seminario de desarrollo profesional docente de matemáticas: el trabajo geométrico en diferentes superficies

(Planificación)

Objetivo general del seminario:
Que las y los profesores en formación inicial vivan momentos de confrontación donde las generalizaciones euclidianas se encuentren limitadas por el nuevo contexto de trabajo geométrico —reconociendo las limitaciones y modificando las generalizaciones—. Además, mediante estas confrontaciones se espera generar en ellas y ellos reflexiones sobre el papel de la geometría esférica en su futura labor docente.

Organización general:
El seminario está compuesto por 4 sesiones presenciales (de tres horas cada una con un receso de media hora) y una reunión corta (entre 30 y 60 minutos) con cada uno de los equipos de trabajo (esta puede ser presencial o en línea):
Sesión 1: Introducción (proceso 1 - P1) y problematización (P2).
Sesión 2: Problematización y transparentación (P3).
Sesión 3: Análisis de una situación de aprendizaje (P4).
Sesión 4: Reflexiones finales (P5).

Sesión 1: Introducción y problematización (parte I - V)

Objetivos específicos:

- Confrontar situaciones donde las generalizaciones euclidianas se encuentran limitadas.
- Modificar las generalizaciones euclidianas haciéndolas funcionales para cada geometría o para ambas, volviéndose más específicas o generales.
- Reflexionar sobre el papel de la GE y de la geometría esférica en su formación y en su futura enseñanza.

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
1	15 minutos	**P1. Introducción.** Saludo, bienvenida y presentación del seminario: nombre del seminario, descripción general, objetivos y duración. Acuerdos de horarios y organización de equipos de trabajo (3 o 4 miembros dependiendo de la cantidad de participantes). Pasar una lista para registrar sus nombres completos, correo y número de teléfono (se creará un grupo de WhatsApp con todos los participantes).	**Recursos didácticos:** Presentación en diapositivas del seminario. Formato para pasar lista y registrar contactos. **Recursos técnicos:**	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
			-Computadora, proyector, grabadora de video y audio.	
2	15 minutos	Indicaciones sobre el llenado de la encuesta.	**Recursos didácticos:** Encuesta en formulario de Google.	
3	6 minutos	**P2. Problematización** Se hace una presentación en diapositivas de las actividades. Se genera una discusión con todo el grupo sobre la pregunta, ¿qué es un triángulo y qué elementos geométricos lo componen?	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Hojas de trabajo.	Las actividades se desarrollarán de manera individual (I), en equipos (E) y con todo el grupo (G).
4	9 minutos (4, 3, 3)	**Parte I. Línea recta** Se distribuyen las hojas de trabajo. (I) Trazan una línea recta en una hoja de papel y la caracterizan respondiendo a la siguiente pregunta: ¿cuál es la o las características particulares de la línea recta que la hacen ser recta? (I) Responden a esa pregunta en sus hojas de trabajo. (E) Discuten sus respuestas individuales. (G) Discuten sus respuestas.	**Recursos didácticos:** -Regla plana -Lápices grafitos.	
5	5 minutos	(G) Discuten sobre las siguientes preguntas: ¿podemos trazar líneas rectas en superficies diferentes al plano?, ¿cómo trazamos una línea recta en la superficie de una esfera?	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades.	
6	9 minutos (4, 3, 3)	(I) Responden en sus hojas de trabajo a las siguientes preguntas: ¿qué forma tiene una línea recta en la superficie de una esfera?, ¿dada esta forma, podemos construir líneas rectas esféricas de otra manera? (E) Discuten sus respuestas individuales. (G) Discuten sus respuestas.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Hojas de trabajo.	
7	6 minutos	Se presenta el material concreto: esfera de Lénárt, hojas, regla, compás y transportador esférico. (E) Usando la regla esférica, construyen una recta esférica.	**Recursos didácticos:** -Material concreto (esfera y su juego geométrico).	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
8	12 minutos (6, 4, 4)	(I) Comparan la recta en el plano y la recta en la esfera, respondiendo, en sus hojas de trabajo, a las siguientes preguntas: ¿qué características se mantienen y de qué manera se mantienen?, ¿qué características son diferentes y por qué considera que se dan estas diferencias? (E) Discuten sus respuestas individuales. (G) Discuten sus respuestas.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Hojas de trabajo.	
Propuesta de receso de 25 minutos (merienda)				
9	6 minutos	**Parte II. Relación punto-recta** (E) Dibujan un punto en la esfera y lo nombran punto A. (G) Discuten la siguiente pregunta, además del punto A ¿qué otro elemento geométrico se necesita para construir una línea recta? (E) Dado el punto A (como un polo o centro), construyan una circunferencia máxima en la esfera. (G) Discuten sobre la siguiente situación: si construyo otra línea recta que pase por el polo (el punto A) de la primera, ¿cómo se relacionan las dos rectas construidas? (E) Construyan otra recta que pase por el punto A y verifiquen la relación discutida anteriormente.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Material concreto (esfera y su juego geométrico).	
10	8 minutos	(G) Discuten sobre la siguiente pregunta: ¿Se mantiene la relación entre la primera recta con cualquier recta dibujada que pase por el punto A? (E) Construyen varias rectas que pasen por el punto A y verifican la relación discutida anteriormente. (I) Establecen, en sus hojas de trabajo, esa relación como una propiedad en esta geometría.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Material concreto (esfera y su juego geométrico).	
11	8 minutos	**Parte III. Relación recta-recta** (E) Construyen dos rectas planas. (E) Discuten las siguientes preguntas: ¿se relacionan de alguna manera?, ¿cómo pueden estar relacionadas estas dos rectas? (G) Discuten sus respuestas. Además, reflexionan si esas relaciones se mantendrán en la esfera.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. - Hojas blancas y regla plana. -Material concreto (esfera y su juego geométrico).	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
		(E) Construyen dos circunferencias máximas (líneas rectas esféricas) en la esfera de Lénárt y verifican si se mantienen esas relaciones.		
12	12 minutos (4, 4, 4)	(E) En la construcción anterior, nombran los puntos de intercepción como punto B y C. (E) Observan y describen el comportamiento de las dos rectas a medida que se alejan del punto B y a medida que se acercan al punto C. (G) Discuten sobre las siguientes preguntas: ¿qué ocurre entre el punto B y C en el comportamiento de las rectas?, en comparación con una circunferencia máxima completa, ¿a qué distancia cambia el comportamiento de las rectas?, ¿a qué distancia se interceptan ambas rectas?	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Material concreto (esfera y su juego geométrico).	
13	9 minutos	**Parte IV. Un ángulo.** (I) En sus hojas de trabajo construyen un ángulo plano. (G) Describen sus construcciones discutiendo sobre las siguientes preguntas: ¿cómo se compone un ángulo?, ¿qué medimos cuando medimos ángulos?	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. - Hojas de trabajo.	
14	12 minutos (4, 4, 4)	(E) Retoman la construcción desarrollada en la parte III de las dos rectas esféricas e identifican ángulos. (E) Comparan el ángulo en el plano y en la esfera a través de las siguientes preguntas: ¿qué características se mantienen y de qué manera se mantienen?, ¿qué características son diferentes? y ¿por qué considera que se dan estas diferencias? (G) Discuten sus respuestas.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Construcciones anteriores. -Materiales concretos (esfera y su juego geométrico).	
15	15 minutos (5, 6, 4)	**Parte V. Dos ángulos.** (G) Discuten sobre las siguientes preguntas: ¿qué es un polígono?, ¿cuál es el polígono de menor cantidad de lados en el plano?, ¿es el mismo en la esfera? (E) Retoman la construcción desarrollada en la parte III de dos rectas esféricas y responden si ¿identifican polígonos?, si es así, ¿cómo lo nombrarían?	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. - Hojas de trabajo. -Construcciones anteriores. -Materiales concretos (esfera y su juego geométrico).	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
		(E) Discuten las características de ese polígono, atendiendo las siguientes preguntas: ¿pueden sus lados tener diferentes medidas?, en comparación con una circunferencia máxima completa ¿cuánto miden sus lados?, ¿qué relación existe entre sus ángulos internos?, ¿se pueden clasificar?, si es así, ¿bajo qué criterio y qué tipos tendríamos? (G) Discuten sus respuestas.		
16	5 minutos	Recolección del trabajo de los estudiantes, recordatorio de los horarios de las siguientes sesiones y despedida de la primera sesión.		

Sesión 2: Problematización (parte VI) y transparentación

Objetivos específicos

- Confronten situaciones donde las generalizaciones euclidianas se encuentran limitadas.
- Modificar las generalizaciones euclidianas haciéndolas funcionales para cada geometría o para ambas, volviéndose más específicas o generales.
- Reflexionen sobre el papel de la GE y de la geometría esférica en su formación y en su futura enseñanza.
- Discutan y reflexionen sobre la fundamentación cognitiva, didáctica y epistemológica del diseño de problematización.

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
1	10 minutos	Saludo, bienvenida y recordatorio de la sesión anterior. Se hace una discusión con todo el grupo sobre las actividades de la sesión anterior.	**Recursos didácticos:** Presentación en diapositivas del seminario. **Recursos técnicos:** -Computadora, proyector, grabadora de video y audio.	
2	20 minutos (8, 8, 4)	**Parte VI. Tres ángulos** Se distribuyen materiales manipulables: hojas de papel, hojas de trabajo, esfera de Lénárt y sus	**Recursos didácticos:** -Hojas de trabajo.	En estos casos primero se seleccionarán

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
		instrumentos de construcción, palillos y recortes de ángulos para el trabajo en el plano y recortes de ángulos esféricos y cuerdas con nudos para el trabajo en la esfera. Se les recuerda la pregunta inicial de las tareas de problematización ¿qué elementos geométricos componen un triángulo? Se menciona que, dados algunos de estos elementos, buscaremos responder a la pregunta: ¿cuántos triángulos diferentes podrían construirse (en el plano y en la esfera)? **Un elemento fijo:** Se plantea la siguiente situación: **Si tenemos uno** de esos elementos fijo (que no puede cambiar de medida). Ese elemento puede ser un lado o un ángulo (L, A). (E) Seleccionan un elemento y desarrollan el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera. (E) Discuten la siguiente pregunta, ¿cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tienen en dependencia de sus características? Para responder a la pregunta general, necesitan construir uno o varios triángulos. Para ello, (E) completan la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos restantes, que han agregado, responden: ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué? (G) Discuten sus respuestas.	-Hojas blancas. -Esfera y los instrumentos de construcción. -Palillos, recortes de ángulos, trozos de cuerda.	los elementos fijos para el trabajo en el plano, se desarrollará la actividad y responderán a la pregunta de la situación. Luego discutirán si sus respuestas se cumplen en la esfera. Para verificar esa suposición, se seleccionan los elementos esféricos y se desarrolla el trabajo en la esfera buscando verificar la hipótesis emitida y basada en el trabajo en el plano.
3	20 minutos (8, 8, 4)	**Dos elementos fijos:** Se plantea la siguiente situación: **Si tenemos dos** de esos elementos fijos (que no pueden cambiar de medida) (LL, LA, AA). (E) Seleccionan dos elementos y desarrollan el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera. (E) Discuten la siguiente pregunta: ¿cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tienen en dependencia de sus características? Para responder a la pregunta general, necesitan construir uno o varios triángulos. Para ello, (E)	**Recursos didácticos:** -Hojas de trabajo. -Hojas blancas. -Esfera y los instrumentos de construcción. -Palillos, recortes de ángulos, trozos de cuerda.	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
		completan la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos restantes, que han agregado, responden: ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué? (G) Discuten sus respuestas.		
4	30 minutos (15, 15)	**Tres elementos fijos:** Se plantea la siguiente situación: **Si tenemos tres** de esos elementos fijos (que no pueden cambiar de medida). (E) Seleccionan tres elementos y desarrollan el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera. (G) Definen los posibles casos y cada equipo selecciona y trabaja uno (LLL, LLA, LAA, AAA). (E) Discuten la siguiente pregunta: ¿cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tienen en dependencia de sus características? Para responder a la pregunta general, necesitan construir uno o varios triángulos. Para ello, (E) completan la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos restantes que han agregado, responden: ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué?	**Recursos didácticos:** -Regla plana -Lápices de grafito.	
5	30 minutos	Cada equipo presenta su caso a todo el grupo, describiendo el proceso de construcción que siguieron y la conclusión a la que llegaron. Entre todo el grupo se discuten las presentaciones de cada equipo de trabajo.	**Recursos didácticos:** -Marcadores de pizarra.	
6	10 minutos	Responden de manera individual en sus hojas de trabajo. Si dados algunos de esos elementos fijos se puede construir solo un triángulo y hay dos triángulos que tienen esos mismos elementos iguales: ¿podemos concluir que los dos triángulos son iguales, es decir, que los lados y ángulos restantes entre esos dos triángulos son iguales? (E) Discuten sus respuestas individuales. (G) Discuten sus respuestas.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de las actividades. -Hojas de trabajo.	

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
Propuesta de receso de 25 minutos (merienda)				
7	15 minutos	**P3: Transparentación.** Exposición magistral sobre la estructura del diseño y su fundamentación (cognitiva, didáctica y epistemológica).	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de la estructura y fundamentación del diseño de problematización.	
8	15 minutos	(G) Discuten el diseño y su fundamentación.	**Recursos didácticos:** -Presentación en diapositivas de la estructura y fundamentación del diseño de problematización.	
9	5 minutos	Se deja de tarea ver el video de una situación de aprendizaje y hacer notas sobre lo que les llame la atención de la situación. Recolección del trabajo de los estudiantes, recordatorio de los horarios de las siguientes sesiones y despedida de la segunda sesión.		

Sesión 3: Análisis de una situación de aprendizaje

Objetivos específicos

- Identifiquen, en construcciones desarrolladas por estudiantes de bachillerato, formas de trabajo geométrico en la geometría esférica.
- Reconozcan y construyan metodologías de enseñanza basadas en la experiencia de estudiantes de bachillerato sobre la enseñanza de la geometría esférica y de la geometría euclidiana.
- Exterioricen sus intereses personales y voces sociales, manifestando la atención de situaciones de aula asociadas a la experiencia de estudiantes de bachillerato.

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
1	10 minutos	Saludo, bienvenida y recordatorio de la sesión anterior. Se hace una discusión con todo el grupo sobre las actividades de la sesión anterior.	**Recursos didácticos:** Presentación en diapositivas del seminario. **Recursos técnicos:** -Computadora, proyector, grabadora de video y audio.	
2	20 minutos	**Presentación del diseño y contexto de la situación de aprendizaje.** Exposición magistral sobre el diseño y el contexto de aplicación que se dio en la situación de aprendizaje.	**Recursos didácticos:** - Presentación en diapositivas del diseño de la situación de aprendizaje.	
3	30 minutos (6, 6, 6, 6, 6)	Distribución de las hojas de trabajo de los estudiantes y la presentación del video de la situación de aprendizaje. Además, se les distribuye hojas blancas para que puedan tomar notas. (I) Observan el video y toman notas, de lo que estimen importante, sobre los siguientes elementos: objetivo, contenido y estudiantado. El video se detiene cada 3 minutos y se dan 3 minutos más para que cada participante tome notas y revise las hojas de trabajo de los estudiantes.	**Recursos didácticos:** -Hojas de trabajo de los estudiantes. -Hojas blancas. -Video de la situación de aprendizaje. **Recursos técnicos:** -Computadora, bocina, proyector, grabadora de video y audio.	
4	30 minutos (10, 10, 10)	(I) Observan nuevamente el video y toman notas, de lo que estimen importante, sobre los siguientes elementos: materiales, tiempo y profesor. El video se detiene cada 5 minutos y se dan 5 minutos más para que cada participante tome notas y revise las hojas de trabajo de los estudiantes.	**Recursos didácticos:** -Hojas de trabajo de los estudiantes. -Hojas blancas. -Video de la situación de aprendizaje. **Recursos técnicos:** -Computadora, bocina, proyector, grabadora de video y audio.	
Propuesta de receso de 25 minutos (merienda)				

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
5	30 minutos	(G) Discuten sobre las siguientes preguntas: qué podemos decir sobre el objetivo de la actividad, el contenido tratado y el estudiantado participante. En caso de que no surja de la discusión, se cuestionará sobre lo siguiente: el logro del objetivo, la accesibilidad de estos contenidos, los retos que enfrentaron las y el estudiante y sus cambios de concepción ante nociones geométricas involucradas.	**Recursos didácticos:** -Marcadores de pizarra.	
6	30 minutos	(G) Discuten sobre las siguientes preguntas: qué podemos decir sobre los materiales utilizados, el uso del tiempo, el papel del profesor. En caso de que no surja de la discusión, se cuestionará sobre lo siguiente: las estrategias de enseñanza y evaluación en la actividad y se planteará el caso hipotético de que ellos sean el profesor o profesora de la actividad, para conocer su forma de atender la situación.	**Recursos didácticos:** -Marcadores de pizarra.	
7	5 minutos	Recolección del trabajo de los estudiantes, recordatorio de los horarios de las siguientes sesiones y despedida de la tercera sesión.		

Sesión extra con cada uno de los equipos

Objetivos específicos

[Profundizar la reflexión en cada uno de los equipos]

- Reconozcan el potencial y las limitaciones de la GE.
- Exterioricen sus intereses personales y voces sociales, manifestando la atención de situaciones de aula.

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
1	10 minutos	Saludo, bienvenida y recordatorio de las sesiones anteriores.	**Recursos técnicos:** -Computadora, proyector, grabadora de video y audio (en caso de ser presencial) o Zoom (en caso de ser en línea).	
2	20 minutos	Del análisis continuo de las sesiones anteriores, se identifican elementos que han jugado un papel importante en el desarrollo del experimento, pero que por la naturaleza en la que se manifiestan no se profundizó en ellos. Se genera una discusión sobre esos elementos (el profesor los pone en discusión).		
3	20 minutos	Se genera una reflexión sobre las siguientes preguntas: ¿Qué problemas cree que enfrenta la geometría escolar? ¿Por qué cree que se enseña únicamente la geometría euclidiana en la escuela? ¿Qué caracteriza a la geometría esférica? ¿Cree que la geometría esférica puede enseñarse en el bachillerato?, ¿cómo?, ¿en qué condiciones?		
4	5 minutos	Recordatorio del horario de la sesión siguiente y despedida.		

Sesión 4: reflexiones finales

Objetivos específicos

- Reconozcan el potencial y las limitaciones de la GE.
- Reflexionen sobre el papel de la geometría esférica en la significación de la GE y en su labor como docentes.
- Exterioricen sus intereses personales y voces sociales, manifestando la atención de situaciones de aula.

N.	Tiempo	Actividad	Recursos y materiales necesarios	Observaciones
1	10 minutos	Saludo, bienvenida y recordatorio de la sesión anterior. Se hace una discusión con todo el grupo sobre las actividades de la sesión anterior.	**Recursos didácticos:** Presentación en diapositivas del seminario. **Recursos técnicos:** -Computadora, proyector, grabadora de video y audio.	
2	30 minutos	(G) Discuten sobre las siguientes preguntas: ¿Por qué creen que se enseña únicamente geometría euclidiana en la escuela? ¿Qué papel juegan los conocimientos euclidianos cuando se estudia una geometría no euclidiana?	**Recursos didácticos:** - Presentación en diapositivas de las preguntas.	
3	30 minutos	(G) Discuten sobre las siguientes preguntas: ¿Qué repercusiones tiene el conocimiento de una geometría no euclidiana en el estudio de la geometría euclidiana? ¿Cómo creen que afecte el conocimiento de la geometría esférica en su labor como docentes?	**Recursos didácticos:** - Presentación en diapositivas de las preguntas.	
4	30 minutos	Del análisis continuo de las sesiones anteriores, se identifican elementos que han jugado un papel importante en el desarrollo del experimento, pero que por la naturaleza en la que se manifiestan no se profundizó en ellos. Se genera una discusión sobre esos elementos (el profesor los pone en discusión).		
Propuesta de receso de 25 minutos (merienda)				
5	30 minutos	(G) Completan una evaluación del seminario con un formulario de Google.	**Formulario de Google**	
6	5 minutos	Recolección del trabajo de los estudiantes y despedida.		

Anexos:
Video de la situación de aprendizaje:
https://youtu.be/EQbIy7E05Tw?si=HaBCA9Kw3bKsIa9O
Hojas de trabajo de los estudiantes de la situación de aprendizaje:
https://drive.google.com/file/d/1vCGsTP7BjB39abABwOL7DWBwKEMOiQZ-/view?usp=sharing
Formulario-Encuesta: https://forms.gle/vcSVLNvxW51NgiDd8
Formulario-Evaluación: https://forms.gle/29AB1JxEWcU3bBUA6