INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Itaperuna

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Matemática do Ensino Médio do IFBA - Parte 1

PIBIC 2020/IFBA-FAPESB

Dirceu Melo (Orientador) e Matheus Alexandre Araujo Santos (Bolsista)

1ª Ed., Agosto de 2021

Sumário

1 CONJUNTOS 7

1.1 REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS 7

1.2 DETERMINAÇÃO DE CONJUNTOS 7

1.3 PERTINÊNCIA 8

1.4 INCLUSÃO 8

1.5 IGUALDADE DE CONJUNTOS 8

1.6 CONJUNTO DAS PARTES 9

1.7 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS 9

1.7.1 UNIÃO 9

1.7.2 INTERSECÇÃO 10

1.7.3 DIFERENÇA 11

1.7.4 DIFERENÇA SIMÉTRICA 11

1.7.5 COMPLEMENTAR 12

1.8 EXERCÍCIOS 13

2 CONJUNTOS NUMÉRICOS 21

2.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS – $\mathbb{N}$ 21

2.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z 21

2.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q 21

2.4 FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA 22

2.5 GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA 22

2.6 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS - $\mathbb{Q}'$ 23

2.7 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS – $\mathbb{R}$ 23

2.8 EXERCÍCIOS 24

2.9 INTERVALOS 25

2.10 TIPOS DE INTERVALOS 25

2.11 OPERAÇÕES COM INTERVALOS 26

2.12 EXERCÍCIOS 29

3 PLANO CARTESIANO E PRODUTO CARTESIANO 33
3.1 PAR ORDENADO 33
3.2 IGUALDADE DE PARES ORDENADOS 33
3.3 PLANO CARTESIANO 33
3.4 EXERCÍCIO 34
3.5 SIMETRIAS NO PLANO 35
3.6 PRODUTO CARTESIANO 38

4 FUNÇÕES: TEORIA GERAL 43
4.1 Relação Binária 43
4.2 Função 43
4.3 NOTAÇÕES DE UMA FUNÇÃO 44
4.4 REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO 44
4.5 RAIZ DE UMA FUNÇÃO 49
4.6 FUNÇÃO INJETORA (OU INJETIVA) 54
4.7 FUNÇÃO SOBREJETORA (OU SOBREJETIVA) 55
4.8 FUNÇÃO BIJETORA (OU BIJETIVA) 55
4.9 IDENTIFICANDO FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORAS E BIJETORAS NO PLANO CARTESIANO 56
4.10 FUNÇÃO INVERSA 61
4.11 Função Composta 64
4.12 PARIDADE DE FUNÇÕES 67
4.13 Função Crescente e Decrescente 71
4.14 DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO E DA IMAGEM ATRAVÉS DA LEI DE FORMAÇÃO 73

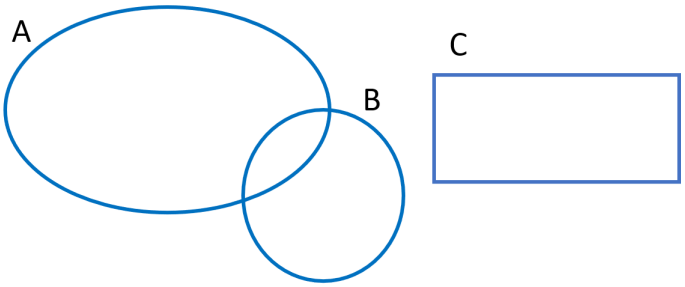
1. CONJUNTOS

Na teoria dos conjuntos proposta por George Cantor (1845-1918) três noções são aceitas sem definição: Conjunto, Elemento e Pertinência.

1.1 REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

Diagrama de Venn-Euler

Conjuntos de qualquer natureza podem ser representados em Diagramas de Venn-Euler."Um diagrama de Venn, também conhecido como diagrama lógico, diagrama de conjunto ou diagrama primário, é um tipo de diagrama que mostra todas as possíveis relações lógicas entre uma coleção finita de conjuntos distintos. Esses diagramas representam elementos como pontos no plano e são definidos como regiões dentro de curvas fechadas. Um diagrama de Venn consiste em múltiplas curvas fechadas sobrepostas, geralmente círculos, cada um representando um conjunto."



1.2 DETERMINAÇÃO DE CONJUNTOS

Um conjunto pode ser descrito por seus elementos por extenso, ou através de uma propriedade.

EXEMPLO

O conjunto dos números pares pode ser representado:

- por extenso ou pela designação de seus elementos: $\{0,2,4,6,\dots\}$
- por uma propriedade de seus elementos: $\{x\,/\,x = 2k, \text{com } k = 0,1,2,3,\dots\}$

1.3 PERTINÊNCIA

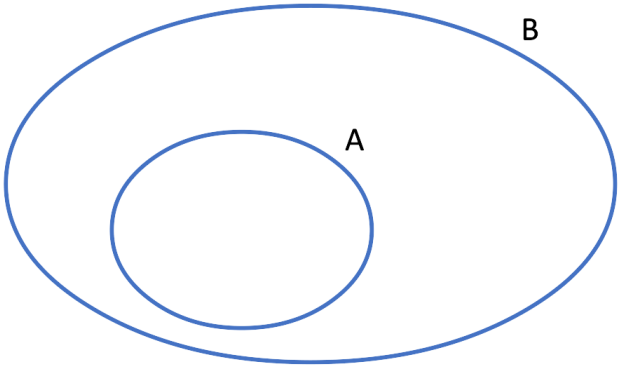
Usamos a representação $x \in A$ para indicar que o elemento x pertence ao conjunto A, e $x \notin A$ para indicar que o elemento x não pertence ao conjunto A.

EXEMPLOS

- $2^{-2} \notin \{-2,-1,0,2\}$
- $1 \in \{x/3x^2-3x=0\}$

1.4 INCLUSÃO

Um conjunto A está contido em B e representamos por $A \subset B$ e, e somente se, todos os elementos de A pertencem a B. Consequentemente o conjunto B contém o conjunto A, e se representa por B. $A \subset B$ pode ser lido como "A é subconjunto de B" Simbolicamente: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$



EXEMPLOS

1. $\{1,3,5\} \subset \{0,1,2,3,4,5,6\}$
2. $\{\text{segunda, sábado, domingo}\} \subset \{x/x \text{ é dia da semana}\}$
3. $\{\text{x/x é par}\} \supset \{\text{x/x é múltiplo de 4}\}$

Observação: Quaisquer que sejam os conjuntos A e B, cumprem-se as seguintes propriedades:

1. $\varnothing \subset A$
2. $A \subset A$ (Propriedade Reflexiva)
3. *Se* $A \subset B$, $B \subset A$, então $A = B$ (Propriedade Anti-simétrica) Obs: Essa propriedade é constantemente usada na dedução matemática. Quando se deseja mostrar que os conjuntos A e B são iguais, prova-se que $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e que todo elemento de B pertence a A.
4. *Se* $A \subset B, B \subset C$, então $A \subset C$ (Propriedade Transitiva)

1.5 IGUALDADE DE CONJUNTOS

EXEMPLOS

- $\{1,3,5,7\} = \{7,5,3,1\}$
- $\{2,4,2,6\} = \{2,6,4\}$
- $\{x/x^2-3x+2=0\} = \{1,2\}$

1.6 CONJUNTO DAS PARTES

Seja A um conjunto.

Qualquer subconjunto de A é também chamado de parte de A.

O conjunto das partes de A, designado por P(A), é o conjunto de todos os subconjuntos de A.

EXEMPLOS

1. Seja A=$\{1,5,6\}$, então: $P(A) = \{\varnothing, \}1\}, \{5\}, \{6\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{5,6\}, \{1,5,6\}\}$
2. Seja $B = \{a,b\}$, então: $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Se o conjunto A tem n elementos o conjunto P(A) possui 2^n elementos. Simbolicamente: $\#P(A) = 2^n$
No exemplo 1: $\#P(A) = 2^3 = 8$ subconjuntos

EXERCICIO RESOLVIDO

O conjunto das partes de C possui 2048 elementos. Quantos elementos possui o conjunto C?
Resolução: $\#P(A) = 2048 \Leftrightarrow 2^n = 2048 \Leftrightarrow n = 11$ elementos

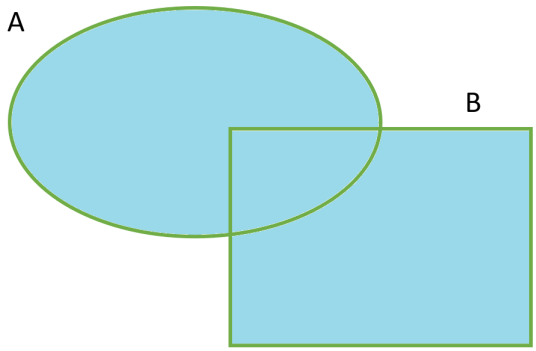
1.7 OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

Dados os conjuntos A e B, definimos:

1.7.1 UNIÃO

$A \cup B$ (A unido a B) é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B. Simbolicamente: $A \cup B = \{x / x \in A \; ou \; x \in B\}$

Graficamente:



PROPRIEDADES DA UNIÃO

Dados A, B e C conjuntos e U o conjunto universo:

1. Comutativa $A \cup B = B \cup A$
2. Associativa $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. Idempotente $A \cup A = A$
4. Identidade $A \cup \varnothing = A$
5. $A \cup U = U$
6. $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
7. $A, B \subset C \Rightarrow (A \cup B) \subset C$

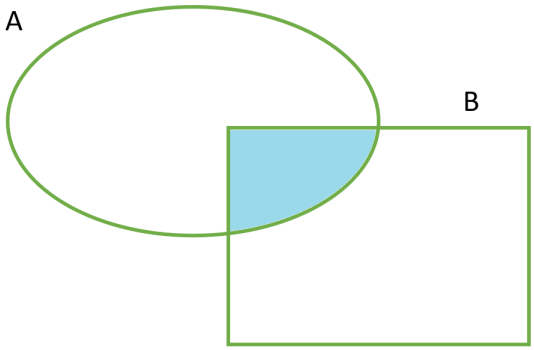
8. $A \subset A \cup B$
   $B \subset A \cup B$

NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO

Dados os conjuntos A e B, o número de elementos da união de A e B é dado por:
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, onde:
n(A) é número de elementos de A;
n(B) é número de elementos de B;
$n(A \cap B)$ é número de elementos de $A \cap B$.

1.7.2 INTERSECÇÃO

$A \cap B$ (lê-se: A "inter" B) é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Simbolicamente: $A \cap b = /x \in A \; e \; x \in B\}$ Graficamente:



PROPRIEDADES DA INTERSECÇÃO

Dados A, B e C conjuntos e U o conjunto universo:

1. Comutativa $A \cap B = B \cap A$
2. Associativa $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Idempotente $A \cap A = A$
4. Identidade $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap U = A$
6. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
7. $(A \cap B) \subset A$
   $(A \cap B) \subset B$
8. Distributividade: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   Observação: Se $A \cap B =$ dizemos que A e B são conjuntos disjuntos.

EXERCÍCIO

1. Mostre que para os conjuntos A, B e C:
   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

1.7.3 DIFERENÇA

A – B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B. Simbolicamente: $A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$
A-B é representado graficamente por:

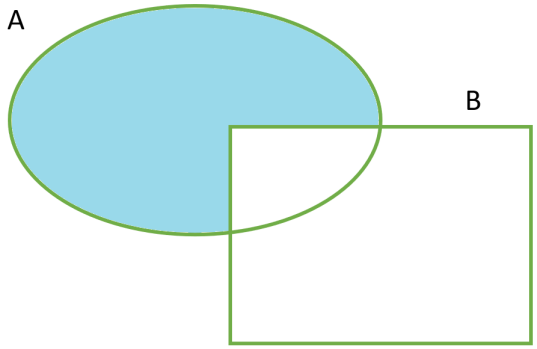
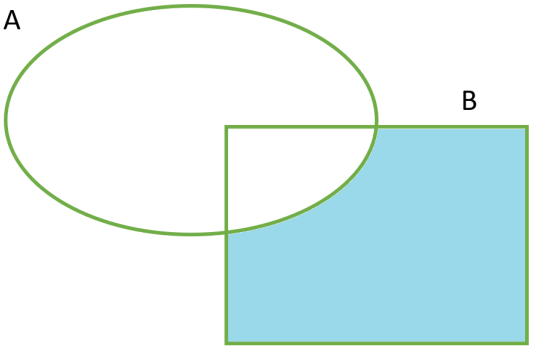


Figura 1.1: Diferença A - B

Por outro lado $B - A = \{x/x \in B \; ex \notin A\}$



1.7.4 DIFERENÇA SIMÉTRICA

A diferença simétrica entre dois conjuntos A e B é representada por $A\Delta B$ e definida da seguinte maneira: $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$

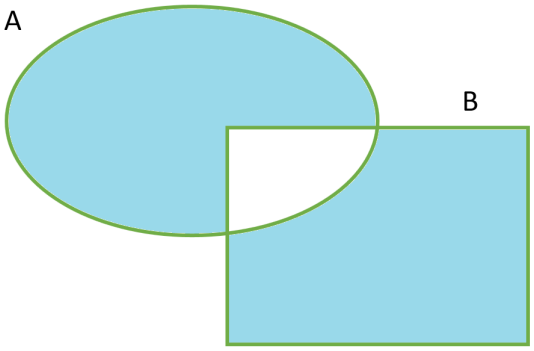
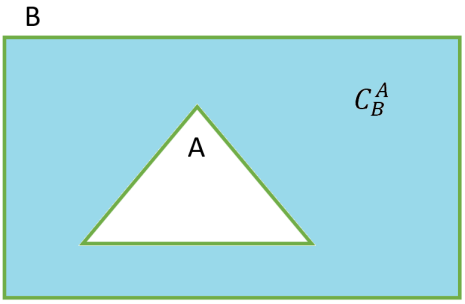


Figura 1.2: Diferença Simétrica

1.7.5 COMPLEMENTAR

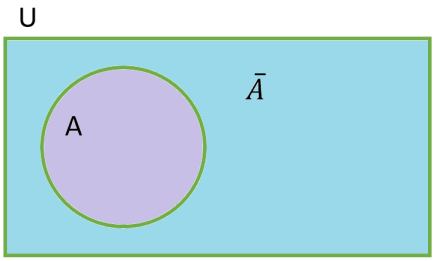
Sejam A e B dois conjuntos de modo que $A \subset B$. O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto B é representado por C_B^A, e é definido por $C_B^A = B - A$
Graficamente:



COMPLEMENTAR EM RELAÇÃO AO CONJUNTO UNIVERSO

O complementar de um conjunto A em relação ao conjunto universo U é representado por $\overline{A}$, e é definido por:

$A = C_U^A = U - A$ Que é o mesmo de dizer: $A = \{x \in U / x \notin A\}$ Podemos associar o complementar em relação ao universo com a negação lógica.
Graficamente:



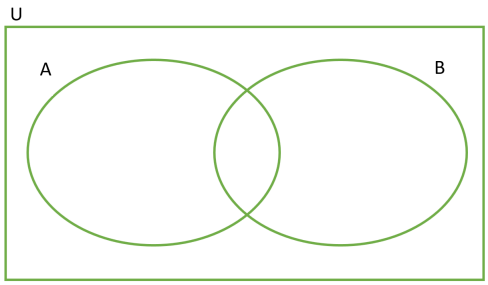
PROPRIEDADES DO COMPLEMENTAR EM RELAÇÃO AO UNIVERSO

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $A \cup \overline{A} = U$
   $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. $\overline{\varnothing} = U$
   $\overline{U} = \varnothing$
5. $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
6. $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$
7. $A - B = A \cap \overline{B}$
8. $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

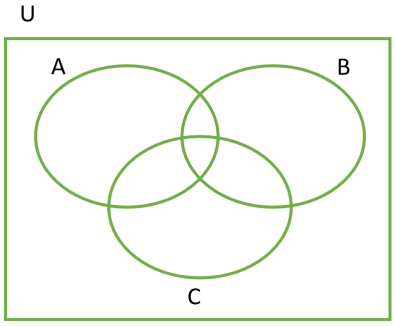
Obs: O complementar em relação ao conjunto universo está relacionado com a negação lógica.

1.8 EXERCÍCIOS

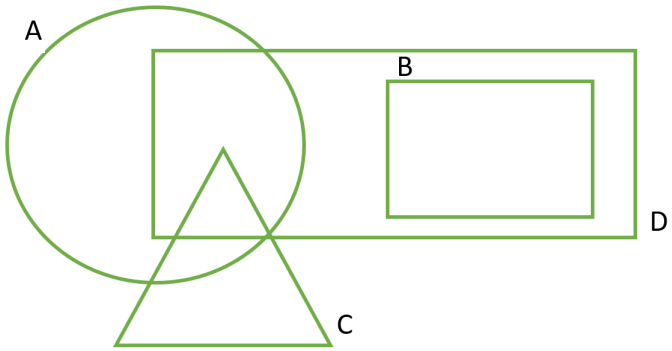
1. (MACKENZIE – SP) Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \varnothing$, então:
   (a) sempre existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.
   (b) sempre existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.
   (c) se $x \in B$ então $x \in A$.
   (d) se $x \notin B$ então $x \notin A$.
   (e) $A \cap B = \varnothing$.
2. Dados os conjuntos A, B e C tais que: $n(A \cup B \cup C) = 25$; $n(A \cap B \cap C) = 1$; $n(A) = 10$; $n(B) = 14$; $n(A \cup B) = 20$; $n[B - (A \cup C)] = 6$; $n[A - (B \cup C)] = 2$.
   Determine: a) $n(A \cap C)B)$ b) $n(B \cap C)A)$
3. Represente no diagrama abaixo as propriedades:
   (a) $\overline{\overline{A}} = A$
   (b) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (c) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   (d) $A \cup \overline{A} = U$
   (e) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
   (f) $A - B = A \cap \overline{B}$
   (g) $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$



4. Assinale no diagrama abaixo, um de cada vez, os seguintes conjuntos:
   (a) $A \cap B \cap C$
   (b) $A \cap (B \cup C)$
   (c) $(A \Delta C) - B$
   (d) $B - (A \cap C)$
   (e) $\overline{(C - (A \cap B))}$



5. Represente no diagrama abaixo o resultado de:



   (a) $(A \cup D) - C$
   (b) $[C_D^B \cup (C \cap A)]$

6. Em uma faculdade 512 estudantes foram entrevistados sobre estilo de leitura. Dentre eles 302 disseram que gostam de leitura ler ficção, 125 gostam de leitura técnica, e 41 de ambos os estilos. Agora responda:
   (a) quantos alunos gostam de leitura técnica ou ficção?
   (b) quantos alunos não gostam de nenhum dos dois estilos?
   (c) represente a pergunta b) em notação matemática, como uma operação entre conjuntos.
   (d) qual a porcentagem do total de alunos gosta apenas de ficção?

7. A tabela abaixo mostra o resultado da apuração dos votos na eleição dos síndicos que trabalharam de forma satisfatória nas últimas gestões. Cada pessoa poderia votar em até três dos candidatos.

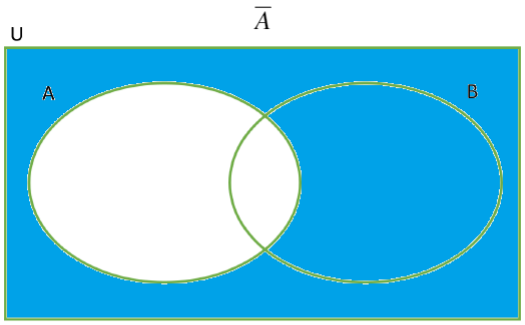
Candidato	Bia	Kafka	Helena	Bia e Kafka	Kafka e Helena	Bia e Helena	Bia, Kafka e Helena	Nenhum dos Três
Votos	120	90	100	30	60	40	10	50

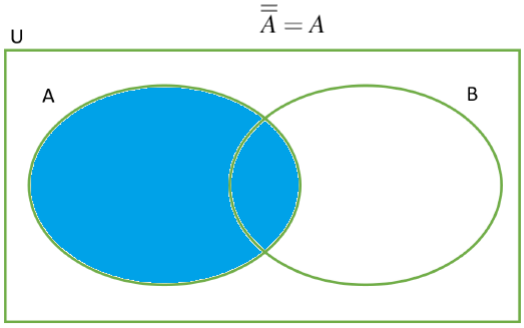
   Determine:
   (a) o número de pessoas consultadas
   (b) o número de pessoas que só votaram em Helena
   (c) o percentual de pessoas que não votaram em Bia ou Kafka
   (d) o número de pessoas que votaram ao menos em dois candidatos

8. Determine os conjuntos A, B e C de modo que: $A \cap B = \{3,4\}$, $B \cap C = \{4,7,9\}$, $C \cap A = \{4,8\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e $A \cup C = \{1,2,3,4,7,8,9,10\}$

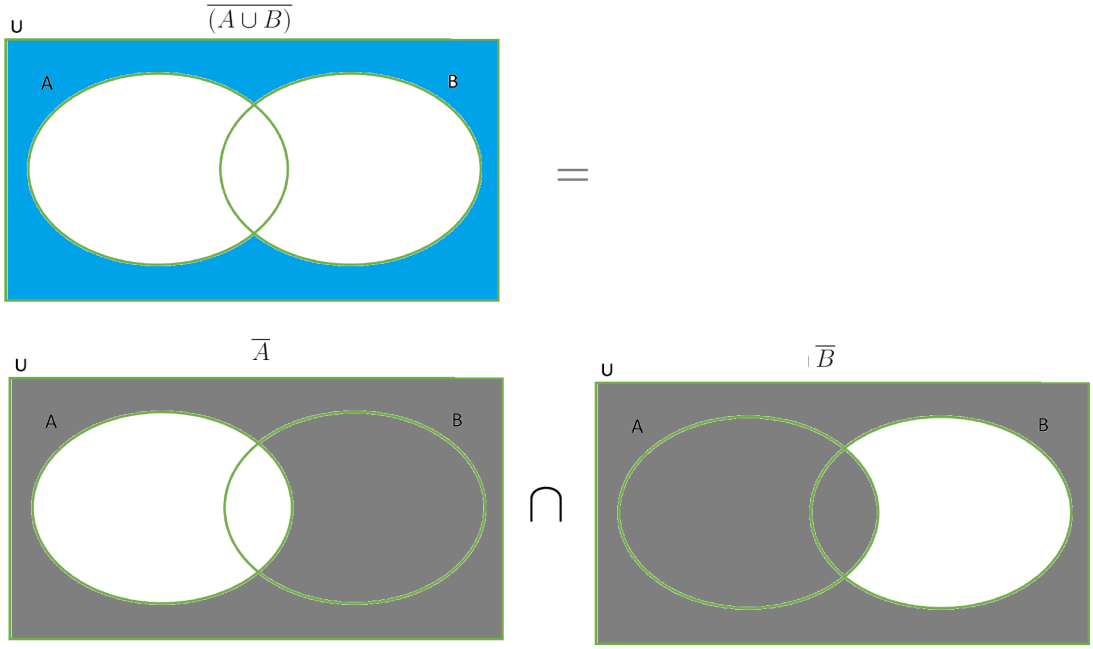
RESPOSTAS

1. d)
2. a) 4 b) 4
3. a)

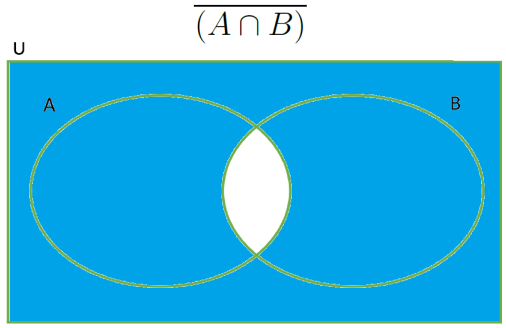


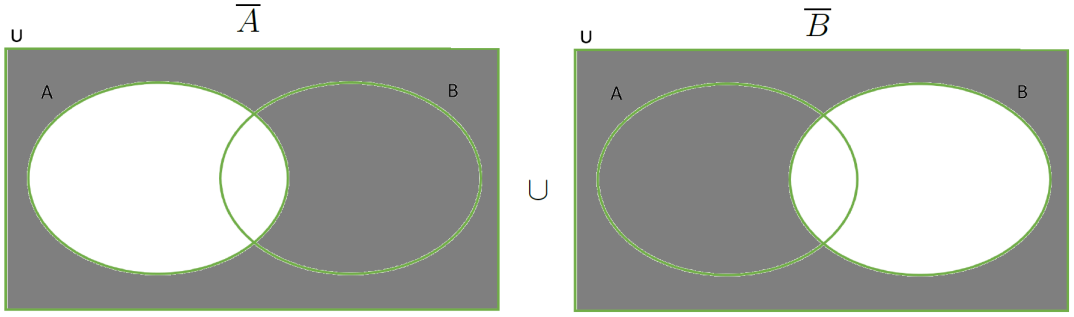


b)

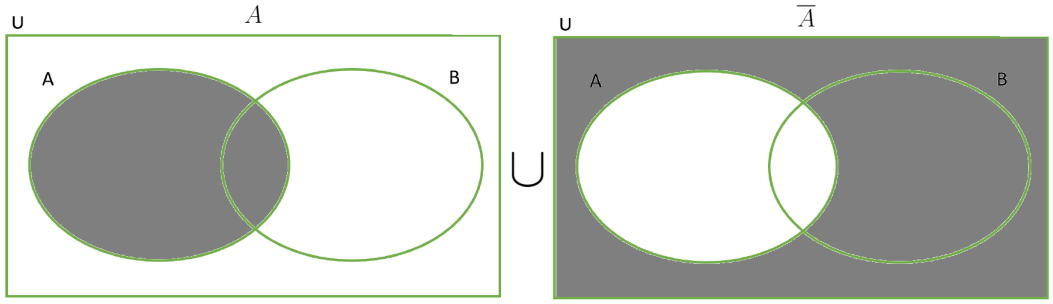


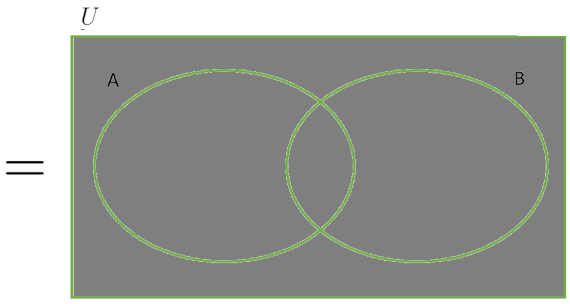
c)


$\overline{(A \cap B)}$
U
A
B

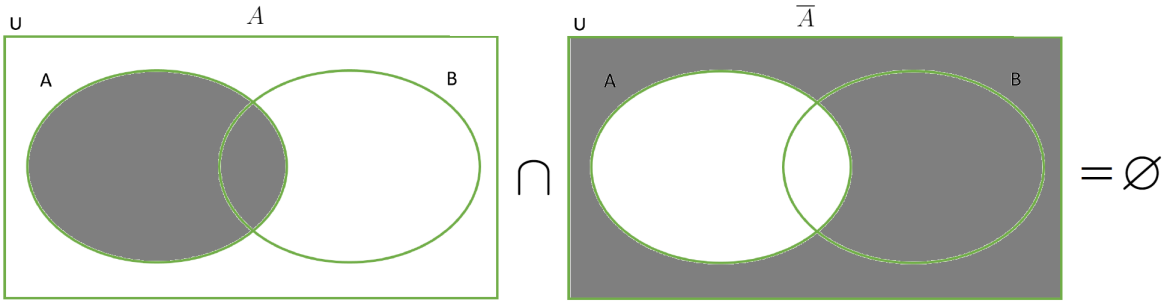

$\overline{A}$
U
A
B
∪
$\overline{B}$
U
A
B

d)

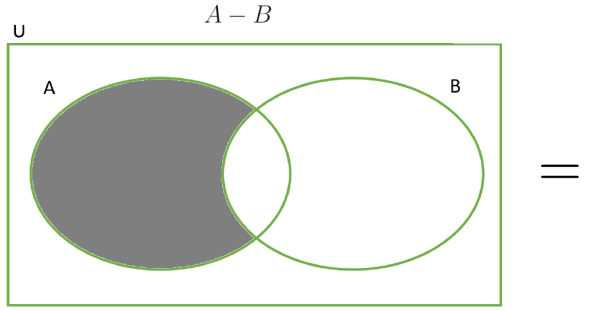

U
A
A
B
∪
U
$\overline{A}$
A
B

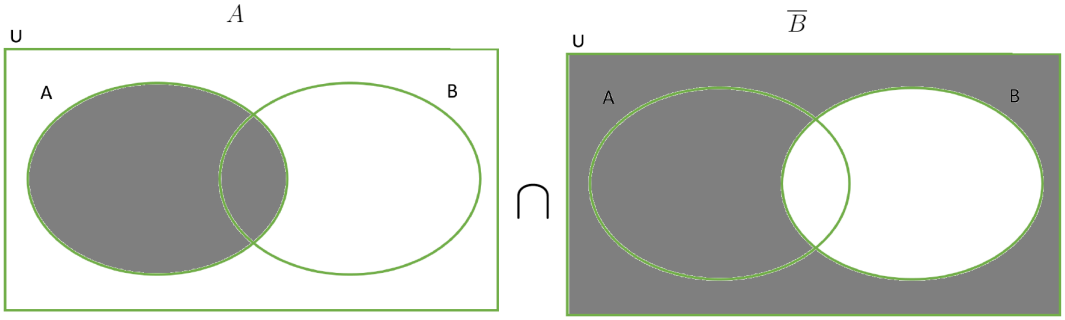

=
U
A
B

e)



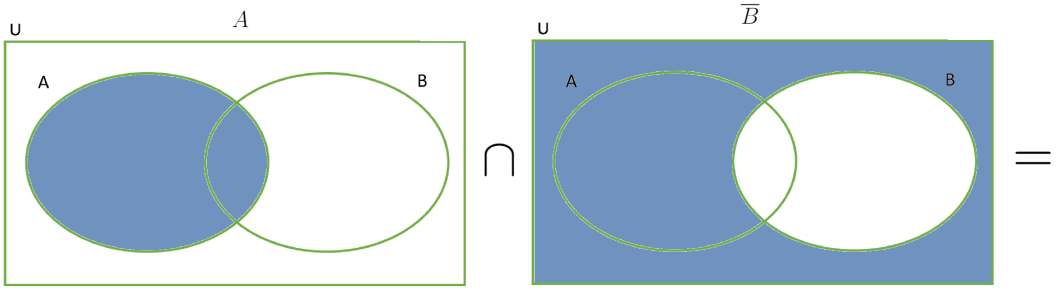
f)

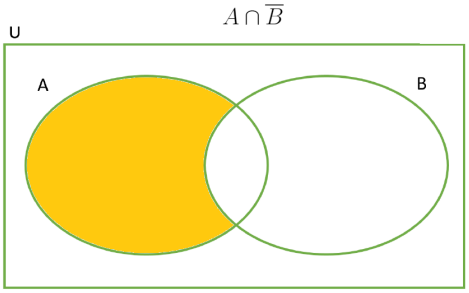




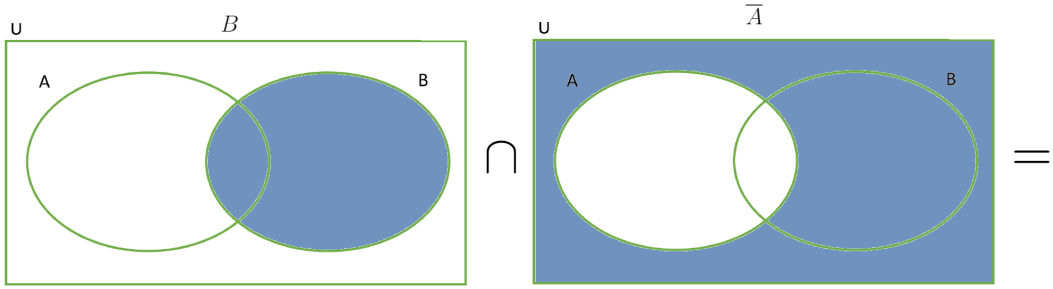
g)

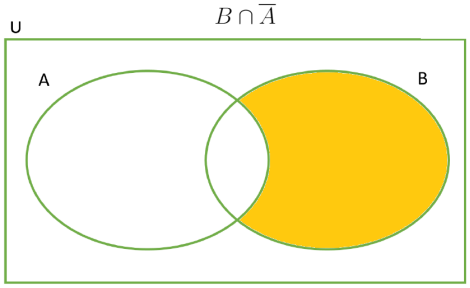
I)





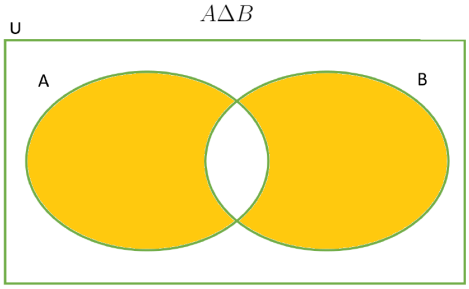
II)



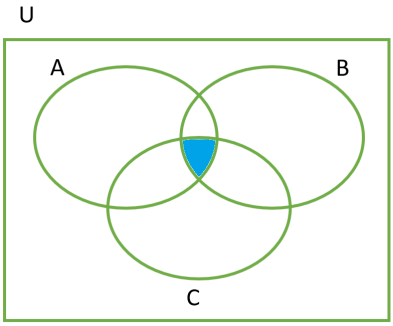


III)

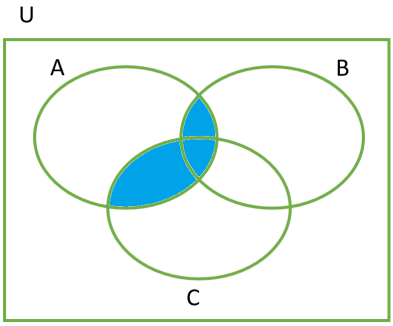
$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) =$



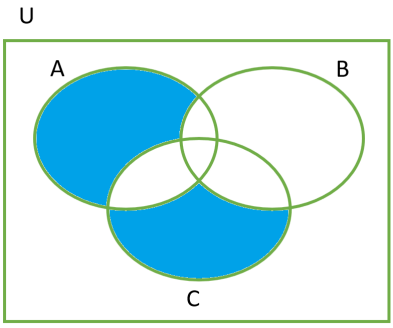
4. a)



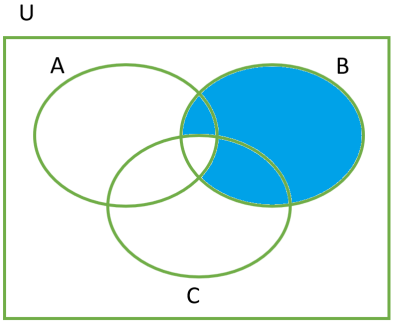
b)



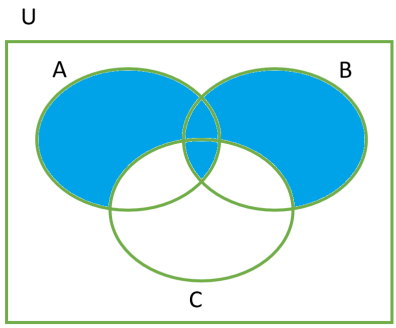
c)



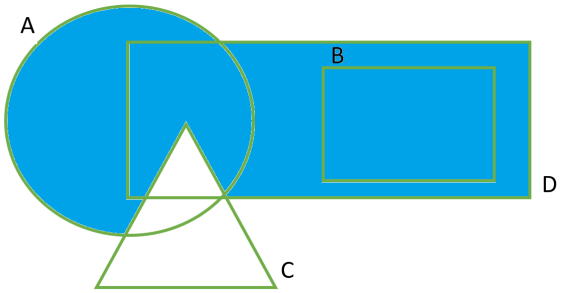
d)



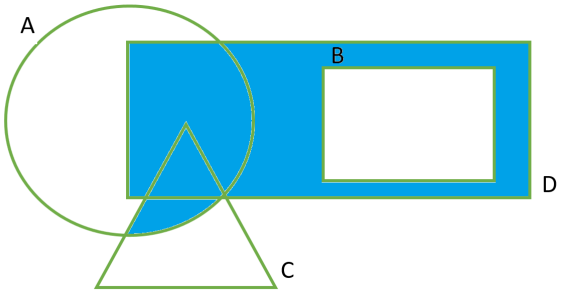
e)



5. a)



b)



6. a) 386 b)126 c)$n(U-(L\cup F))$ ou $n(L\cup\overline{F})$ d)50,98%
7. a) 240 b)10 c)25% d)110
8. $A=\{1,2,3,4,8\}$, $B=\{3,4,5,6,7,9\}$ e $C=\{4,7,8,9,10\}$

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS – $\mathbb{N}$

São todos os números inteiros positivos, incluindo o zero. É representado pela letra maiúscula $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,\dots\}$

Caso queira representar o conjunto dos números naturais não-nulos (excluindo o zero), deve-se colocar um * ao lado do N, $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,\dots\}$ Obs: Isso vale todos para os outros conjuntos a seguir. ex: $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*$ Também podemos usar para excluir o zero: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

2.2 CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z

São todos os números que pertencem ao conjunto dos Naturais mais os seus respectivos opostos (negativos). $\mathbb{Z} = \{\cdots -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$

O conjunto dos inteiros possui alguns subconjuntos, eles são:

- $Z_+ = \{0,1,2,3,4,5,6,\dots\}$ inteiros não-negativos
- $Z_- = \{\dots,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$ inteiros não-positivos
- $Z_+^* = \{1,2,3,4,5,6,7,\dots\}$ inteiros positivos
- $Z_-^* = \{\cdots -4,-3,-2,-1\}$ inteiros negativos

2.3 CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q

Definição: É todo número que pode ser colocado na forma $\frac{p}{q}$, onde: p é um número inteiro e q é um inteiro não-nulo. Simbolicamente: $\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q}, \text{ onde } p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$

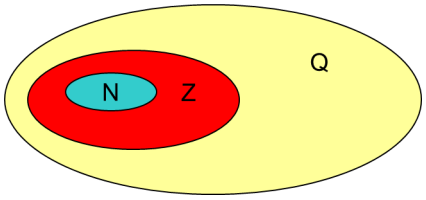


Figura 2.1: $N \subset Z \subset Q$

Os números racionais são formados por:

- Números Inteiros
- Números decimais finitos (Ex: 43,8002)
- Números decimais infinitos periódicos (dízimas periódicas).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Usando a definição de número racional responda às questões a seguir:

1. $0 \in Q$?
2. $-7 \in Q$?
3. $0,83 \in Q$?
4. $-0,3434\cdots \in Q$?
5. $\sqrt{4} \in$?
6. $\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots \in Q$?

Resposta

1. Sim, pois $0 = \frac{0}{3}$
2. Sim, pois $-7 = -\frac{(14}{2}$
3. Sim, pois $0,83 = \frac{83}{100}$
4. Sim, pois $-0,3434\cdots = -\dfrac{34}{9}$
5. Sim, pois $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$
6. Não, pois $\sqrt{2}$ não pode ser escrita na forma a/b, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Todo número que não pode ser escrito nessa forma é chamado de número irracional.

2.4 FRAÇÃO GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA

Um dízima periódica é um número decimal infinito que possui uma parte decimal infinita que se repete periodicamente. Veja alguns exemplos:

1. $0,3434\cdots = 0,\overline{34}$ (Dízima de período 34)
2. $0,222\cdots = 0,\overline{2}$ (Dízima de período 2)
3. $21,7256256\cdots = 21,7\overline{(256)}$ (Dízima de período 256)
4. $0,428571428571\cdots = 0,\overline{(428571)}$ (Dízima de período 428571)

A fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ associada a uma dízima periódica é chamada de fração geratriz dessa dízima.

2.5 GERATRIZ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA

Para determinar a geratriz de uma dízima, atribuímos a essa dízima uma variável (x por exemplo) e montamos um sistema de equações conforme os exemplos a seguir.

1. $0,444\ldots$

$$\begin{cases} x = 0,444\ldots \\ 10x = 4,444 \end{cases}$$

$$10x - x = 4,444 - 0,444\cdots \Rightarrow 9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$$

Resp: $\dfrac{4}{9}$ é a fração geratriz de $0,444\ldots$

2. $7,5656\ldots$

$$\begin{cases} x = 7,5656\ldots \\ 100x = 756,5656\ldots \end{cases}$$

$100x - x = 756,5656\cdots - 7,5656\cdots \Rightarrow 99x = 749$

Resp: $\frac{749}{99}$ é a fração geratriz de $7,5656\ldots$

3. $13,907474\ldots$

$$\begin{cases} x = 13,907474\ldots \\ 100x = 1390,7474\ldots \\ 10000x = 139074,7474\ldots \end{cases}$$

$10000x - 100x = 139074,7474\cdots - 1390,7474\cdots \Rightarrow 9900x = 137684 \Rightarrow x = \frac{137684}{9900}$

Resp: $\frac{137684}{9900}$ é a fração geratriz de $13,907474\ldots$

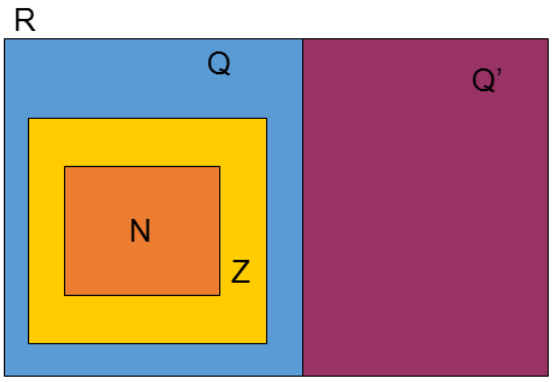
2.6 CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS - $\mathbb{Q}'$

Definição: São todos os números que não podem ser escritos na forma a/b, com $a \neq 0$. O conjunto dos irracionais também pode ser designado por R - Q ou $\overline{Q}$.

EXEMPLOS: Decimais infinitos não-periódicos; $\pi = 3,14159265\ldots$; e (algarismo neperiano ou número de Euler) = $2,7182\ldots$; $\sqrt[3]{11}$.

2.7 CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS – $\mathbb{R}$

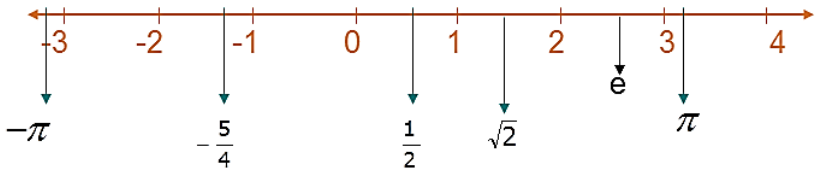
O conjunto dos números reais é a reunião dos números racionais com os irracionais, ou seja $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$. Também podemos definir o conjunto dos reais como $\mathbb{R}$ = {x⁄x é racional ou x é irracional}.



Propriedades:

1. $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$
2. $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$

Representação de números reais na reta:



2.8 EXERCÍCIOS

1. Classifique cada uma das afirmações como V (verdadeira) ou F (falsa):

   (a) $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ( )

   (b) $\frac{1}{5} \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ ( )

   (c) Se $a=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ e $b=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, então $a-b=\sqrt{6}-3$ ( )

   (d) $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Q}_+$ ( )

   (e) $3,1416 \notin \mathbb{Q}'$ ( )

   (f) $-8 \notin \mathbb{R}_+^*$ ( )

   (g) $\sqrt{15} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ ( )

   (h) O quociente entre dois números irracionais é sempre um número irracional ( )

   (i) Existe número que é, ao mesmo tempo, racional e irracional.( )

   (j) Existe número real que não é racional nem irracional. ( )

   (k) $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}$ ( )

   (l) $0,1313\ldots$ pertence ao conjunto dos irracionais. ( )

   (m) Se $\frac{a}{b}$ é a fração irredutível que gera a dízima $0,2727\ldots$, então a dízima $3,666\ldots$ é gerada pela fração $\frac{b}{a}$ ( )

   (n) $\mathbb{Q} \supset (\mathbb{Z}-\mathbb{N})$ ( )

   (o) $R_+^* \cap R_-^* = \varnothing$ ( )

2. (UFPE -1996) Na questão a seguir escreva nos parênteses a letra (V) se a afirmativa for verdadeira ou (F) se for falsa. A expressão $\frac{4}{\sqrt{3}-1}-\frac{4}{\sqrt{3}+1}$ é um número:

   ( ) real irracional
   ( ) natural divisível por 4.
   ( ) natural par.
   ( ) inteiro divisível por 3.
   ( ) primo

3. Responda com V (verdadeiro) ou F (falso). Sendo A = $0,333\cdots+\frac{1}{0,5+2:\frac{4}{3}}-\frac{1}{2}\cdot 5$ e B = $(2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}+1}):(8^{\frac{-1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{4}})$, o valor numérico da expressão $3A+\sqrt{B}$ é igual a -1 ( )

Respostas

1. a)V b)V c)V d)F e)V f)V g)V h)F i)F j)F k)V l)F m)V n)V o)F
2. FVVFF
3. V

2.9 INTERVALOS

Intervalo é qualquer subconjunto dos números reais. Um ponto c pertence a um intervalo se ele está no seu interior ou em seu extremo fechado.

Nos Exemplos 1 e 2 abaixo, o elemento "a" não pertence ao intervalo, pois está designado com um ponto aberto.

A reta azul é a reta suporte onde são representados os intervalos.

Exemplo 1: O ponto $C \in]a,b]$, pois C está no interior do intervalo.

Exemplo 2: O ponto $C \in]a,b]$, pois C está no extremo fechado do intervalo.

2.10 TIPOS DE INTERVALOS

INTERVALOS FINITOS

1. Intervalo Aberto: $]a,\ b[$ ou $\{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$

2. Intervalo Fechado: $[a,\ b]$ ou $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x \leq b\}$

3. Intervalo Semi-aberto à direita: $[a,\ b[$ ou $\{x \in \mathbb{R}/a \leq x < b\}$

4. Intervalo Semi-aberto à esquerda: $]a,\ b]$ ou $\{x \in \mathbb{R}/a < x \leq b\}$

INTERVALOS INFINITOS

5. $[a,\ +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R}/x \geq a\}$

6. $]a,\ +\infty[$ ou $\{x \in \mathbb{R}/x > a\}$

7. $]-\infty, b]$ ou $\{x \in \mathbb{R}/x \leq b\}$

8. $]-\infty, b[$ ou $\{x \in \mathbb{R}/x < b\}$

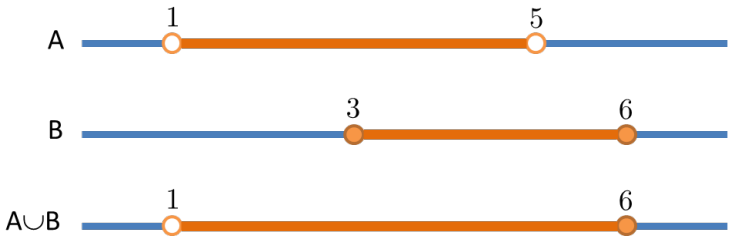
9. $]-\infty, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$

2.11 OPERAÇÕES COM INTERVALOS

UNIÃO

Dados os conjuntos A=]1, 5[, B=[3, 6], C=]5, +∞[e D=]3, 4]. Determine:

Exemplo 1: $A \cup B$.

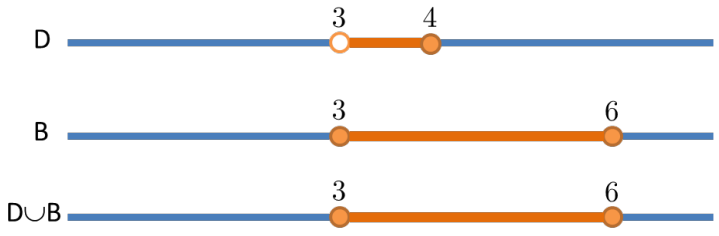


Resp: $\{x \in \mathbb{R}/1 < x \leq 6\}$

Exemplo 2: $A \cup C$.

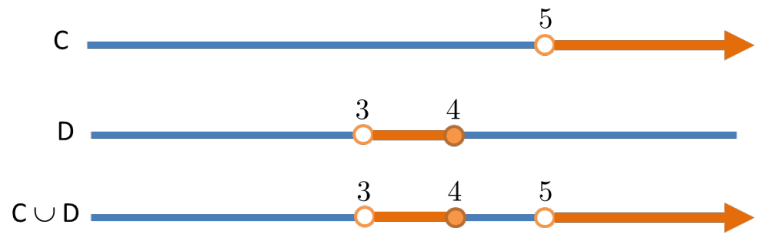
Resp: $\{x \in \mathbb{R}/x > 1 \; e \; x \neq 5\}$

Exemplo 3: $D \cup B$.



Resp: $D \cup B = B$

Exemplo 4: $C \cup D$.

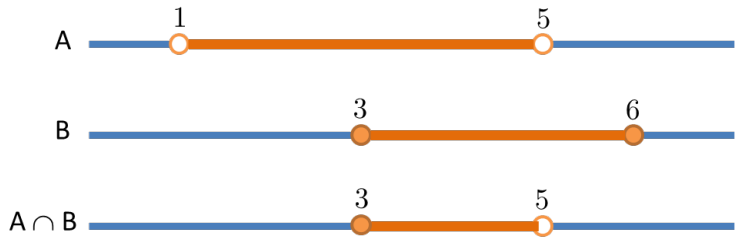


Resp: $]3,4] \cup]5,+\infty[$

INTERSEÇÃO

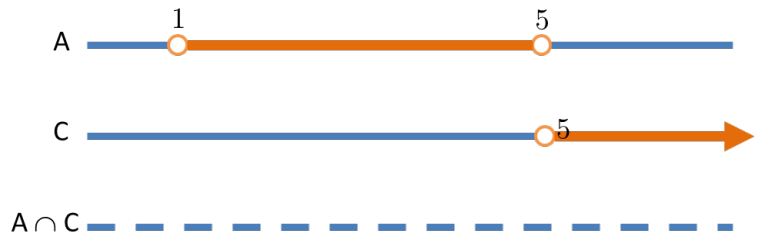
Dados os conjuntos A=]1, 5[, B=[3, 6], C=]5, $+\infty$[, D=]3, 4] e E=[4, $+\infty$[. Determine:

Exemplo 1: $A \cap B$.



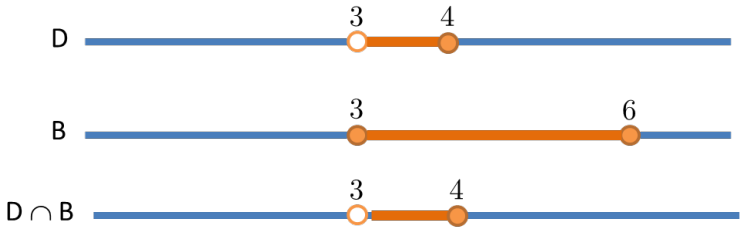
Resp:[3, 5[

Exemplo 2: $A \cap C$.



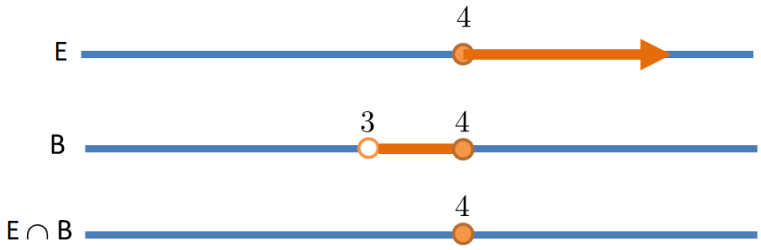
Resp: $\varnothing$

Exemplo 3: $D \cap B$.



Resp: $D \cap B = D$

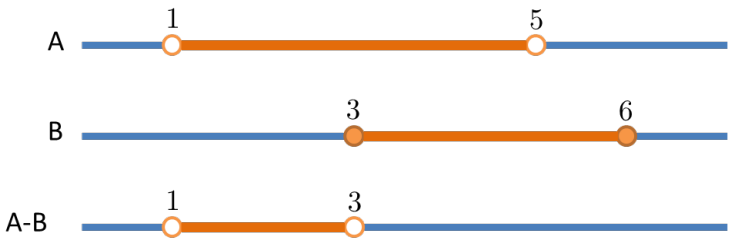
Exemplo 4: $E \cap B$.



Resp: $\{4\}$

DIFERENÇA

Dados os conjuntos A=]1, 5[e B=[3, 6]. Determine A-B.



Resp:]1, 3[

COMPLEMENTAR

Dados os conjuntos A=$]1, +\infty[- 5$ e B=]3, 4]. Determine o complementar de B em relação ao conjunto A.

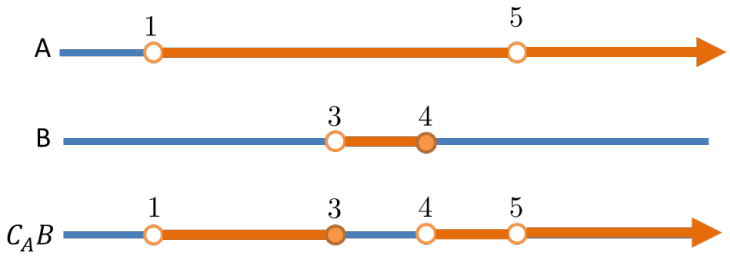


Figura 2.2: Operação com Complementar

Res: $]1,3] \cup]4,+\infty[- \{5\}$

COMPLEMENTAR EM RELAÇÃO AO CONJUNTO UNIVERSO

Figura 2.3: Complementar em Relação ao Conjunto Universo

Res: $]-\infty,1] \cup \{5\}$

DIFERENÇA SIMÉTRICA

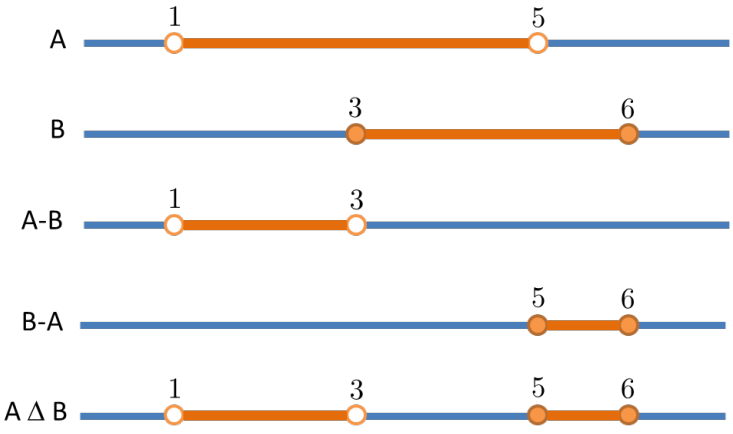


Figura 2.4: Diferença Simétrica

Resp: $\{x \in R / 1 < x < 3 \text{ ou } 5 \leq x \leq 6\}$

2.12 EXERCÍCIOS

1. Represente os seguintes intervalos na reta real
   (a) $\{x \in \mathbb{R};\ -1 < x \leq 5\}$
   (b) $\left\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$
   (c) $[0,+\infty[$

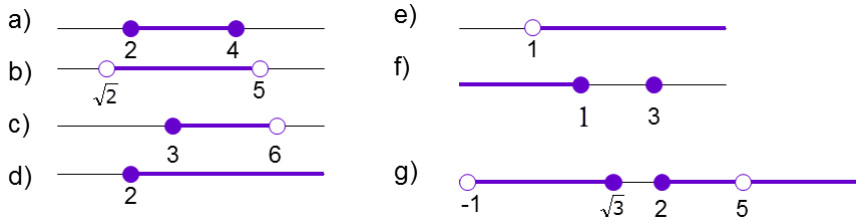
(d) $]-\infty,3[\cup\{4\}$

(e) $[2,5[$

(f) $]-\infty,+\infty[$

(g) $\{x \in R/\ -e \leq x \leq \pi\}$

2. Escreva os seguintes intervalos utilizando a representação algébrica:



3. Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças:

(a) ( ) $-1 \in]-5,-1[$

(b) ( ) $\{2,5\} \subset [0,+\infty[$

(c) ( ) $]0,7] = \{x \in \mathbb{R}/0 < x < 7\}$

(d) ( ) $1+\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{R}/0 \leq x \leq 1\}$

(e) ( ) $]-\infty,1] \supset [-1,1[$

4. Dados os intervalos abaixo e considerando o universo dos reais, represente-os na reta e obtenha os resultados das operações solicitadas. A = $\{x \in R/-3 < x \leq e\}$, B = $]-2,\pi[-\{e\}$, sendo $e = 2,7182\ldots$ e $\pi = 3,1415\ldots$

(a) $A-B$

(b) $B-A$

(c) $B\,\Delta\,A$

(d) $A \cup B$

(e) $A \cap B$

(f) $\overline{B}$

5. Dado o conjunto A = $]-\infty,\pi] \cup \{5,6\}$, determine:

(a) A soma dos números inteiros não-negativos pertencentes a A.

(b) O produto dos números inteiros não-positivos pertencentes a A.

(c) O complementar de A em relação ao conjunto universo.

(d) Seja B = $]-\infty,6]$, determine C_B^A.

6. Se A = $\left\{x \in \mathbb{R}/\frac{5}{2} < x < \sqrt{8}\right\}$, B = $[\frac{5}{2},4[$ e C = $\{x \in \mathbb{R}/2 < x < 5\}$, calcule:

(a) $(A \cap B) - C$

(b) $B\,\Delta\,C$

7. Se A = $\{x \in \mathbb{R}/x < k\}$, onde k é a solução da equação $\frac{x}{3} - \frac{x-2}{4} = \frac{2}{3}$, B = $\{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x < 5\}$ e C = $[-4,3]$, então o conjunto que representa $C-(A \cap B)$:

(a) $[-4,-2[$

(b) $[-4,-2] \cup [2,3]$

(c) $[-4,-2]$

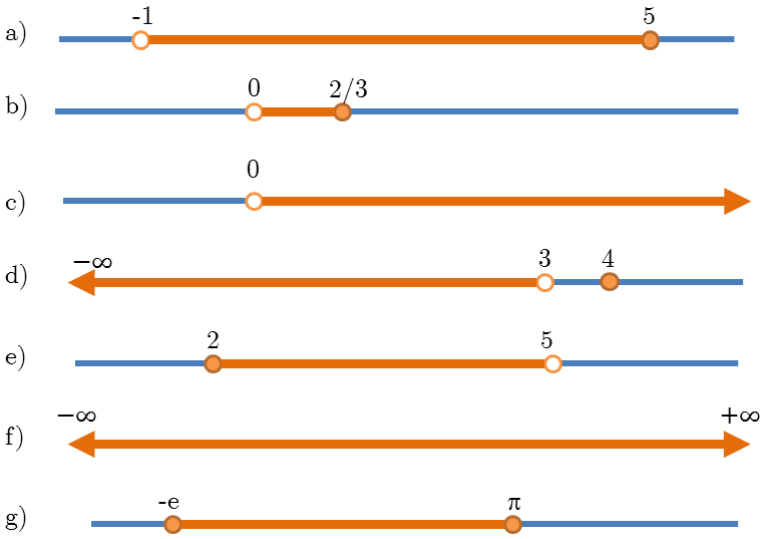
(d) $[-4,-2[\cup]2,3]$

(e) $[-4,-2[\cup[2,3]$

8. Se A = $\left\{x \in N/k < x \leq \sqrt{5}\right\}$ onde k é a solução $\frac{(x-2)}{3} - \frac{(x-3)}{2} = 1$, B = $[m,n[$, onde m e n são raízes da equação $x^2 - 2x - 15 = 0$, C = $\{0\} \cup [2,7[$ e D = $\left\{x \in \mathbb{R}/\frac{(x-2)}{4} + \frac{(2x+8)}{5} \leq 5\right\}$ Determine $(D - \overline{A}) \cup (C \cap B)$.
9. Dados os conjuntos A = $x \in \mathbb{R}/t < x \leq t+5$ onde t é a raiz da equação $\frac{(x+7)}{4} - \frac{(x-7)}{2} = \frac{(6x+1)}{7} + 4$, B = $\{x \in \mathbb{R}/x \leq m \; ou \; x > n\}$, onde m e n são raízes da equação $(2x+1)^2 - 5(2x+1) + 4 = 0$ e $m < n$, e C = $\left\{x \in N^*/\frac{8}{x}, \text{ com } n \in N\right\}$. Determine os conjuntos:
   (a) A
   (b) B
   (c) C
   (d) $B - C$
   (e) $A \cap C$
   (f) $(B - C) \cup (A \cap C)$
   (g) $\overline{(B - C) \cup (A \cap C)}$
10. Se A = $\left\{x \in \mathbb{R}/\frac{5}{2} < x < \sqrt{8}\right\}$, B = $[\frac{5}{2}, 4[$ e C = $\{x \in \mathbb{R}/2 < x < 5\}$, calcule:
    (a) $(A \cap B) - C$
    (b) $B \, \Delta \, C$
11. Se A = $]-\infty, 7]$, B = $\{x \in \mathbb{R}/3x - 5 > 10\}$ e E = $]2,9]$, determine: $C_E^{A \cap C}$
12. Dados A = $]-\infty, -2[$, B = $[-2,1[$, C = $[1,4[$, encontre o maior número inteiro x que pertence ao conjunto $A \cup B \cup C$.
13. Considere os intervalos M = $]\sqrt{3}, c]$ onde c é o módulo do menor inteiro que soluciona a inequação $\frac{x-2}{3} - \frac{1}{2} < x + 1$ e N = $]m,n[$ m e n são as raízes da equação $\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3 = 0$.
    Determine:
    (a) $M \cap N$
    (b) $M - N$
    (c) $M \cup N$
14. Responda com V(verdadeiro) ou F(falso). Apresente todos os cálculos e justificativas. A = $0,333\cdots + \frac{1}{0,5 + 2 : \frac{4}{3}} - \frac{1}{2} \cdot 5$ e B = $(2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}+1}) : (8^{\frac{-1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}})$ O valor numérico da expressão $3A + \sqrt{B}$ é igual a -1 ( )
15. Sabendo que m é o maior inteiro que soluciona a inequação $\frac{x-2}{3} - \frac{1}{2} > x + 1$ e m é a menor raiz da equação $x^2 + 7x - 10$. Sendo A = $]2\pi, m] \cup 0$, B = $\{x \in \mathbb{R}/ -8 < x < -4 \text{ ou } -3 < x \leq 5\}$, e C = $]-9, p]$, determine a soma de todos os números inteiros pertencentes ao intervalo $C - \{A \cap B\}$.

RESPOSTAS

1.



2. a) $[2;4]$ b) $\left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{2} < x < 5\right\}$ c) $\{x \in \mathbb{R}/3 \leq x < 5\}$ d)$[2;+\infty[$ e) $x \in \mathbb{R}/x > 1$ f) $]-\infty,1] \cup \{3\}$ g) $\{x \in \mathbb{R}/1 < x \leq 5,$ ou $x \geq 2$ e $x \neq 5\}$
3. a)F b)V c)F d)F e)V
4. a) $]-3,-2] \cup \{e\}$ b) $]e,\pi[$ c) $B \,\Delta\, A =]-3,-2] \cup [e,\pi[$ d)$]-3,\pi[$ e) $]-2,e[$ f) $]-\infty,-2] \cup \{e\} \cup [\pi,+\infty[$
5. a) 17 b) 0 c) $]\pi,+\infty[- \{5,6\}$ d) $]\pi,6[- \{5\}$
6. a)$\varnothing$ b)$]2,\frac{5}{2}[\cup [4,5[$
7. e
8. k= -1; A = $\{0,1,2\}$; m= -3 e n = 5; B = $[-3,5[$; D = $]-\infty,6]$; $(D - \overline{A}) \cup (C \cap B) = \{0,1\} \cup [2,5[$.
9. a)$]1,6]$; b)$]-\infty,0] \cup [\frac{3}{2},+\infty[$; c)$\{1,2,4,8\}$; d)$]-\infty,0] \cup [\frac{3}{2},+\infty[- \{2,4,8\}$
10. a) $\varnothing$ b) $\left\{x \in \mathbb{R}/2 < x < \frac{5}{2}\right.$ ou $\left. 4 \leq x < 5\right\}$
11. $\{x \in \mathbb{R}/2 < x \leq 5$ ou $7 < x \leq 9\}$
12. 3
13. a) $\{x \in \mathbb{R}/2 < x < 3\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{3} < x \leq 2 \text{ ou } x = 3\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R}/\sqrt{3} < x \leq 3\right\}$
14. a)V b)F c)F
15. -22

3. PLANO CARTESIANO E PRODUTO CARTESIANO

3.1 PAR ORDENADO

Sejam a e b números reais. Admitiremos como conceito primitivo, que o par ordenado (x, y) é um elemento formado, nessa ordem, pela abscissa x e pela ordenada y.

3.2 IGUALDADE DE PARES ORDENADOS

Dois pares ordenados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são iguais se, e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

3.3 PLANO CARTESIANO

É um sistema formado por um par de eixos ortogonais. O eixo horizontal é o eixo das abscissas (eixo ox) e o eixo vertical o eixo das ordenadas (eixo oy). A abscissa (x) do ponto é marcada no eixo ox e a ordenada em oy. O ponto P=(x, y) é representado no plano cartesiano através do encontro das perpendiculares traçadas por x e por y.

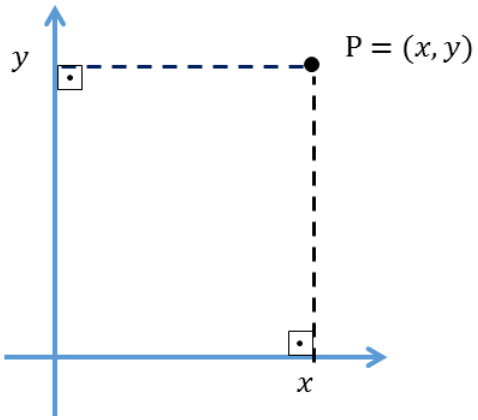


Figura 3.1: Representação Gráfica

O plano cartesiano determina quatro regiões chamadas de quadrantes. Os quadrantes são numerados no sentido anti-horário. Para todos os pontos do 1º quadrante, x > 0 e y > 0. No 2º quadrante x < 0 e y > 0. No terceiro quadrante x < 0 e y < 0. No quarto quadrante x > 0 e y < 0.

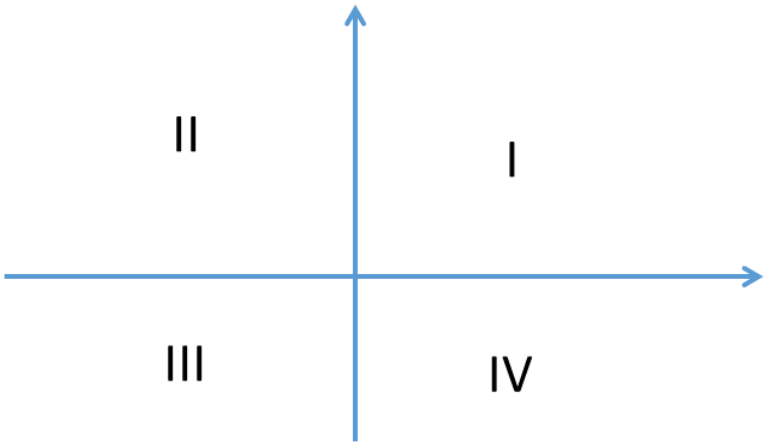


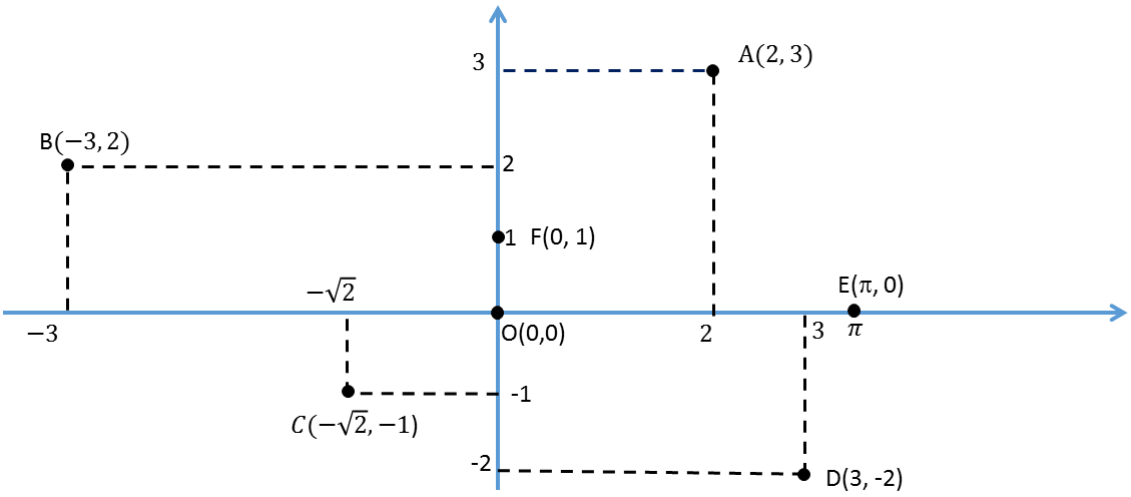
Figura 3.2: Plano Cartesiano

3.4 EXERCÍCIO

1. Localize os pontos A(2,3), B(-3,2), C($\sqrt{2}, -1$), D(3,-2), E(π,0), F(0,1), O(0,0) no plano cartesiano.
2. Dado o ponto P = (2m-6;-m+2). Determine m real para que P esteja localizado no 3º quadrante.
3. Dado o ponto P = (2m-n;m+3n-14). Determine m real para que P esteja localizado na origem.

Respostas

1.



2. Resolução:

$$\begin{cases} 2m-6<0 \\ -m-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<3 \\ -m<2 \ \text{(x -1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<3 \\ m>-2 \end{cases}$$

Resp: $\{m \in \mathbb{R} / -2 < m < 3\}$

3. Resolução:

$$\begin{cases} 2m-n=0 \\ m+3n-14=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2m \\ m+3n-14=0 \end{cases} \Rightarrow m+3(2m)-14=0 \Leftrightarrow 7\text{m} = 14 \Leftrightarrow m=2$$

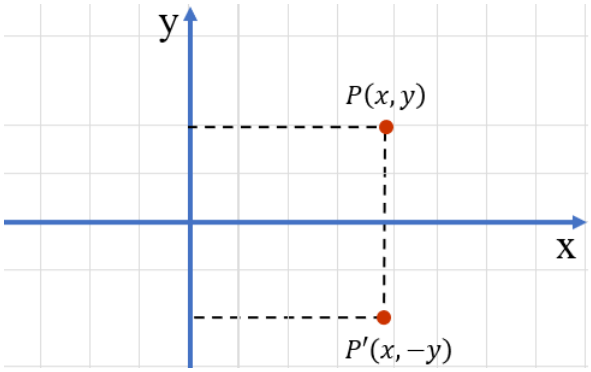
3.5 SIMETRIAS NO PLANO

As simetrias entre dois pontos ajudam a entender algumas propriedades que serão abordadas a partir do capítulo de funções, como por exemplo, a simetria entre o gráfico de uma função e sua função inversa, paridade de funções e rebatimento de gráficos.

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO OX

O simétrico de um ponto P(x, y), com x, y reais, em relação ao eixo oy é o ponto P'(x, -y).

A Figura **??** mostra um ponto e o seu simétrico em relação ao eixo das abscissas (eixo ox).



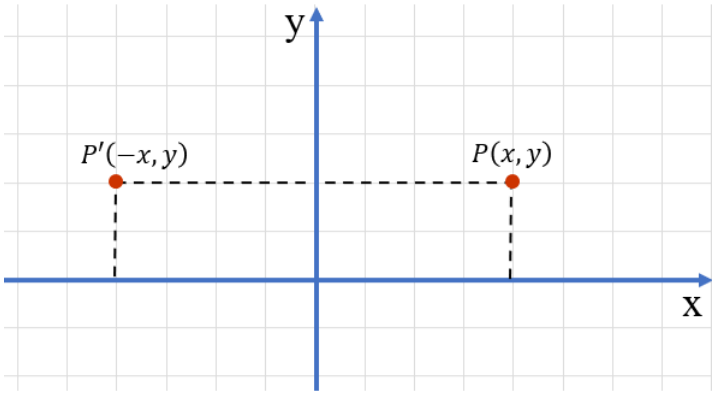
EXEMPLOS

- O simétrico de (-2, -1) em relação ao eixo das abscissas é (-2, 1).
- O simétrico de (0, -1) em relação ao eixo ox é (0, 1).
- Qualquer que seja o x real, o simétrico de (x, 0) em relação ao eixo das abscissas é (x, 0).

SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO OY

O simétrico de um ponto P(x, y), com x, y reais, em relação ao eixo oy é o ponto P'(-x, y).

A Figura **??** mostra um ponto e o seu simétrico em relação ao eixo das ordenadas (eixo oy).

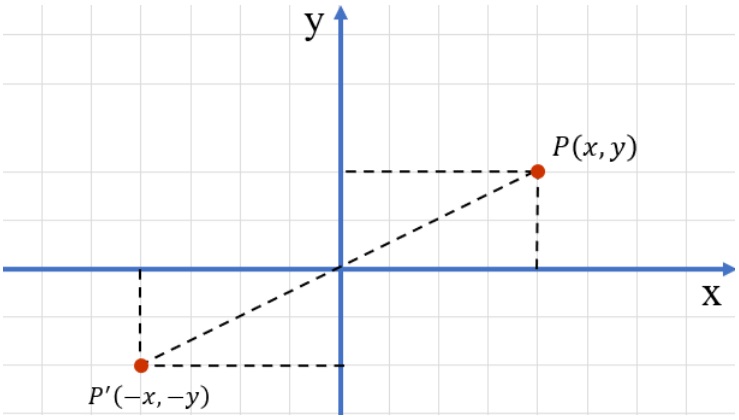


EXEMPLOS

- O simétrico de (5, -2) em relação ao eixo das ordenadas é (-5, -2).
- O simétrico de (0, 7) em relação ao eixo oy é (0, 7).
- Qualquer que seja o x real, o simétrico de (x, 0) em relação ao eixo das ordenadas é (-x, 0).

SIMETRIA EM RELAÇÃO À ORIGEM

Sejam x, y reais. O simétrico de um ponto P(x, y), , em relação à origem é o ponto P'(-x, -y).

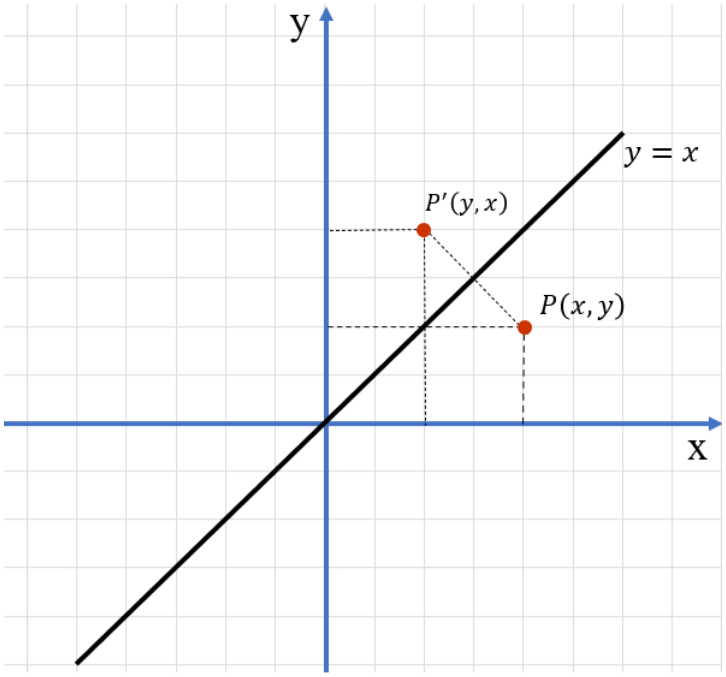


EXEMPLOS

- O simétrico de (7, -5) em relação à origem é (-7, 5).
- O simétrico de (0, -6) em relação à origem é (0, -6).
- Qualquer que seja o x real, o simétrico de (x, 0) à origem é (-x, 0).

SIMETRIA EM RELAÇÃO À BISSETRIZ DOS QUADRANTES ÍMPARES (y=x)

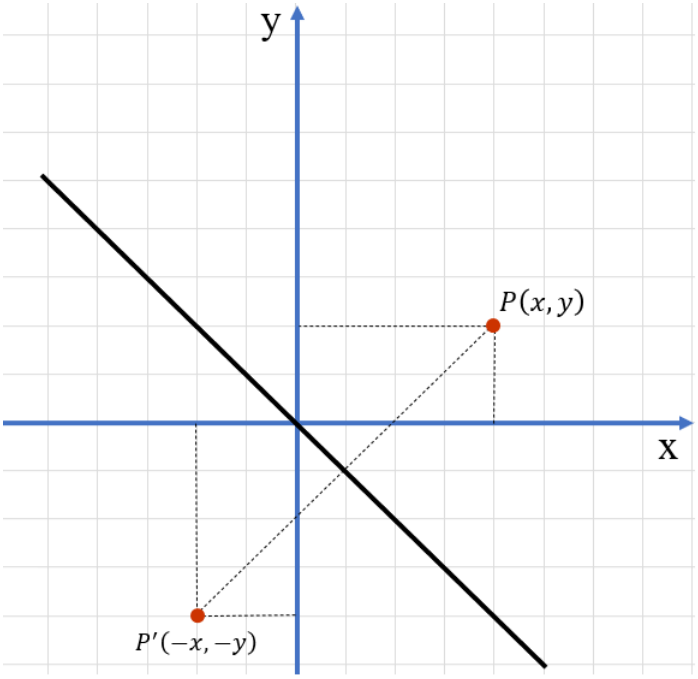
O simétrico de um ponto P(x, y), com x, y reais, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares (ou 1^a bissetriz) é o ponto P'(y, x).



- O simétrico de (7, -5) em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares é (-5, 7).
- O simétrico de (0, -6) em relação à 1^a bissetriz é (-6, 0).
- Qualquer que seja o k real, o simétrico de (k, 0) em relação à reta y=x é (0, k).

SIMETRIA EM RELAÇÃO À BISSETRIZ DOS QUADRANTES PARES (y=-x)

O simétrico de um ponto P(x, y), com x, y reais, em relação à bissetriz dos quadrantes pares (ou 1^a bissetriz) é o ponto P'(-y, -x).



- O simétrico de (7, -5) em relação à bissetriz dos quadrantes pares é (5, -7).
- O simétrico de (0, -6) em relação à 2^a bissetriz é (-6, 0).

- Qualquer que seja o k real, o simétrico de (k, 0) em relação à reta y=-x é (0, -k).

EXERCÍCIOS

1. Dados os pontos A(-4,-7), B(3,-1) e C(0,-5) responda com V ou F
   (a) O ponto (-7,-4) é o simétrico do ponto A em relação à bissetriz dos quadrantes pares.
   (b) O simétrico de C em relação à origem é igual ao seu simétrico em relação ao eixo das abscissas.
   (c) O ponto A e o ponto simétrico de B em relação ao eixo das ordenadas, estão localizados no terceiro quadrante.
   (d) O simétrico do ponto C em relação à 1ª bissetriz está localizado no eixo das abscissas.

RESPOSTAS

1. (a) F, pois o simétrico de A(4,7) em relação à bissetriz dos quadrantes pares é (7,4).
   (b) V
   (c) V
   (d) V, pois o simétrico do ponto C(0,-5) em relação à 1ª bissetriz é o pto (-5,0), que está sobre o eixo das abscissas.

3.6 PRODUTO CARTESIANO

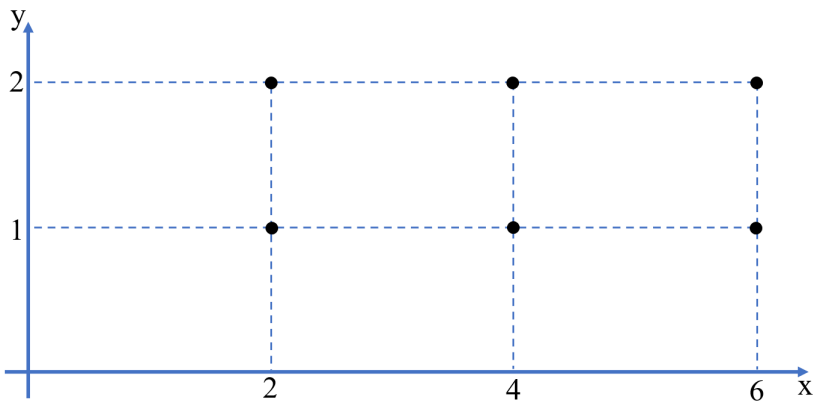
Dados dois conjuntos não-vazios A e B, denominamos de produto cartesiano de A por B, ou A "cartesiano" B, o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$. Simbolicamente: $\{(x,y); x \in A \text{ e } y \in B\}$

Observações:

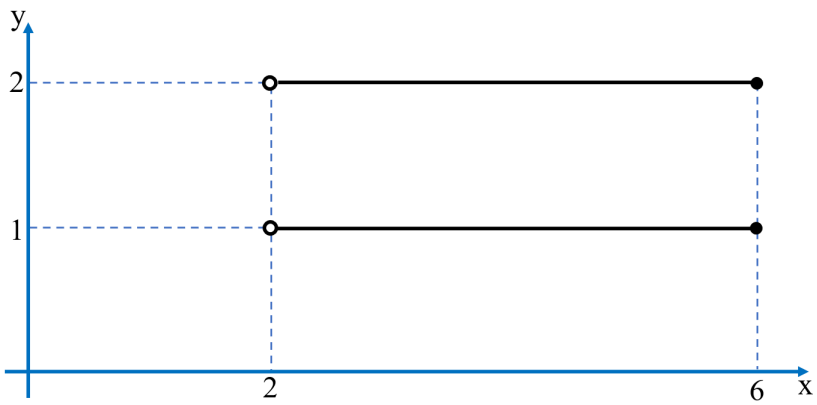
1. $A \times \varnothing = \varnothing$
2. n(A) = p e n(B) = q então n(A $\times$ B) = pq.
3. O produto cartesiano de um conjunto por ele próprio é dado por A $\times$ A = A^2.
4. O produto cartesiano não é comutativo, ou seja, $A \times B$ não é sempre igual a $B \times A$

   Exemplos de produto Cartesiano:

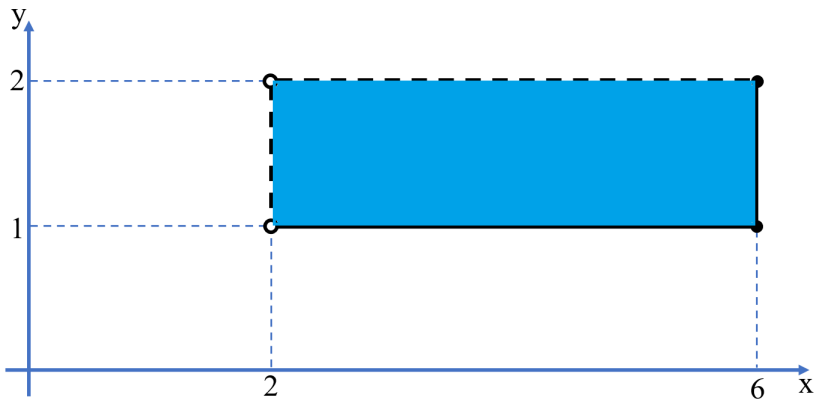
   (a) $\{2,4,6\} \times \{1,2\}$



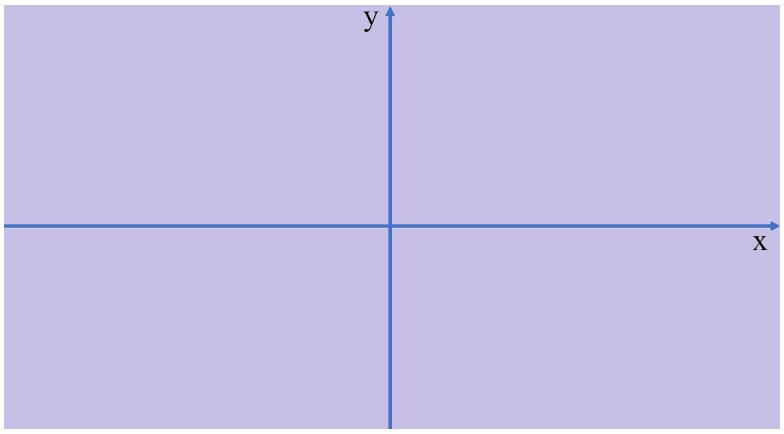
   (b) $]2,6] \times \{1,2\}$



(c) $]2,6] \times [1,2[$



(d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



EXERCÍCIOS

1. Desenhe e calcule a trajetória de um robô que se moveem linha reta pela trajetória ABCDEF. Considere A=(-1, 3), B=(-5, 0), C=(-5, -3), D=(0, -3), E=(8, -3),F=(0, 3).

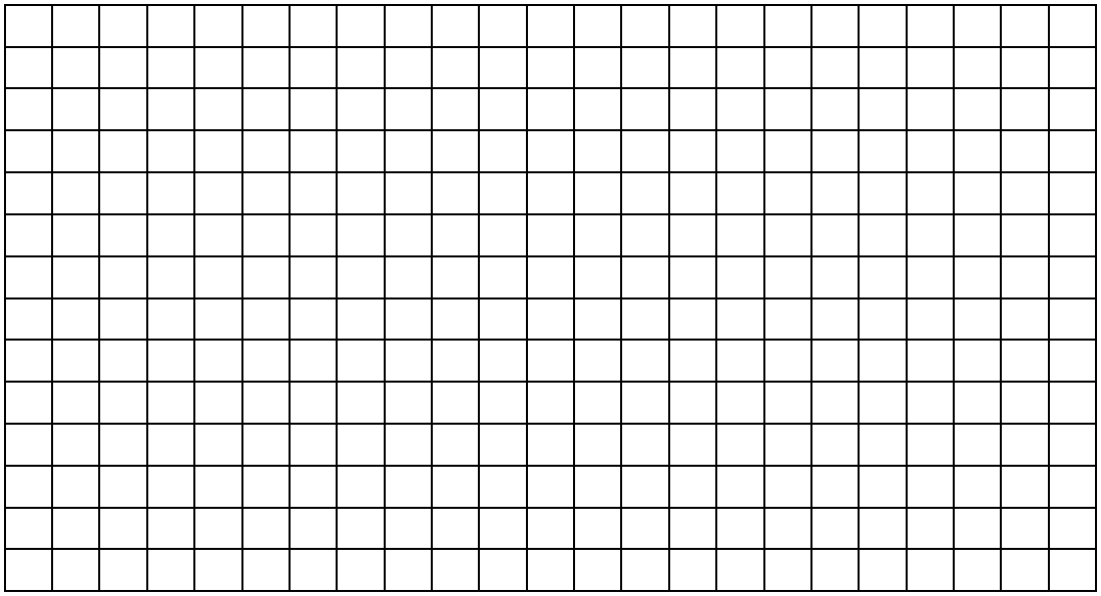
2. Dados os pontos A(-4,-7), B(3,-1) e C(0,-5) responda com V ou F.
   (a) Se invertermos a ordem dos pares ordenados do ponto B, encontraremos um ponto no II quadrante. ( )

(b) O ponto C está localizado sobre o eixo das abscissas ( )

(c) Se ligarmos o ponto A ao ponto B, teremos um segmento de reta de tamanho 9,2. ( )

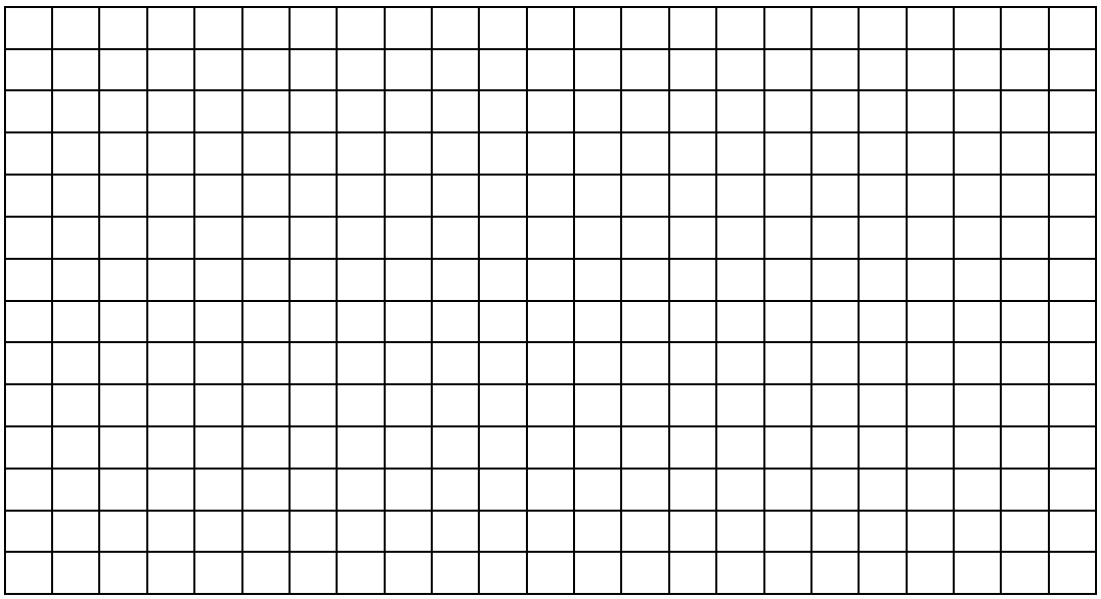
(d) O ponto A está localizado no III quadrante. ( )

(e) Se invertermos a ordem de C e ligarmos o ponto resultante ao próprio C teremos um segmento de reta de comprimento $5\sqrt{2}$ ( )



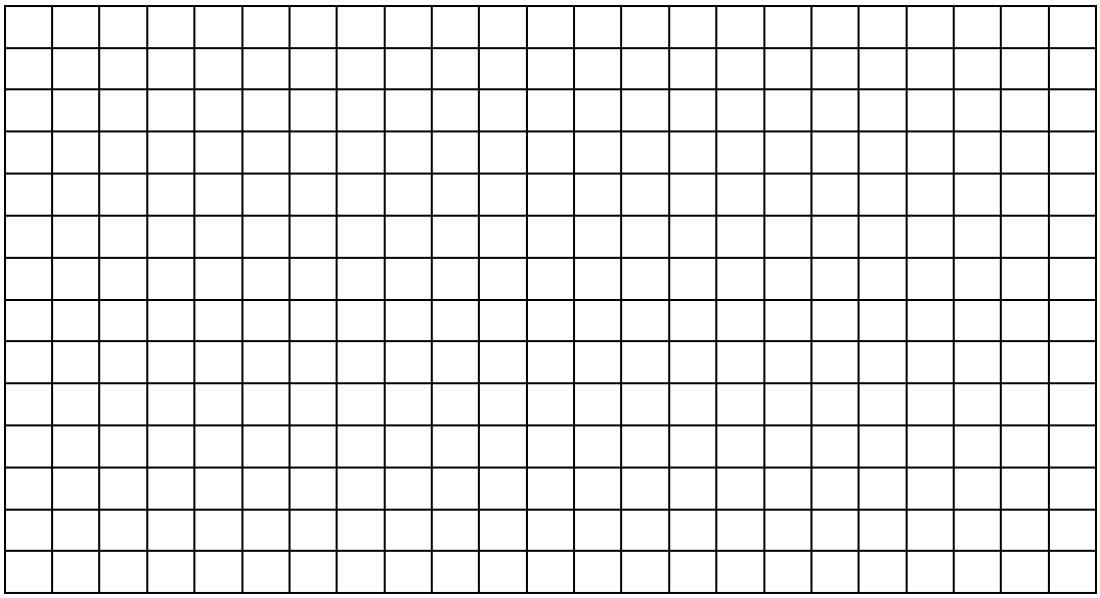
3. Um automóvel se desloca guiado por um GPS e percorre uma trajetória ABCDE, onde A é o pto simétrico de (5,6) em relação à 2ª bissetriz, B é o pto simétrico de (2,2) em relação ao eixo oy, C é o pto simétrico de (2,4) em relação à 1ª bissetriz, D é o pto simétrico de (-6,-7) em relação á origem e E é o pto simétrico de (6,8) em relação ao eixo das abscissas. Se cada quadrado da tela corresponde a 1 km,responda as questões abaixo:

   (a) o gráfico da trajetória percorridapelo automóvel usando o gráfico cartesiano abaixo.



   (b) quantos quilômetros ele percorreu na trajetória mencionada no início da questão?

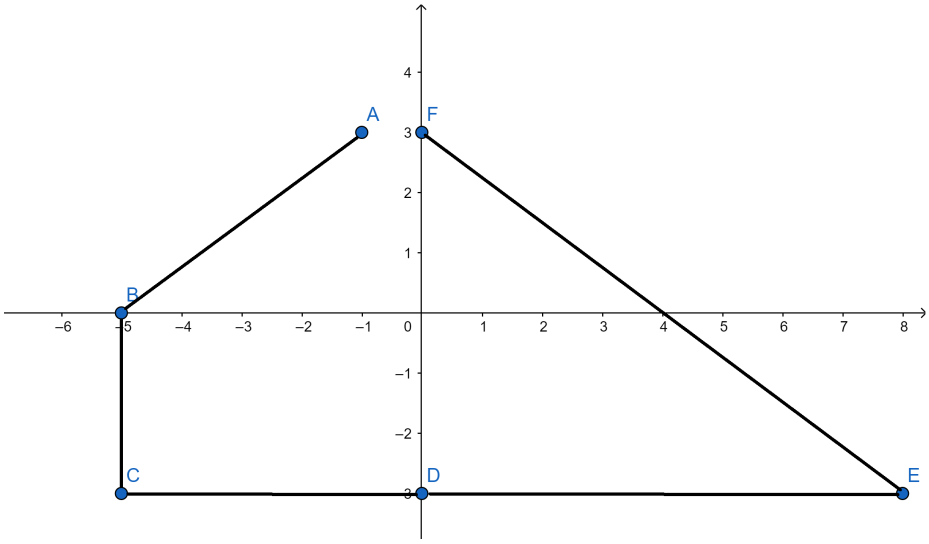
4. Um robô percorre um campo minado representado pelo plano cartesiano ortogonal. O robô segue a trajetória ABCD. O pto A é o simétrico de A'=(5;2) em relação ao eixo oy,o pto B é o simétrico de B'=(1; 6) em relação ao eixo ox, o pto C é o simétrico de C'=(-4, 6) em relação à origem, e o pto é D=(7, -3). As minas (bombas terrestres) estão nos pontos P=(6; -4) e Q =(-1,6). Determine:
   (a) O desenho da trajetória ABCD percorrida pelo robô e os pontos onde estão minas.



   (b) Determine quantos metros o robô percorre até tocar o ponto onde se encontra uma bomba sobre sua trajetória (e explodir!). Se ele não encontrar alguma mina, calcule até o final da trajetória. Considere um plano cartesiano onde uma unidade de medida corresponde a 1m.
5. Considere os pares ordenados A(-4;5) B(0;3) C(-1;3) D(-5;4) E(1;-3) F(-5;0). Marque V ou F:
   (a) O ponto B pertence ao eixo das ordenadas ( )
   (b) O ponto D pertence ao quarto quadrante ( )
   (c) C e E são simétricos em relação à origem ( )
   (d) O simétrico de A em relação à 2ª bissetriz é o ponto D ( )
   (e) O ponto F pertence ao eixo Ox ( )
   (f) (-1;3) e E são simétricos em relação à reta y = x ( )

RESPOSTAS

1. Tamanho da trajetória ABCDEF = 31



2. FVVV
3. b) $\sqrt{65}+\sqrt{29}+21 = 8,06+5,39+21 = 34,45$
4. $10+3+\sqrt{2} = 15,8$
5. V F V F V

4. FUNÇÕES: TEORIA GERAL

4.1 Relação Binária

Uma relação binária R de A em B, é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplo

Dados $A = \{1,2,3\}$, B=$\{2,3\}$, e $A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$, são relações binárias de A em B:

- $R_1 = \{(x,y)/y = x\}$ = $\{(2,2),(3,3)\}$
- $R_2 = \{(x,y)/x < y\}$ = $\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
- $R_3 = \{(x,y)/x = y+1\}$ = $\{(3,2)\}$
- $R_4 = \{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

4.2 Função

Sejam A e B conjuntos não-vazios e f uma relação de A em B.

Dizemos que f é uma função de A em B, se e somente se, cada elemento $x \in A$ está associado a um único elemento $y \in B$, ou seja,

$f : A \to B$ é uma função $\Leftrightarrow \forall x \in A; \exists! y \in B; (x,y) \in f$

Podemos dizer que existem duas condições para uma relação ser uma função:

1. Cada elemento do conjunto de partida está relacionado a apenas um elemento do conjunto de chegada
2. Todo elemento do conjunto de partida tem relação com algum elemento do conjunto de chegada

Exemplo

São funções as relações f e g.

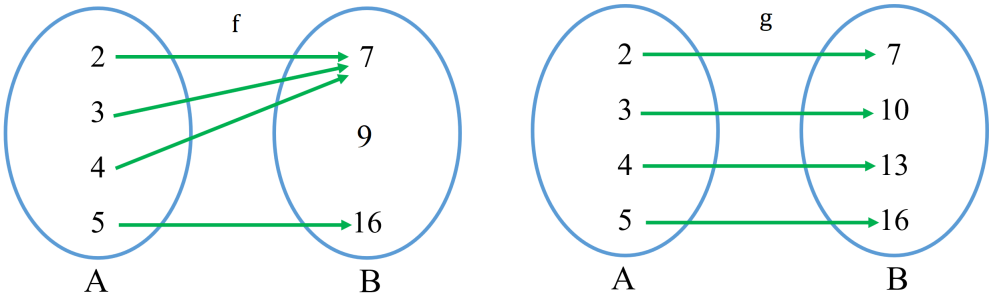
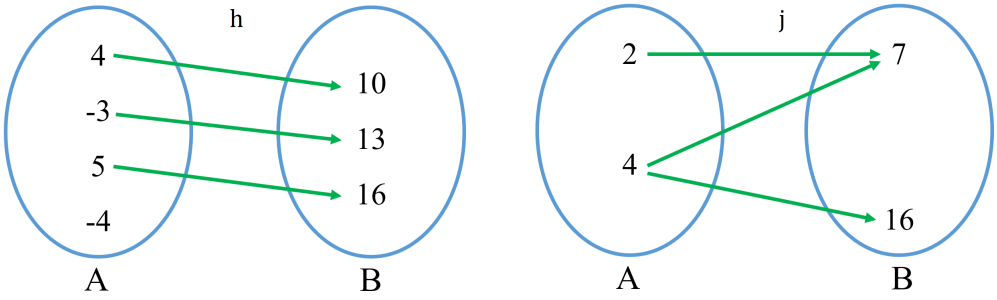


Figura 4.1: Exemplo de função

Não são funções as relações h e j.



- A relação h, não é função pois o elemento -4 não está relacionado com algum elemento do conjunto B.
- A relação j, não é função pois o elemento 4, está compartilhando dois itens de chegada no elemento B

h e j não são funções pois não obdece a relação de funções, ou seja, cada elemento do conjunto de partida tem que estar relacionado a apenas um elemento do conjunto de chegada. E todo elemento do conjunto de partida tem que ter uma relação com algum elemento do conjunto de chegada.

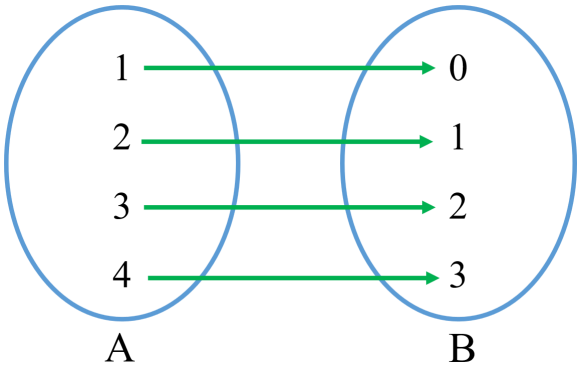
4.3 NOTAÇÕES DE UMA FUNÇÃO

As funções podem ser designadas de várias maneiras dentre as quais destacamos:

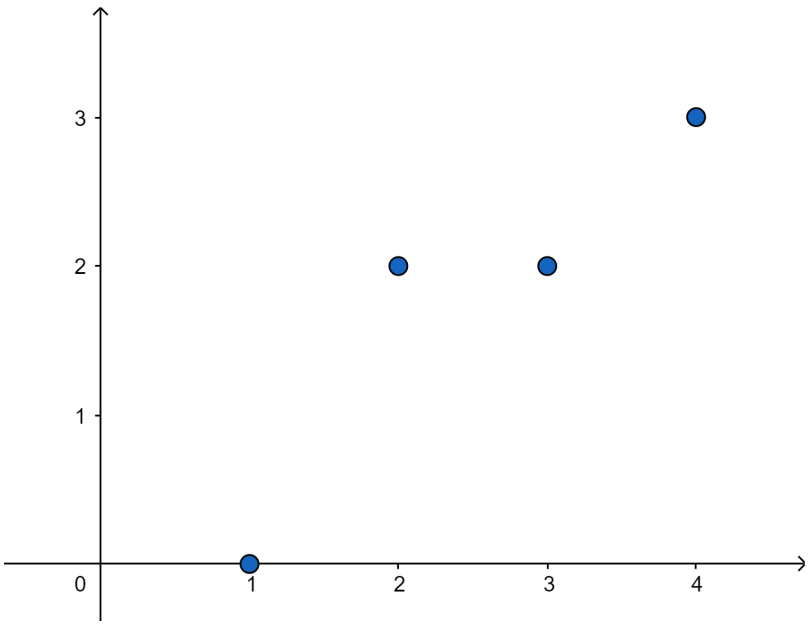
1. $f : A \to B$
   Ex: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
2. $f : A \to B$
   $x \to y = f(x)$
   Ex: $x \to y = x^2$
3. $f = (x,y) \in A \times B;\ y = f(x)$
   Ex: $f = (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = -3x + 1$

4.4 REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

1. As funções podem ser representadas de diversas formas:
   (a) Diagrama



(b) Plano Cartesiano



(c) Listagem de seus elmentos: $F = \{(1,0),(2,2),(3,2),(4,3)\}$

As funções também podem ser representadas através de uma lei matemática (fórmula).

Veja a seguir alguns gráficos e suas respectivas fórmulas.

1. $f(x) = -x^2 + 4$

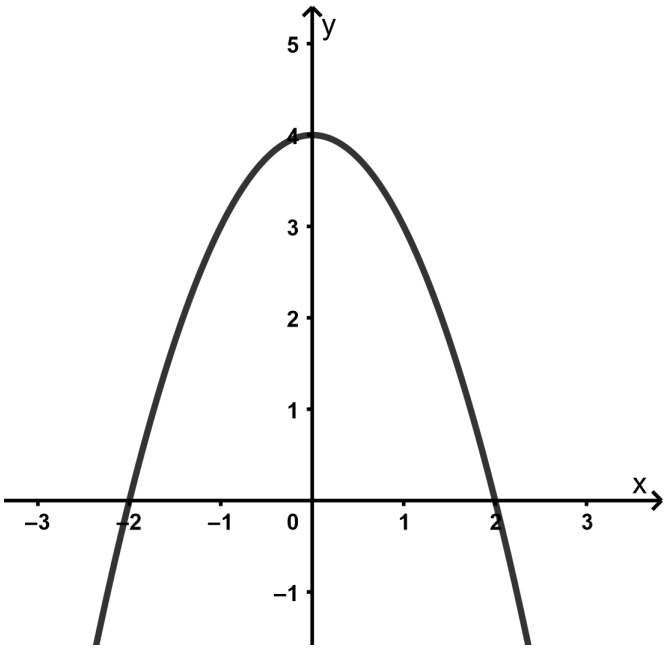


Figura 4.2: Função Quadrática

2. $f(x) = |x|$

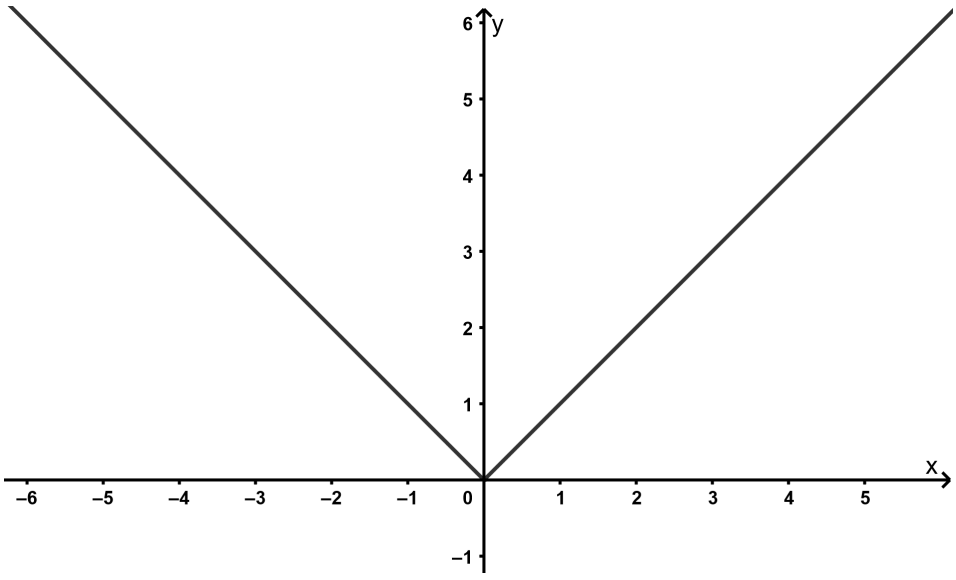


Figura 4.3: Função Modular

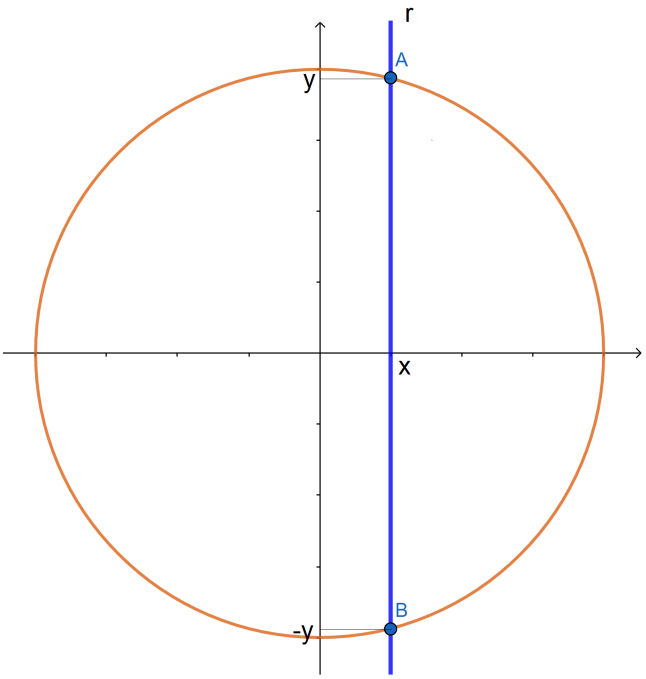
COMO IDENTIFICAR FUNÇÕES NO PLANO CARTESIANO

Basta desenharmos (ou imaginarmos) retas paralelas ao eixo oy passando pelo gráfico da relação binária.

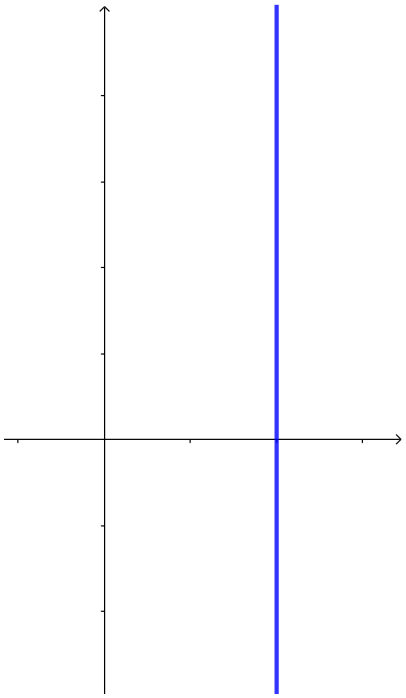
Se essa reta tocar em mais de um ponto o gráfico da relação binária, significa que esta não representa uma função.

As três relações binárias a seguir ilustram casos de relações binárias representadas no plano que não são funções.

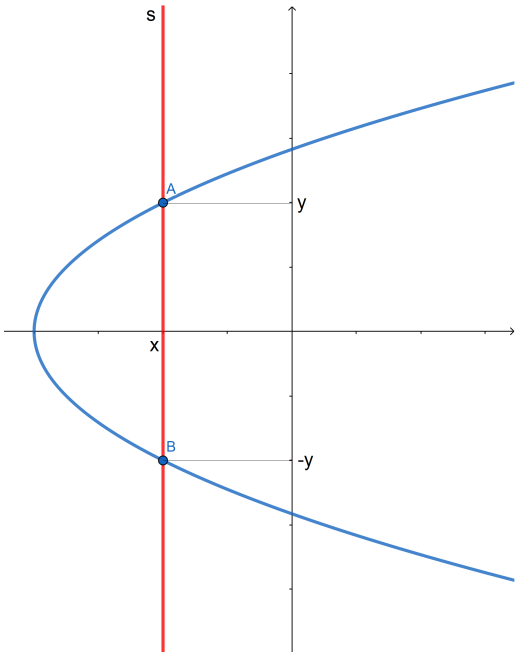
- Na relação binária R_1 podemos encontrar, pelo menos uma reta paralela à oy que toca o gráfico em mais de um ponto.
  A reta r toca a relação R_1 nos pontos A=(x, y) e B=(x, -y). Observe que nesses pontos o mesmo x está associado a dois valores distintos de y.
  Por esse motivo R_1 não é função.



- A reta paralela a oy que toca R_2, intercepta o gráfico em todos os pontos. Nesse caso os pontos possuem o mesmo valor de x. Assim temos vários pontos onde a mesma abscissa está associada a valores distintos de y.



- De modo semelhante a R_1, a relação R_3 também possui várias retas paralelas a oy que a interceptam em mais de um ponto, cujo exemplo é dado através da reta s.



CONJUNTO DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Seja f uma função $f : A \to B$.

O conjunto domínio de f (D(f)) é o conjunto de todos os elementos $x \in A$. Em uma função $f : A \to B$ o conjunto domínio é o próprio conjunto A.

O conjunto contradomínio de f (CD(f)) é o conjunto de todos os elementos $y \in B$. O contradomínio é o próprio conjunto B.

O conjunto imagem de f (Im(f)) é um subconjunto do contradomínio formado por todos os elementos de B ligados a algum elemento do conjunto A.

Dadas as funções f e g

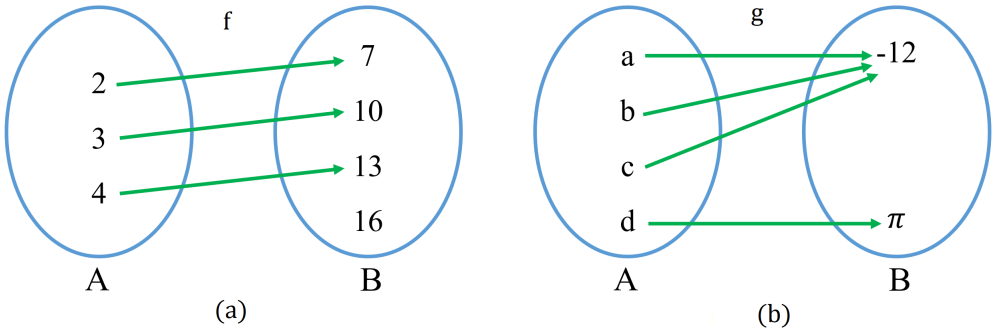


Figura 4.4

Observe nas funções da Figura 4.4 (a) que o domínio D(f)= $\{2,3,4\}$; o contradomínio é CD(f)= $\{7,10,13,16\}$ e o conjunto é imagem Im(f)= $\{7,10,13\}$

Na Figura 4.4 (b): D(g)= {a, b, c, d}; CD(g)= Im(g)= $\{-12,\pi\}$

VALOR NUMÉRICO DE UMA FUNÇÃO

O valor numérico de uma função é o valor da imagem associado a um determinado valor do domínio. Seja f(x) uma função $f : A \to B$. O valor numérico da função f para x = a é o valor da imagem b = f(a).

Exemplos

1. Dada a função $g(x) = x^2 - 7x$, determine.
   (a) f(-2)
   $f(-2) = (-2)\cdot 2 - 7\cdot(-2) = 4 + 14 = 18.$
   Resp. O valor numérico de f para x=-2 é 18.
   (b) O valor de x tal que f(x)=3, ou o valor de x tal que o valor numérico de f(x) é igual a três.
   $x^2 - 7x = 3 \Rightarrow x^2 - 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{2}$
   Resp: A função f tem valor numérico igual a 3 para os valores do domínio $x = \frac{7+\sqrt{61}}{2}$ ou $x = \frac{7-\sqrt{61}}{2}$

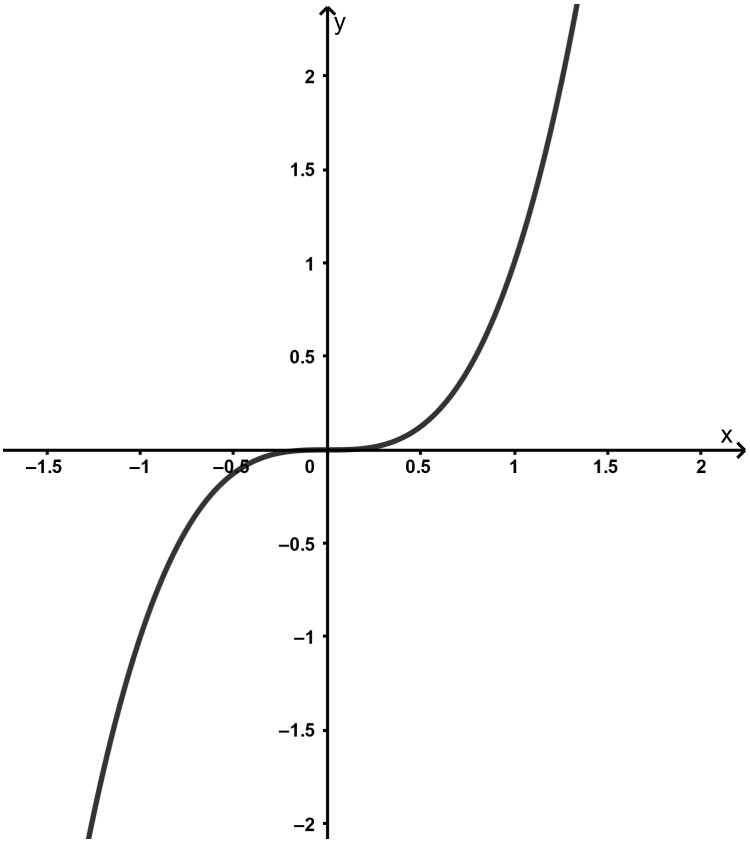
4.5 RAIZ DE UMA FUNÇÃO

A raiz ou zero de uma função f(x) é o conjunto de valores de x tal que o valor numérico de f(x) é zero, assim:

x é raiz de $f(x) \Rightarrow f(x) = 0$.

Graficamente as raízes de uma função representam os valores das abscissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo ox.

No exemplo gráfico a seguir as raízes da função são $x = -1, x = 0$e $x = 2,$pois $f(-1) = 0, f(0) =$ 0e $f(2) = 0$.



Exemplo

Seja $f(x) = mx^2 + nx + 1$, determine os valores de m e n sabendo que f(2) = 5 e que 1 é raiz de f(x).

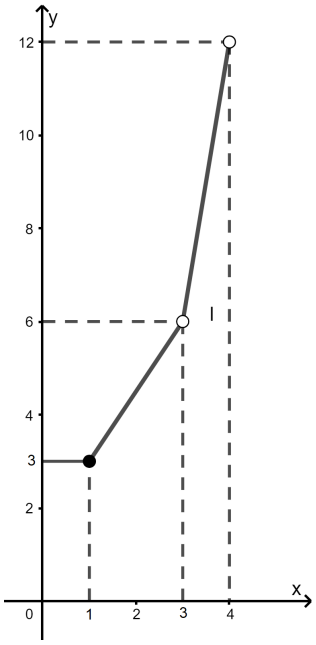
Resolução:

$f(2) = 5 \Rightarrow m \cdot 2^2 + n \cdot 2 + 1 = 5 \Rightarrow 4m + 2n + 1 = 5$ e

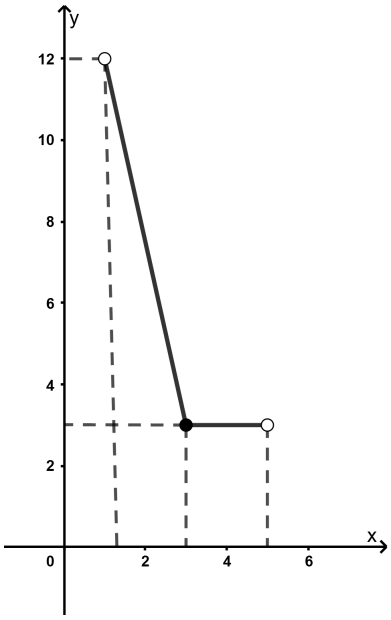
$f(1) = 0 \Rightarrow m \cdot 1^2 + n \cdot 1 + 1 = 0 \Rightarrow m + n + 1 = 0$. Daí temos o sistema: $\begin{cases} 4m + 2n + 1 = 5 \\ m + n + 1 = 0 \end{cases}$ cuja solução é m = 3 e n = -4.

EXERCÍCIOS

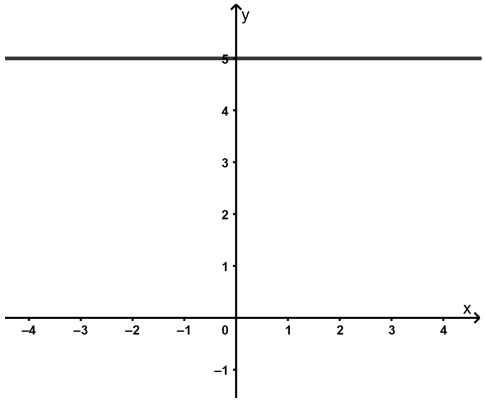
1. Determine o conjunto domínio, o contradomínio e a imagem das funções:



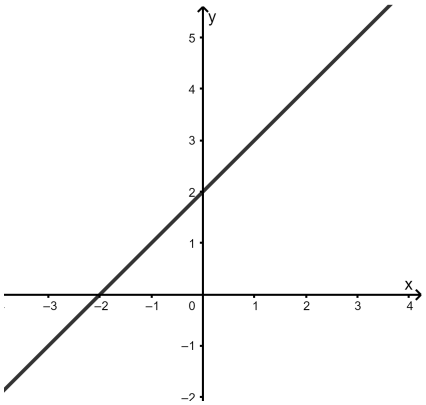
(a) $f : A \to R_+$



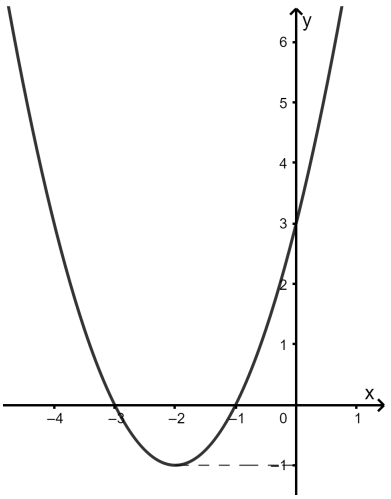
(b) $g : A \to R_+^*$



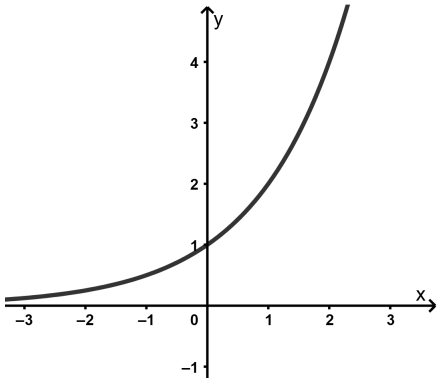
(c) $h : A \to R$



(d) $i : A \to R$

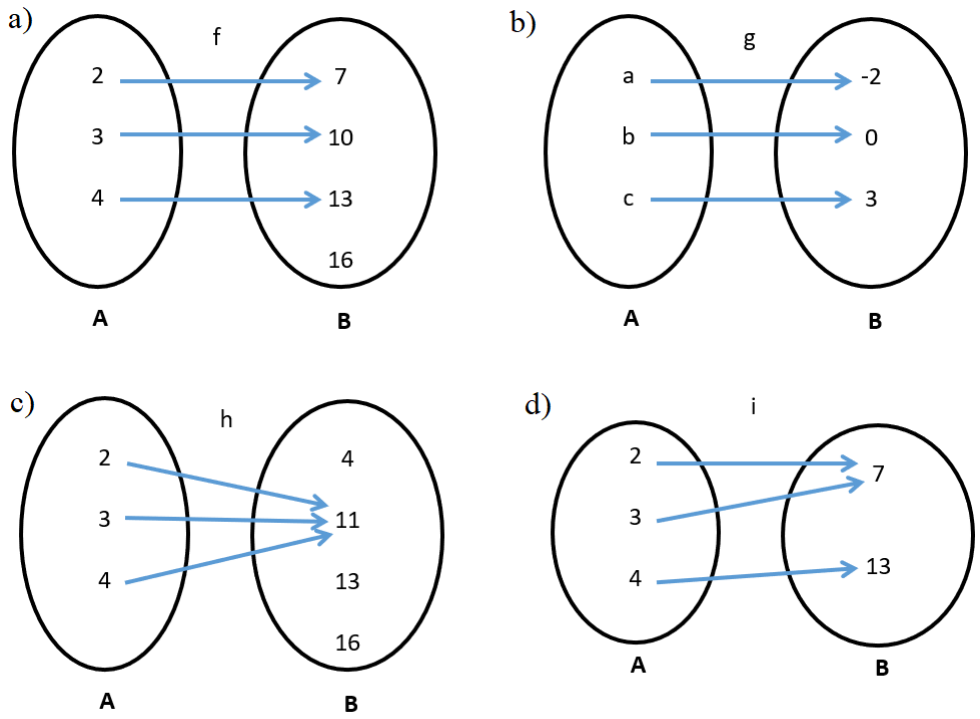


(e) $j : A \to [-5, +\infty[$

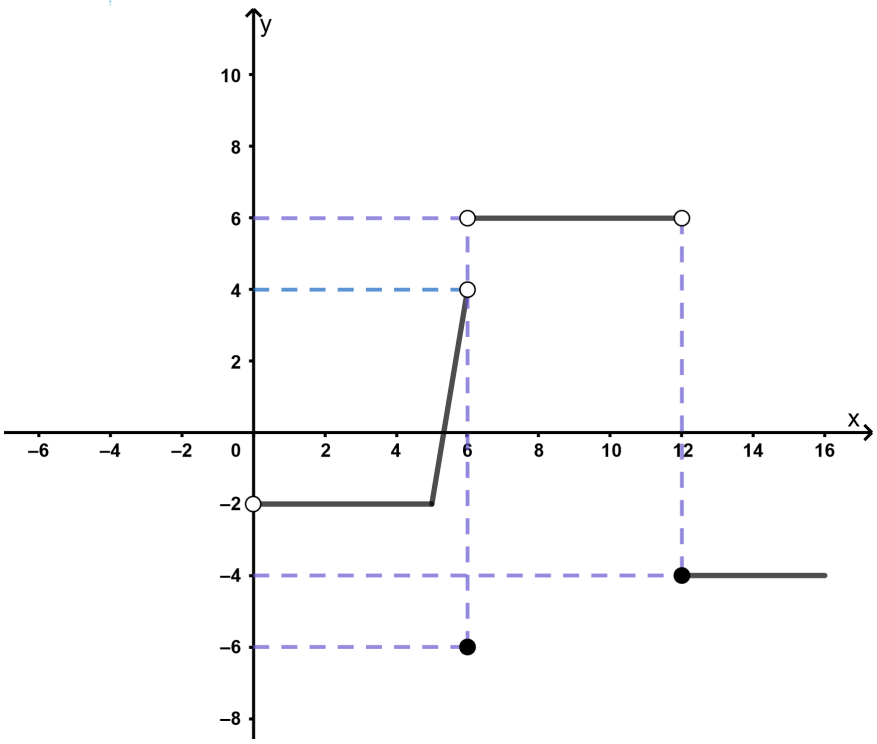


(f) $k : A \to \{y \in \mathbb{R} / y < 5\}$

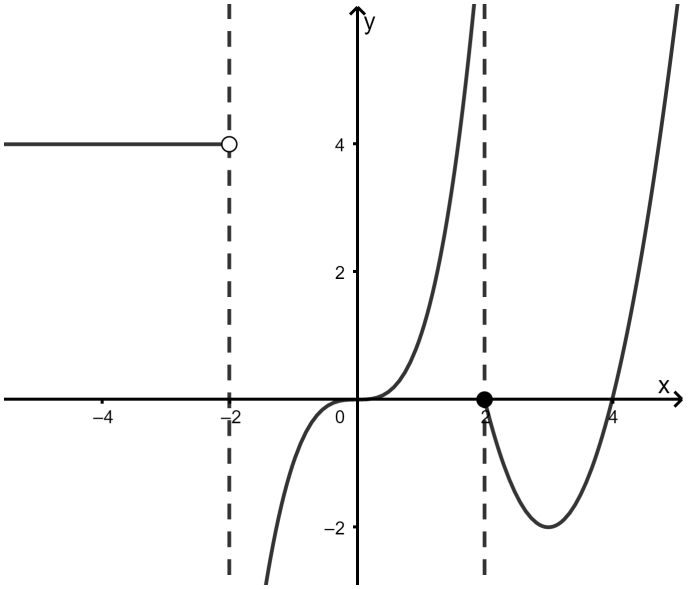
2. Determine o conjunto domínio, o contradomínio e a imagem das funções:



3. Determine o conjunto domínio e a imagem da função $f : A \to R$

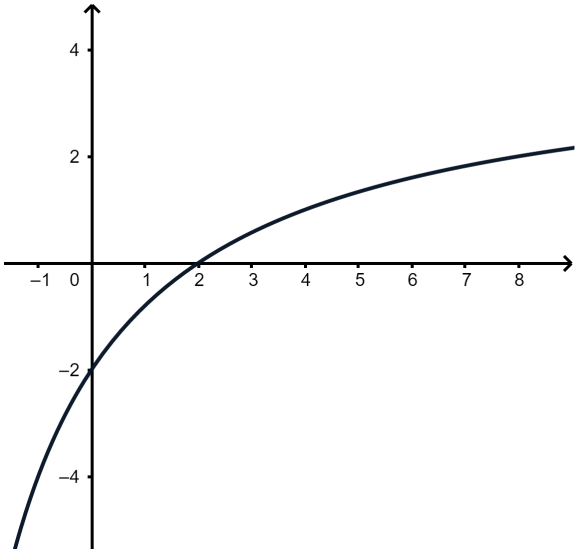


4. Determine o conjunto imagem da função $f : \{-2, 0, \sqrt{2}\} \to \mathbb{R}$, definida como por $g(x) = x^2 + 3$
5. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x + 1$, calcule: $\dfrac{f(-2) + 5f(\frac{1}{3})}{7f(0)}$
6. Seja a função $f(x) = x^2 - 3x$. Determine os valores de x para que f(x) = 4
7. Faça a análise do gráfico abaixo e determine:



(a) Dom(f) =
(b) Img(f) =
(c) $\dfrac{3.f(0)+f(3)}{7.f(\pi)}$
(d) $f(x)=0$ para x =
(e) $f(x)<0$ para x =

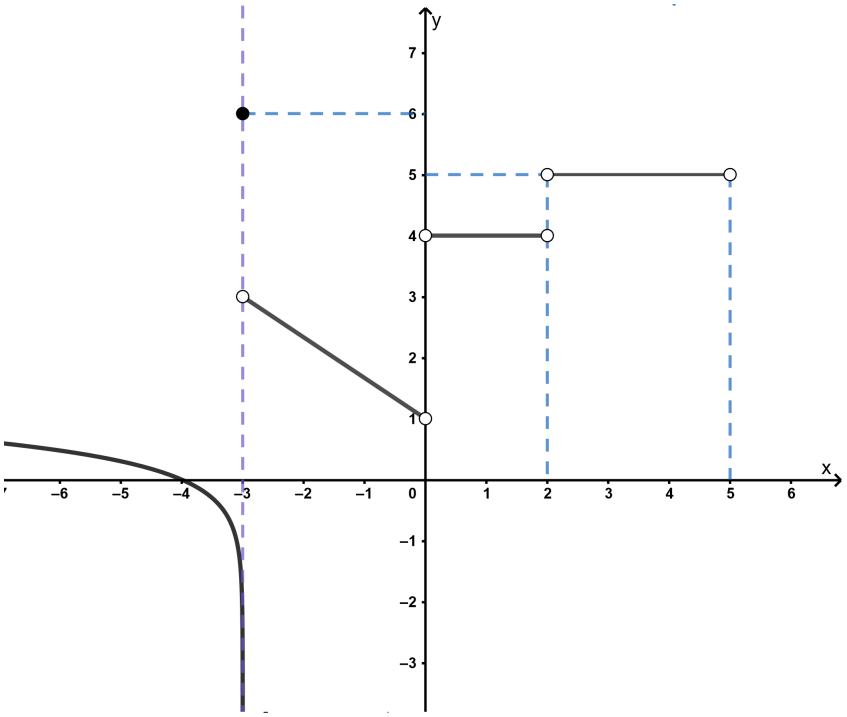
8. O gráfico abaixo representa a função $f(x)=\dfrac{ax-16}{bx+c}$. Sabendo que $f(1)=-\frac{4}{5}$, calcule $a\cdot b^{\frac{4}{c}}$ e escolha, dentre as alternativas seguintes, a resoposta correta:



Escolha, dentre as alternativas seguintes, a resoposta correta:

(a) 4
(b) $-1/5$
(c) 0
(d) $1/9$

9. Dada a função f(x)=ax+b, calcule a e b sabendo que f(1)= -1 e f(4)=5
10. Determine o domínio e a imagem da função abaixo



(a) Conjunto domínio:

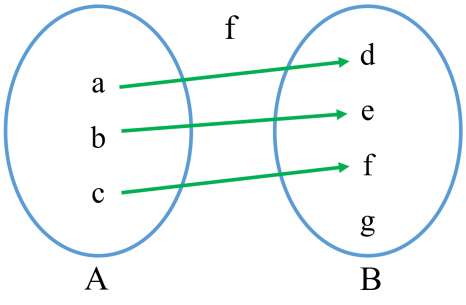
(b) Conjunto imagem:

Respostas

1. (a) $D(f) = [1,5[-\{3\}; CD(f) = \mathbb{R}_+; IM(f) = [2,\ 7[$
   (b) $D(g) =]1,\ 8[; CD(f) = \mathbb{R}_+^*; IM(g) = [2,\ 8[$
   (c) $D(g) = \mathbb{R}; CD(g) = \mathbb{R}; IM(g) = \{5\}$
   (d) $D(g) = \mathbb{R}; CD(g) = \mathbb{R}; IM(g) = \mathbb{R}$
   (e) $D(g) = \mathbb{R}; CD(g) = [-5,\ +\infty[; IM(g) =]-1,\ +\infty[$
   (f) $D(g) = \mathbb{R}; CD(g) =]-\infty,\ 5[; IM(g) =]-\infty,\ 3[$
2. (a) $D(f) = \{2,3,4\}; CD(f) = \{7,10,13,16\}; IM(f) = \{7,10,13\}$
   (b) $D(g) = \{a,b,c\}; CD(g) = Im(g) = \{-2,0,3\};$
   (c) $D(h) = \{2,3,4\}; CD(h) = \{4,11,13,16\}; IM(h) = \{11\}$
   (d) $D(h) = \{2,3,4\}; CD(h) = \{7,13\}; IM(h) = \{7,13\}$
3. $D(f) =]0,\ +\infty[; IM(f) = \{-6,\ -4,\ 6\} \cup [-2,\ 4[$
4. $\{3,5,7\}$
5. 1
6. $\{-1,4\}$
7. a) Dom = $\mathbb{R} - \{-2\}$ b)Im = $\mathbb{R}$ c) d)x=0, x=2 ou x=4 e) -2<x<0 ou 2<x<4
8. d
9. a=2 e b=-3
10. Dom = $\mathbb{R} - \{0,2\}$ e Im = $]-\infty,0[\cup]1;3[\cup\{4,5,6\}$

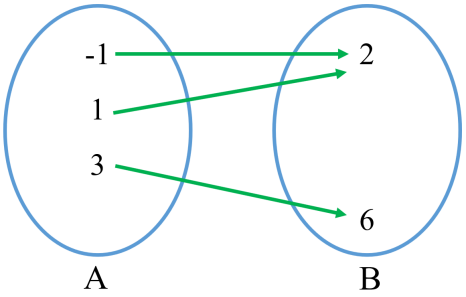
4.6 FUNÇÃO INJETORA (OU INJETIVA)

Uma função $f : A \to B$ é injetora se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_{11}) \neq f(x_2)$.



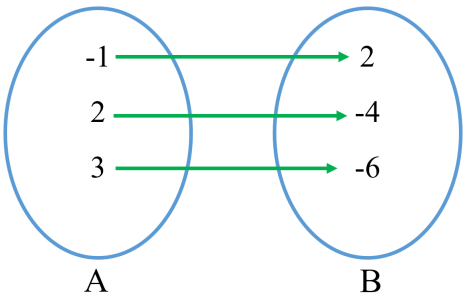
4.7 FUNÇÃO SOBREJETORA (OU SOBREJETIVA)

Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, e somente se, para todo $y \in B$, existe um $x \in A$ tal que f(x)=y.



4.8 FUNÇÃO BIJETORA (OU BIJETIVA)

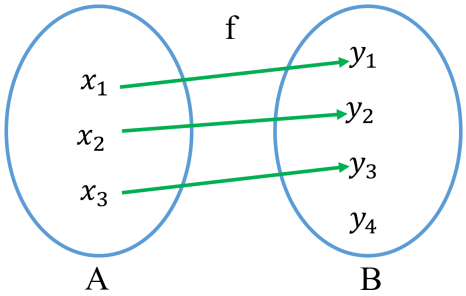
Uma função $f : A \to B$ é bijetora se, e somente se, é injetora e sobrejetora.



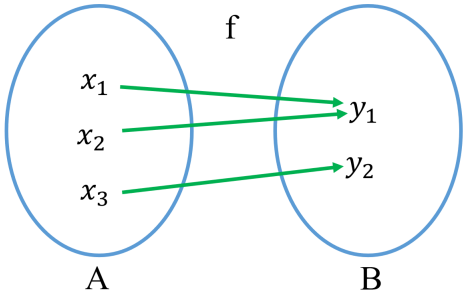
EXERCÍCIO

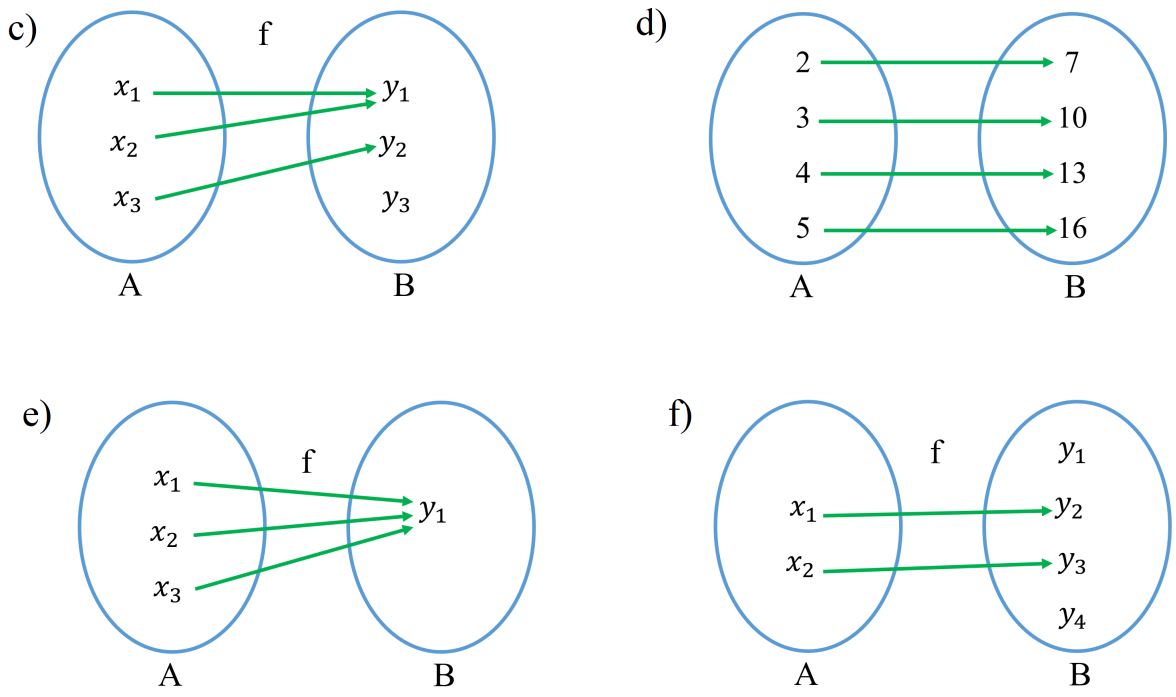
Classifique as funções a seguir como INJETORA, SOBREJETORA OU BIJETORA.

a)



b)



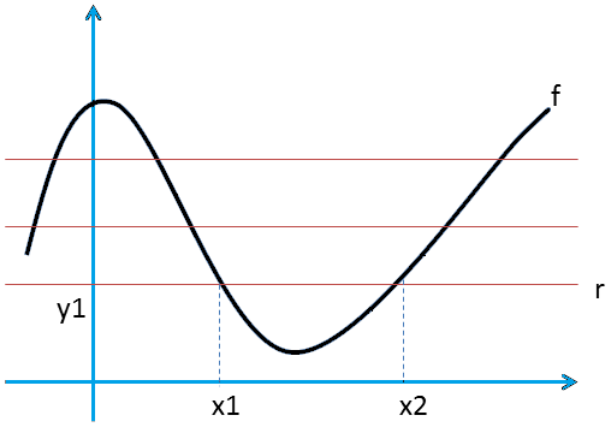


4.9 IDENTIFICANDO FUNÇÕES INJETORAS, SOBREJETORAS E BIJETORAS NO PLANO CARTESIANO

1. Função injetora: Traçam-se retas paralelas ao eixo ox, de modo que passem nos pontos da função f. Se, pelo menos uma das retas, tocar o gráfico de f em mais de um ponto, essa função não é injetora.

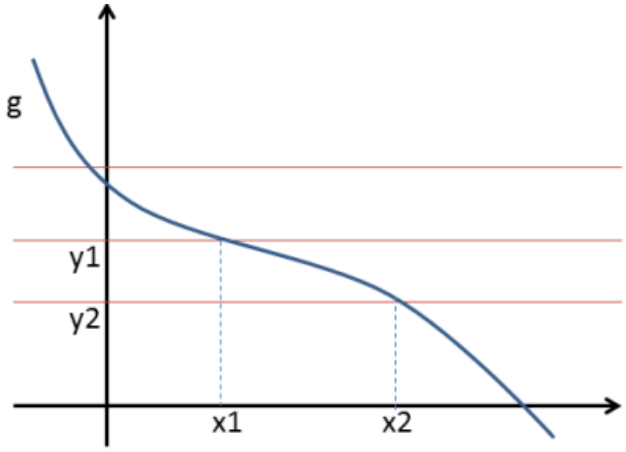
   Exemplos:

   (a) A função f da figura abaixo não é injetora. Observe que a reta r toca o gráfico em, pelo menos, dois pontos. Note também que na reta r, para $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, o que não satisfaz à definição de função injetora.



   (b) A função g é injetora pois qualquer reta r // ox toca o gráfico em apenas um único ponto.

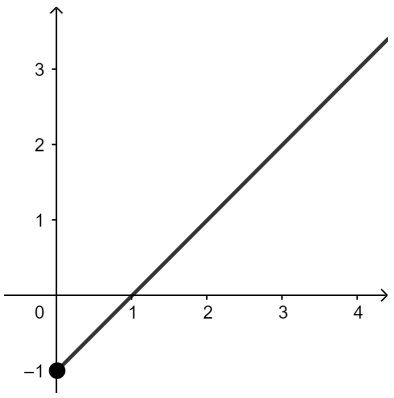
   (c) Se a reta r tocar em mais de um ponto, significa que não foi satisfeita a definição de função injetora ($\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$).



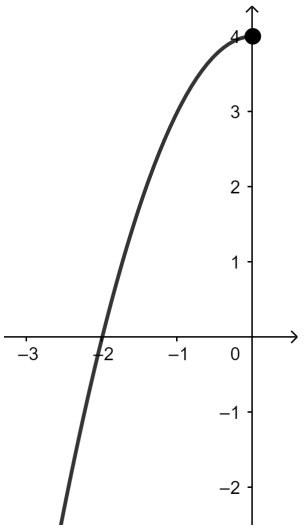
2. Função sobrejetora: determine o conjunto imagem (Im(f)) fazendo e depois compare com o contradomínio (CD). Se Im(f) = CD a função é sobrejetora.
3. Função Bijetora: observe se satisfaz às condições 1 e 2

Exemplos: Faça o teste das retas paralelas ao eixo ox, e verifique se CD=Im para classificar as funções como injetora, sobrejetora ou bijetora.

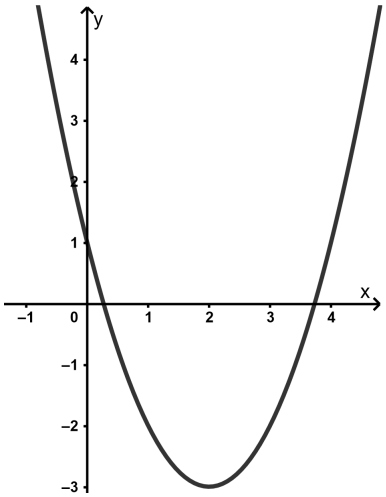
(a) A finção $f : [0, +\infty[\rightarrow [-\infty, +\infty[$ é injetora, pois passando retas paralelas a ox, estas interceptam o gráfico da função em apenas um ponto.
A função f não é sobrejetora, pois $Im \neq CD$ (note que Im = $[-1, +\infty[$ e CD=$]-\infty, +\infty[$).



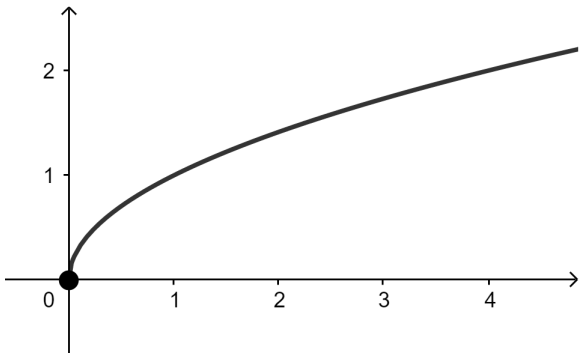
(b) $f :]-\infty, 0] \rightarrow]-\infty, 4]$ é injetora e sobrejetora, logo, a função f é bijetora.



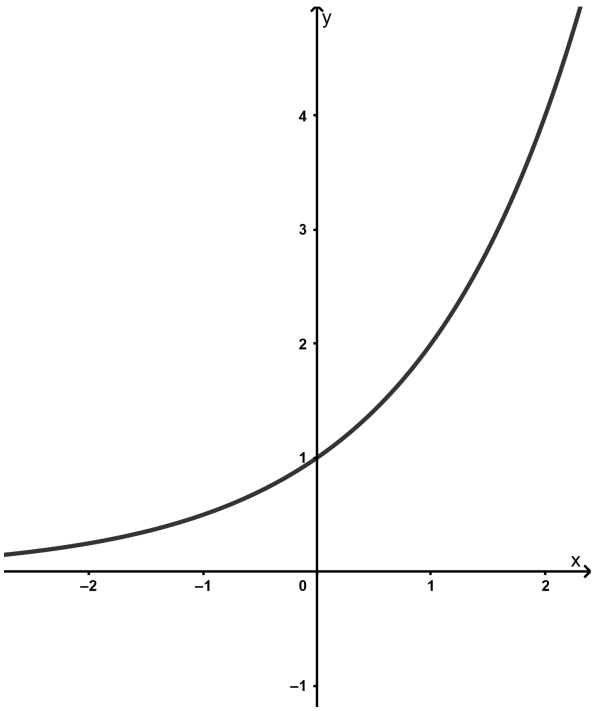
(c) A função $f : [-3, +\infty[$ é sobrejetora, pois Im(f) = CD = $[-1, +\infty[$. Essa função não é injetora.



(d) A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetora ($Im(f) =]-\infty, 1]eCD = R$), nem injetora (não passa no teste das retas paralelas a ox).

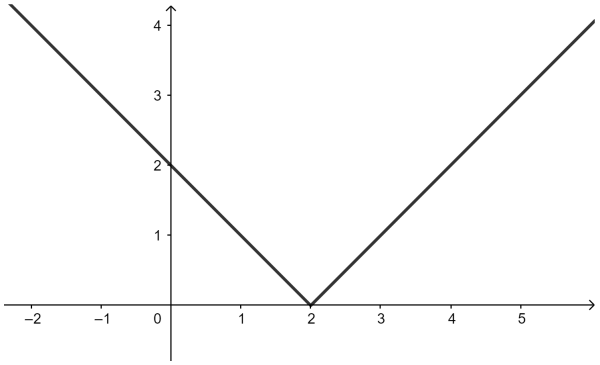


(e) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é bijetora, pois satisfaz ao critério das retas paralelas (critério 1). Pelo critério 2, o CD(f) = $R - \{0\}$ = Im(f), de onde se conclui que f é sobrejetora. Como os critérios 1 e 2 são satisfeitos, podemos afirmar que f é bijetora

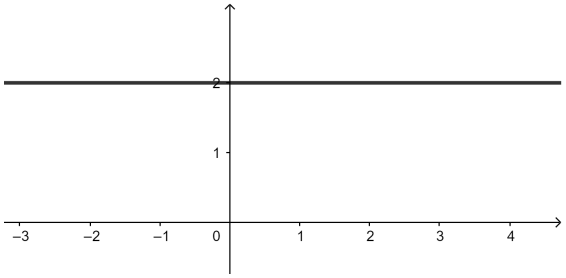


EXERCÍCIO

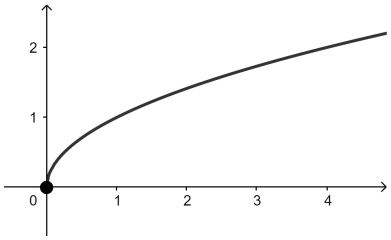
1. Classifique as Funções a seguir como Injetora, Sobrejetora ou Bijetora
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



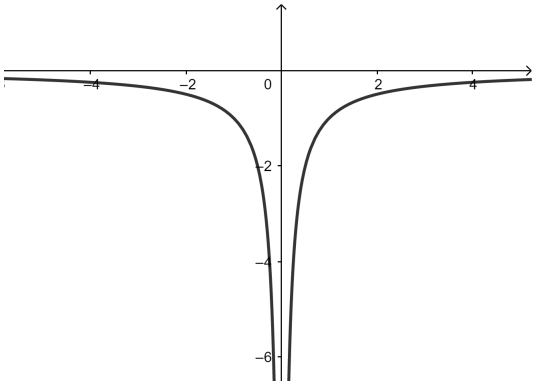
(b) $f : \mathbb{R} \to \{2\}$



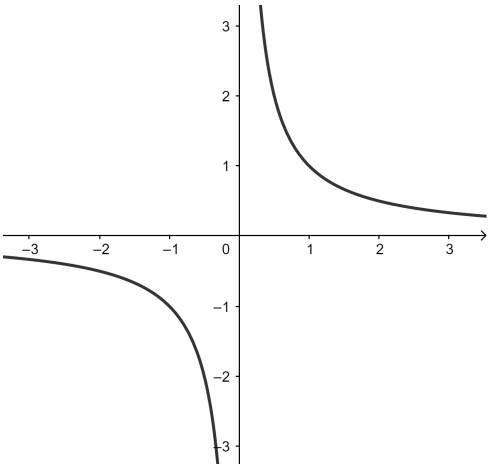
(c) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$



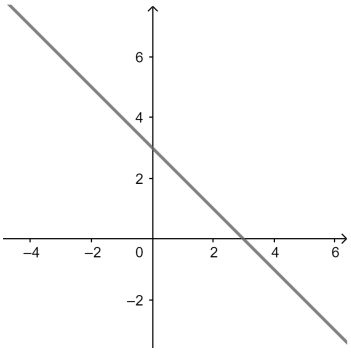
(d) $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 0[$



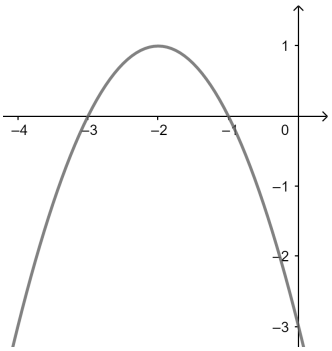
(e) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$



(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(g) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to]-\infty, 2]$

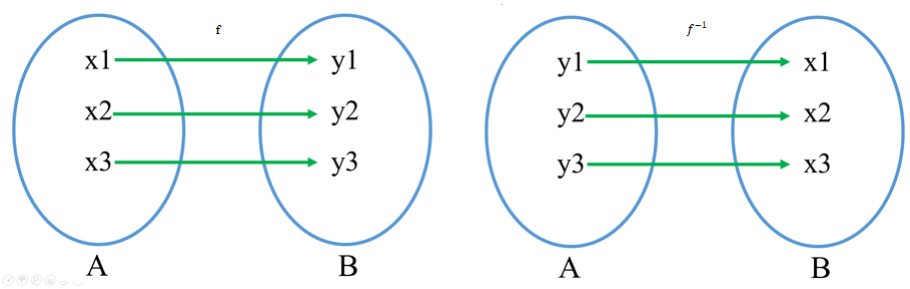


Respostas

a) Nem injetora, nem sobrejetora; b) sobrejetora; c) Injetora e sobrejetora, portanto, Bijetora; d) Sobrejetora; e) injetora; f) injetora; g) sobrejetora

4.10 FUNÇÃO INVERSA

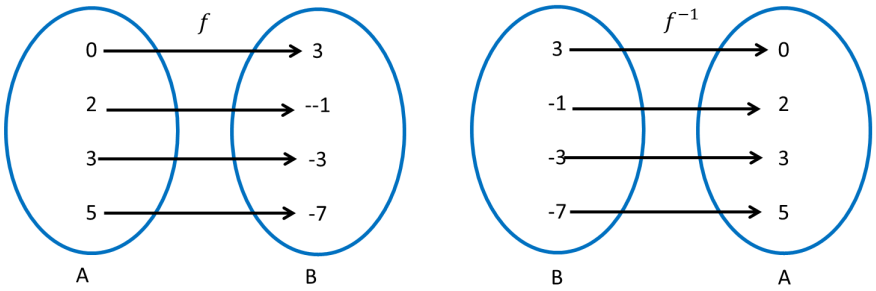
Definição: Seja $f : A \to B$ uma funçao bijetora, a função inversa de f é uma função de B em A designada por $f^{-1} : B \to A$.



O domínio de uma função inversa f^{-1} é a imagem da função $f : D(f) = Im(f^{-1})$ A imagem de uma função inversa f^{-1} é o domínio da função $f : Im(f) = D(f^{-1})$

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{0,2,3,5\}$ e $B = \{-7,-3,-1,3\}$. Consideramos a função $f : A \to B$ definida por f(x) = -2x + 3 A função f é formada pelo conjunto de pontos $\{(3,0),(2,-1),(3,-3),(5,-7)\}$, logo é uma função bijetora. A sua respectiva função inversa é $f^{-1} = \{(3,0),(-1,2),(-3,3),(-7,5)\}$



DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO INVERSA A PARTIR DA LEI DE FORMAÇÃO

Para obter a função inversa de $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$

1. Troque x por y e y por x: $x = \dfrac{2y+3}{y-1}$

2. Escreva a nova expressão isolando o y
   $(y-1)x = 2y+3 \to yx - x = 2y+3 \to yx - 2y = x+3 \to y(x-2) - x + 3 \to y = \dfrac{x+3}{x-2}$

   Resposta: A inversa de y é:
   $y^{-1} = \dfrac{x+3}{x-2}$

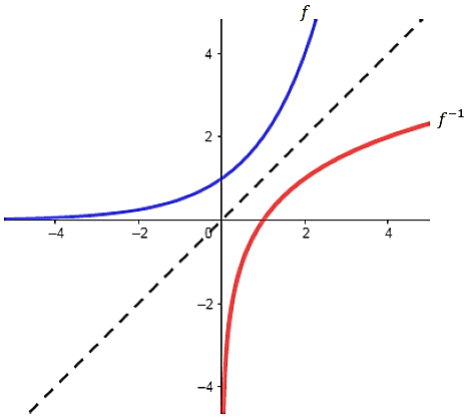
   ou ainda
   $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$ onde $D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$

Gráfico de f e f^{-1}

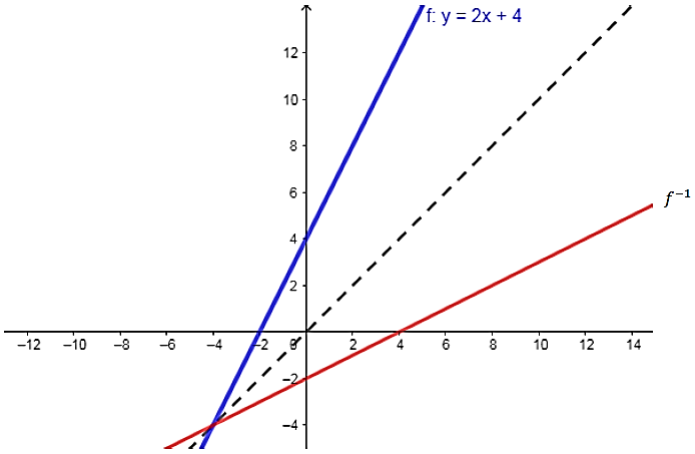
Seja f uma função e f^{-1} a sua inversa. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à 1º bisetriz (reta y = x)

Exemplo

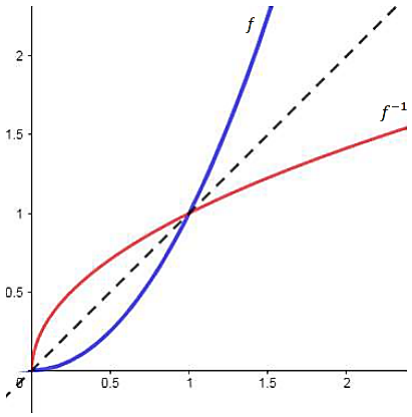
1. $f(x)$ e $f^{-1}(x)$



2. $f(x) = 2x+4$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2}$



3. $f(x) = x^2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



EXERCÍCIOS

1. Construa no mesmo gráfico cartesiano os gráficos de f(x), da sua inversa $f^-1(x)$ e da 1ª bissetriz (esta última em linha pontilhada).

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f(x)=2x-3
(b) $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ $f(x)=x^2$
(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ f(x)= 2x

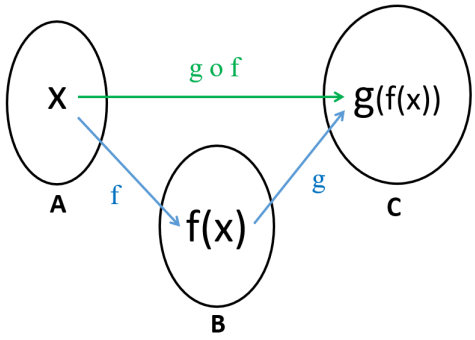
2. Determine a função f^{-1} inversa de:
   (a) f(x)= 3x+7
   (b) $\frac{5x-3}{4+2x}$
   (c) $f(x)=(x-7)^5-6$
   (d) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$
3. Seja $f:\mathbb{R}--2\to\mathbb{R}-4$ definida por: $f(x)=\dfrac{4x-3}{x+2}$. Qual o valor do domínio de f^{-1} com imagem 5?
4. Se f é uma função definida por $f(x)=2x-1$, então $f^{-1}(-1)$ é:
   (a) -3
   (b) -1
   (c) 0
   (d) 1
   (e) 3
5. Na função $f(x)=\dfrac{mx+1}{x+n}$ tem-se $f(-2)=-1$ e $f^{-1}(3)=2$, calcule o valor de m + n.
6. Dada a função $f(x)=\dfrac{3x+2a}{x+3}$ com $x\neq 3$. determine $a\in\mathbb{R}$, de modo que $f^{-1}(2)=-6$.
7. Dada a função real $f(x)=\dfrac{5-2x}{x+1}$ Determine o conjunto imagem de f(x).

Respostas

1. (a) $f(x)^{-1}=\dfrac{x-7}{3}$
   (b) $f(x)^{-1}=\dfrac{-4x-3}{2x-5}$
   (c) $f(x)^{-1}=\sqrt[5]{x+6}+7$
   (d) $f(x)^{-1}=\sqrt[3]{-x^3+1}$
2. c)
3. $\dfrac{17}{7}$
4. -5
5. a = 6
6. $\mathbb{R}-\{-2\}$

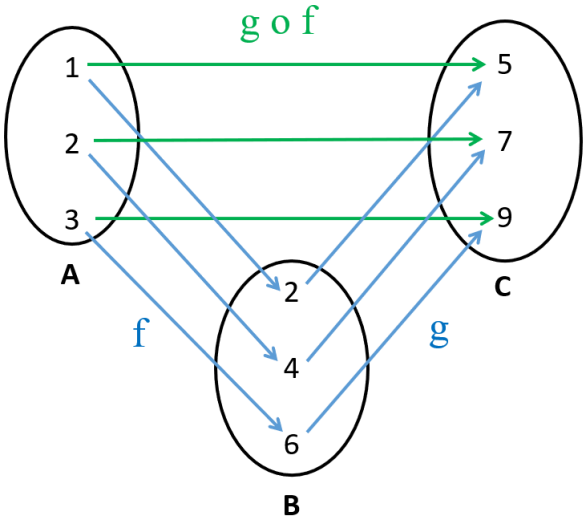
4.11 Função Composta

Sejam $f:A\mapsto B$, e $g:B\mapsto C$, onde $y=f(x)$ e $z=g(x)$.
A função g composta com f é a função $gof:A\mapsto C$, tal que $(gof)(x)=z$



Exemplo

Sejam $f : A \mapsto B$, e $g : B \mapsto C$, funções definidas por $f(x) = 2x$ e $g(x) = x+3$, a função composta com f é a função designada por gof e definida por $(gof)(x) = 2x+3$



A função composta g o f tem como elementos $\{(1,5),(2,7),(3,9)\}$, o domínio $\{1,2,3\}$ e a imagem $\{5,7,9\}$

Exemplo

Sendo $f(x) = 4x+3$ e $f(g(x)) = 5x-1$, determine x tal que $g(f(x)) = 7$.

RESPOSTA

- Cálculo de g(x):
  Substituindo $g(x)$ no domínio de $f(x) = 4x+3$, temos $f(g(x)) = 4g(x)+3$.
  Conhecendo-se que $f(g(x)) = 5x-1$, temos $4g(x)+3 = 5x-1$.
  Daí $4g(x) = 5x-4 \rightarrow g(x) = \dfrac{5x-4}{4}$
- Cálculo de $g(f(x))$:
  $g(f(x)) = \dfrac{5f(x)-4}{4} \rightarrow g(f(x)) = \dfrac{5(4x+3)-4}{4}$
  Assim: $g(f(x)) = \dfrac{20x+11}{4}$

- Cálculo de x tal que $g(f(x)) = 7$:

  Fazendo $g(f(x)) = 7$, temos: $\dfrac{20x+11}{5} = 7$

  Daí $20x + 11 = 28 \rightarrow x = \dfrac{17}{20}$

EXERCICIOS

1. Sendo $f : R \mapsto R$ com f(x)=2x+1 e $g(x) = x^2 + 3x$, calcule:
   (a) fog
   (b) gof
   (c) fof
   (d) gog
2. Sejam as funções reais $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - x$ e $h(x) = 3x + 2$. Obtenha (h o g) o f
3. São dadas as funções f(x) = 2x - 1 e g(x) = 3x + k, onde $k \in R$. Se f(g(-1))=5, o valor de k é:
   (a) -4
   (b) -1
   (c) 3
   (d) 4
   (e) 6
4. Se f(g(x)) = 5x - 2 e f(x) = 5x + 4, então o valor de g(x) é igual a:
   (a) x - 2
   (b) x - 6
   (c) $\dfrac{x-6}{5}$
   (d) 5x + 2
   (e) 5x - 2
5. Se f(x-5)=3x+1, calcule: a) f(x) b) f(3)
6. (UFBA) Sabendo-se que f(g(x)) = $x^3 + 1$ e $f^-1(x) = \dfrac{(x-1)}{3}$, determine g(6).
7. Dada a função f e g, determine a função inversa de g o f (x), onde:
   (a) $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2 - 1$ e $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [2, +\infty[$, $g(x) = \sqrt{x+4}$
8. Sejam g(x)=2x-3 e (f o g) $f(x) = \dfrac{2x+7}{x+1}$, determine a lei que define a função f.
9. Sabendo que uma função f é tal que f(3x+4)=15x+1, calcule:
   (a) f(x)
   (b) f(1)
   (c) f(f(5))
10. Dadas as funções: $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ e $g(x) = 3 - 2x$, calcular $(g^{-1}of)(x)$.
11. Dadas as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ determine a lei que define $(fog^{-1})(x)$.

Respostas

1. a) $2x^2 + 6x + 1$ b) $4x^2 + 10x + 4$ c) $4x + 3$ d) $4x^2 + 10x + 4$
2. $12x^2 + 6x + 2$
3. e)
4. c)

5. a) $3x+16$ b) 25
6. 72
7. $(gof)^{-1}(x) = \sqrt{x^2-3}$ com $(gof)^{-1} : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$
8. $f(x) = \frac{2x+16}{x+5}$
9. a) f(x) = 5x - 19 b) -14 c) 11
10. $(g^{-1}of)(x) = \frac{-3x+7}{4}$
11. $(fog^{-1})(x) = \frac{4x^2-4x+10}{9}$

4.12 PARIDADE DE FUNÇÕES

Função Par

Uma função é par se $\forall$x $\in D(f)$, $f(-x) = f(x)$

1. Para todo x pertencente ao domínio, valores opostos de x têm imagens iguais (-x, y) e (x, y)
2. O gráfico é simétrico em relação ao eixo oy

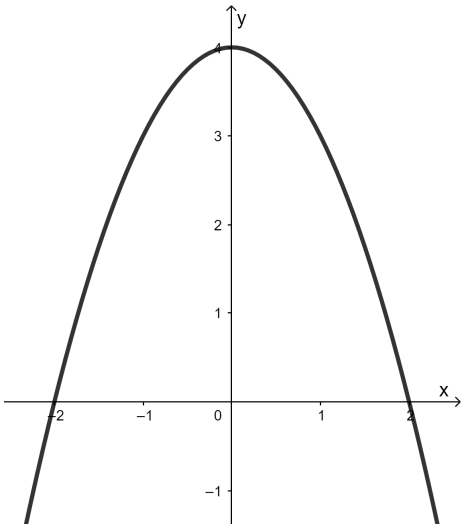
Exemplo

A função $f(x) = -x^2+4$ é um função par. Observe que, se trocarmos x por -x temos $f(-x) = -(-x)^2+4 = -x^2+4$, de onde se conclui que, sendo $f(-x) = f(x)$, a função f é par.

Podemos observar, tomando alguns pontos de $f(x) = -x^2+4$ na tabela a seguir, que domínios opostos têm imagens iguais, ou seja: $f(-3) = f(3) = -5$, $f(-2) = f(2) = 0$ e $f(-1) = f(1) = 3$.

x	f(x)
-3	-5
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0
3	-5

Observe no gráfico de $f(x) = -x^2+4$, a ocorrência da simetria em relação ao eixo oy.



Função Ímpar

Uma função é ímpar se $\forall x \in D(f)$, $f(-x) = -f(x)$

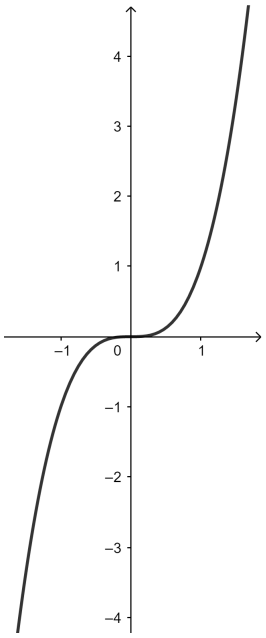
1. Para todo x pertencente ao domínio, valores opostos de x têm imagens opostas (-x, y) e (x, -y)
2. O gráfico é simétrico em relação à origem

Exemplo

A função $f(x) = x^3$ é uma função ímpar. A tabela a seguir mostra alguns pontos dessa função.

x	f(x)
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

Observe na tabela que domínios opostos têm imagens opostas: $f(-3) = -27$ e $f(3) = 27$, $f(-2) = -8$ e $f(2) = 8$, $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$. Observe no gráfico de $f(x) = x^3$, a ocorrência da simetria em relação à origem.



Observação

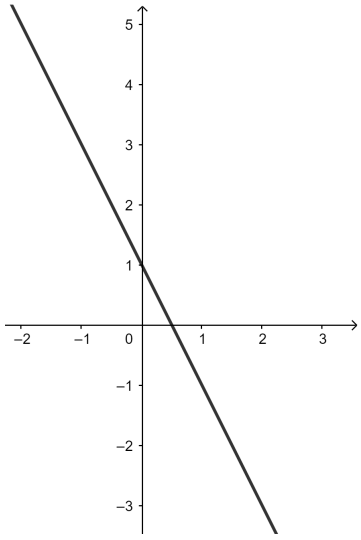
Quando não ocorre $f(-x) = f(x)$ ou $f(-x) = f(x)$ para todo x do domínio da função, dizemos que a função não é par, nem ímpar.

Exemplo

A função $f(x) = -2x + 1$ não é par nem ímpar.

x	f(x)
-3	7
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3
3	-5

Observe que, tomando domínios opostos, as imagens não são iguais, nem opostas.



Paridade a Partir da Fórmula

Para estudar a paridade a partir da lei que define a função, em uma função tipo y=f(x), devemos trocar o sinal da variável que representa o domínio (x), e observar se a equação permanece igual, ou se transforma em uma equação oposta. Se a fórmula permanecer igual, a função é Par. Se a fórmula resultante for oposta, a função é ímpar.

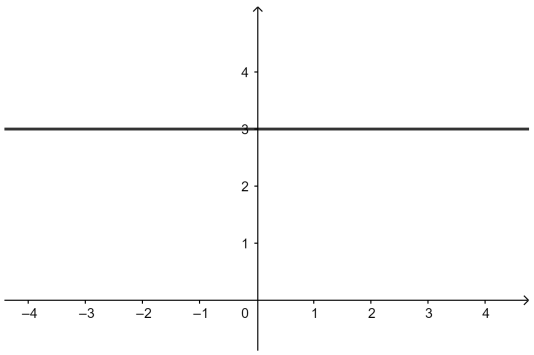
Se o resultado não é igual nem oposto, a função não é par, nem ímpar.

Exemplos

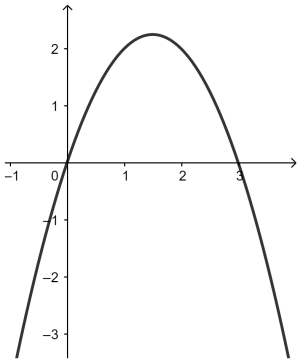
- $f(x) = -x^2 + 4$ é um função par. Observe que, se trocarmos x por -x temos $f(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4$, de onde se conclui que, sendo $f(-x) = f(x)$, a função f é par.
- $f(x) = -3|x|$ é função par pois $f(-x) = -3|-x| = -3|x|$. Observe que as imagens são iguais $(f(-x) = f(x))$.
- $f(x) = \frac{1}{x}$ é função ímpar pois $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$. Veja que as imagens são opostas $(f(-x) = -f(x))$.
- $f(x) = 2x + 4$ não é par, nem ímpar, pois $f(-x) = 2(-x) + 4 = -2x + 4$, não satisfazendo a condição $f(-x) = f(x)$, nem $f(-x) = -f(x)$.

EXERCICIO

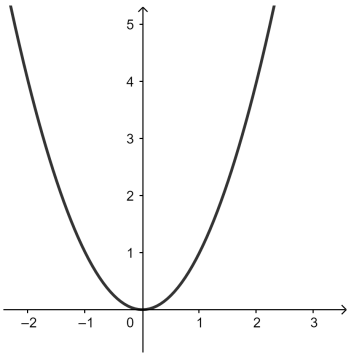
1. Classifique como Função Par ou Ímpar



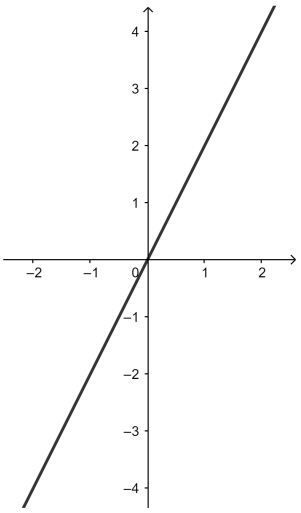
(a)



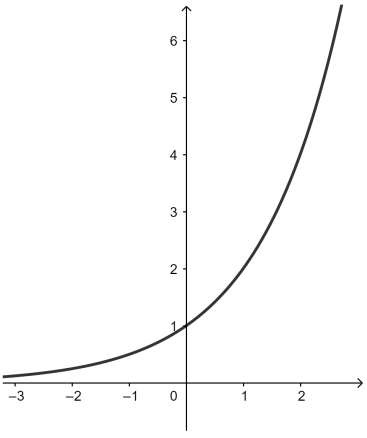
(b)



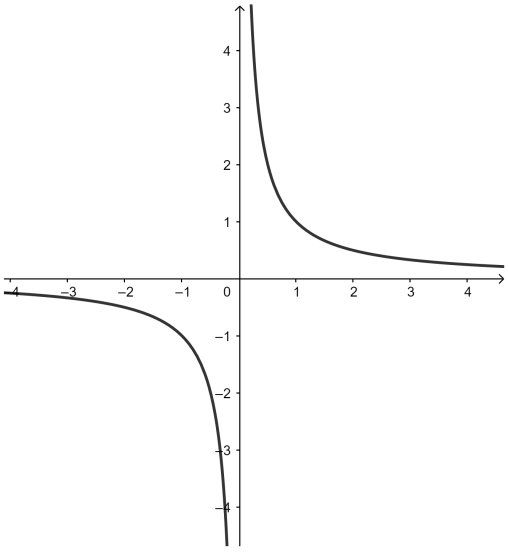
(c)



(d)



(e)



(f)

2. Classifique as funções abaixo como função par ou função ímpar, justificando algebricamente.

(a) f(x) = -2x
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$
(c) f(x) = 3x+1
(d) $f(x) = x^2 - 2x$
(e) $f(x) = 2^x$
(f) $f(x) = \frac{1}{3}^{|x|}$
(g) $f(x) = |x| - 2$
(h) $f(x) = |x^2| - 2|x|$
(i) f(x) = x
(j) $f(x) = x^2 - 3$

Respostas

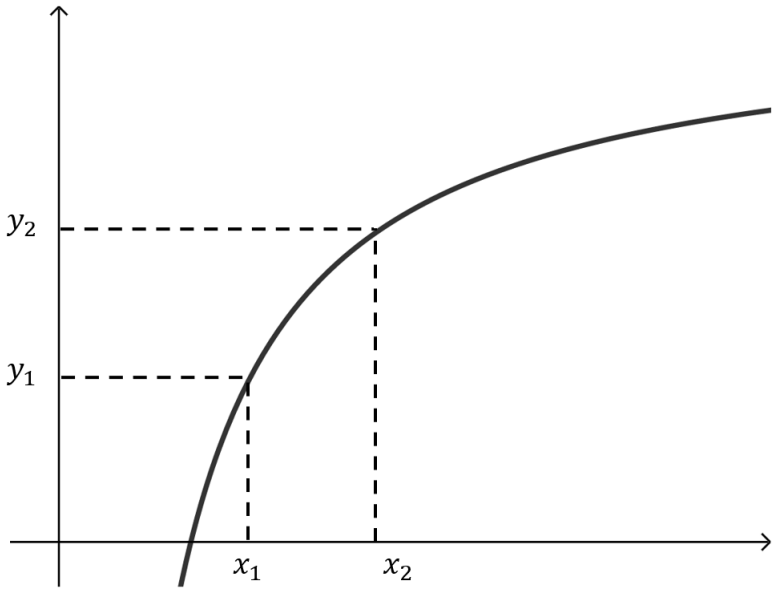
1. Função par: a, c; Função ímpar: d, f; Nem par, nem ímpar: b, e

2. Função par: f, g, h, j ; Função ímpar: a, b, i; Nem par, nem ímpar: c, d, e.

4.13 Função Crescente e Decrescente

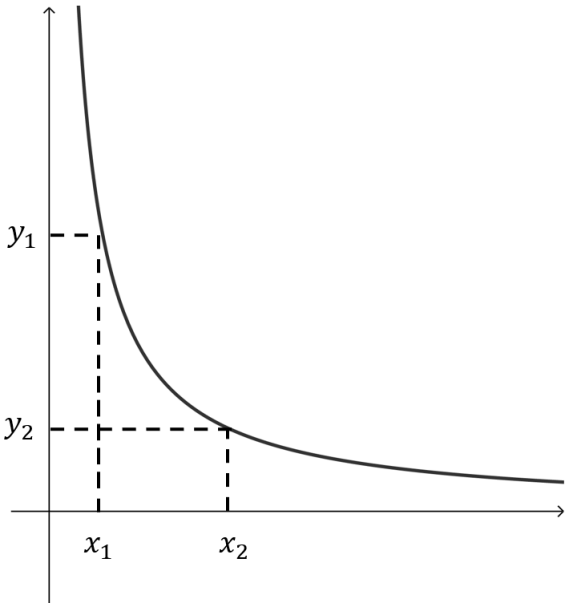
Função Crescente

Uma função é crescente em um intervalo I $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in$ I, $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$



Função Descrescente

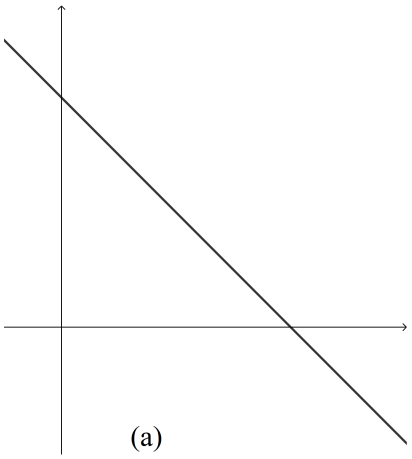
Uma função é decrescente em um intervalo I $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in$ I, $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2$



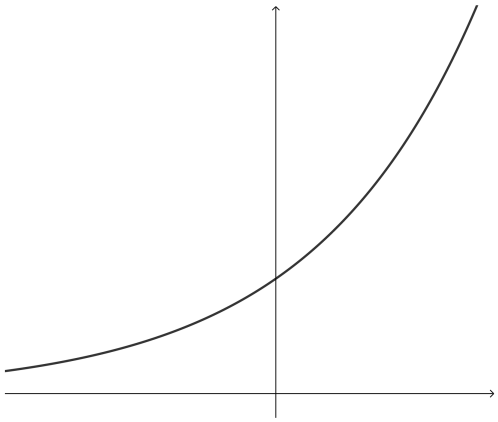
EXERCICIO

1. Classifique as funções abaixo como crescentes ou decrescentes

   (a) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

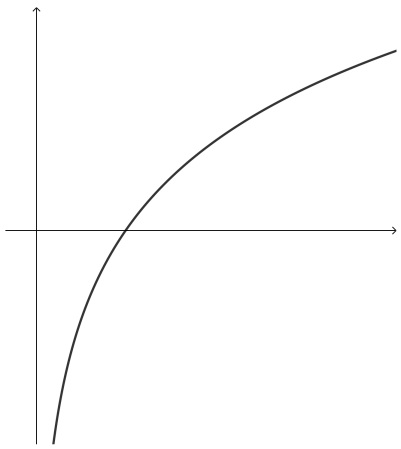


(a)

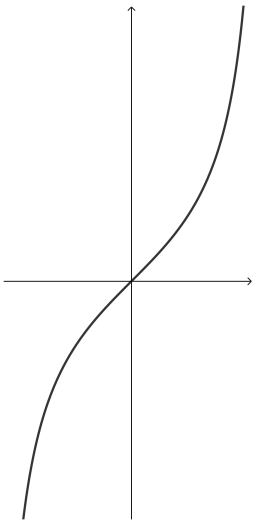


(b)

   (b) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$



(c)



(d)

4.14 DETERMINAÇÃO DO DOMÍNIO E DA IMAGEM ATRAVÉS DA LEI DE FORMAÇÃO

Nesta seção apresentaremos 4 casos básicos para facilitar o entendimento do processo de determinação do conjunto domínio ou campo de definição de uma função.

1º CASO - FUNÇÕES POLINOMIAIS

Seja $f(x) = a_n x^n + a_(n-1)x^(n-1) + a_(n-2)x^(n-2) + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ uma função polinomial de grau n. Toda função polinomial possui domínio igual ao conjunto $\mathbb{R}$.

1. Exemplo – Determine o conjunto domínio das funções:
   (a) $f(x) = 2x^2 - x + 5$
   Resposta: D(f) = $\mathbb{R}$
   (b) f(x) = x - 2
   Resposta: D(f) = $\mathbb{R}$
   (c) $f(x) = -2x^5 - x^3 + 5$
   Resposta: D(f) = $\mathbb{R}$

2º CASO - FUNÇÕES RACIONAIS

Seja $f(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$, onde A(x) e $B(x) \neq 0$ são polinômios.

O domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / B(x) \neq 0\}$

1. Exemplo - Determine o campo de existência das funções a seguir:
   (a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7}{x - 4}$
   Resposta: $D = R - \{4\}$ ou $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 4\}$
   (b) $g(x) = \dfrac{7}{x^2 - 4x + 3}$
   Resposta: $D = R - \{1, 3\}$ ou $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\}$

3º CASO - FUNÇÕES IRRACIONAIS

Com índice par

Seja $f(x) = \sqrt[n]{(A(x))}$, com n par: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}/A(x) \geq 0\}$

1. Exemplo
   (a) $f(x) = \sqrt{x-4}$
   Resposta: $x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$, daí: $D(f) = x \in \mathbb{R}/x \leq 4$
   (b) $f(x) = \sqrt[4]{-2x-6}$
   Resposta: $-2x-6 \geq 0 \rightarrow -2x \geq 6 \rightarrow -2x \geq 6(-1) \rightarrow 2x \geq -6 \rightarrow x \leq -3$, daí $D(f) = \{x \in R/x \geq -3\}$

Com índice ímpar

Seja $f(x) = \sqrt[n]{(A(x))}$, com n ímpar: $D(f) = \mathbb{R}$

1. Exemplo
   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$
   Conjunto domínio: $D(f) = \mathbb{R}$
   (b) $f(x) = \sqrt[5]{-x^3+7x^2+1}$ Conjunto domínio $D(f) = \mathbb{R}$

4º CASO: FUNÇÕES ENVOLVENDO OS TRÊS CASOS ANTERIORES

Exemplos

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+7}{\sqrt{x-3}}$

   Neste caso devemos considerar que:
   I) O denominador não pode ser nulo: $\sqrt{(x-3)} \neq 0$

   II) O radicando de uma raiz de índice par não pode ser negativo: $x-3 \geq 0$.
   - De $\sqrt{(x-3)} \neq 0$, temos que $x-3 \neq 0$, consequentemente $x \neq 3$.
   - De $x-3 \geq 0$, temos que $x \geq 3$

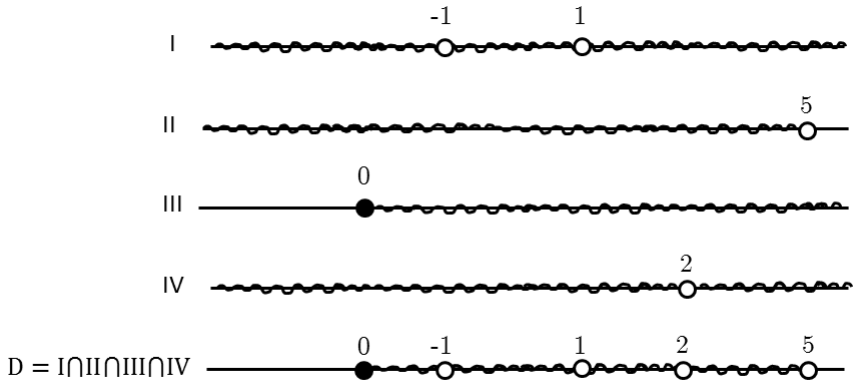
   Como $x \neq 3$ e x $\geq$ 3, podemos concluir que x > 3, daí:
   $D(f) = \{x \in R/x > 3\}$

2. $f(x) = \dfrac{2x^2-4}{\sqrt[3]{x^2-1}} + \dfrac{\sqrt[5]{x-4}}{\sqrt[4]{-x+5}} - \dfrac{\sqrt{x}}{x^3-8}$

   Aqui temos que analisar cada uma das funções que compõem f(x) da seguinte maneira:
   - Para $2x^2-4$ o domínio é R (não tem restrição para x).
   - Em $\sqrt[3]{x^2-1}$, não existe restrição pois a raiz possui índice ímpar, porém como ela está no denominador, temos a restrição $x^2-1 \neq 0$, de onde vem:
     $x \neq 1$ e $x \neq -1$ (I).
   - Para $\sqrt[4]{-x+5}$ temos a restrição -x + 5 > 0, pois – x + 5 tem que ser não negativo e, ao mesmo tempo, diferente de zero.
     Daí $-x+5 > 0 \Rightarrow -x > -5(-1) \Rightarrow x < 5$ (II).
   - Para $\sqrt{x}$, temos $x \geq 0$ (III).
   - Para x^3-8, temos que $x^3-8 \neq 0$. Daí calculando a raiz de x^3-80, $x^3-8 \neq 0 \Rightarrow x^3 \neq 8 \Rightarrow$

$x \neq \sqrt[3]{8} \Rightarrow x \neq 2$ (IV).

Para finalizar representamos os resultados I, II, III e IV na reta e determinamos a interseção entre eles:



Resposta: O conjunto domínio de f(x) é $D = [0,5[-\{-1,1,2\}$

EXERCÍCIO

1. Determine o conjunto domínio D de cada uma das funções abaixo:

(a) $y = \dfrac{x}{x-5}$
(b) $y = \sqrt{2x+1}$
(c) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-1}}$
(d) $y = \dfrac{1}{x^2-9x+20}$
(e) $y = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-3}$
(f) $y = \dfrac{x^2-1}{3x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$
(g) $y = x^2 - 2x + 6$
(h) $y = \sqrt[3]{x-4}$
(i) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^3} + \dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$
(j) $y = \dfrac{4}{x}$
(k) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x}}$
(l) $y = \dfrac{-2x}{\sqrt[3]{x}}$
(m) $y = \sqrt[4]{x}$
(n) $y = 2x + 3$
(o) $y = \dfrac{\sqrt{-x+3}}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
(p) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$
(q) $y = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Respostas

(a) $\mathbb{R} - \{5\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -0.5\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} / x > 0.5\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 4 \text{ e } x \neq 5\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ e } x \neq 3\}$
(f) $\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$
(g) $\mathbb{R}$
(h) $\mathbb{R}$
(i) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$
(j) $\mathbb{R}^*$
(k) $\mathbb{R}_+^*$
(l) $\mathbb{R}^*$
(m) $\mathbb{R}_+$
(n) $\mathbb{R}$
(o) $]0,3]$
(p) $\mathbb{R}$
(q) $\mathbb{R} - \{1\}$

EXERCICIO

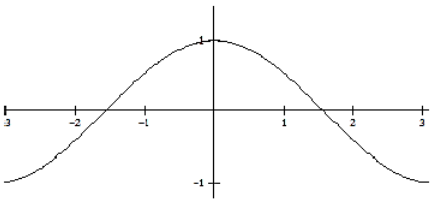
1. Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^3 - 7$, determine:
   (a) (f o g)(x)
   (b) (g o f)(x)
   (c) (f o f)(x)
   (d) (g o g)(x)
2. As tabelas abaixo representam as funções bijetoras f(x) e g(x).

x	3	4	5	6
f(x)	7	8	-4	-2

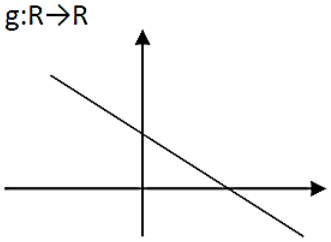
x	-4	-2	7	8
f(x)	6	4	5	3

   Determine
   (a) f o g
   (b) g o f
   (c) $5.g^{-1}(3) + 3f(5) + (gof)^{-1}(6) - (fog)(-4) - 7$
3. Dados os gráficos abaixo:

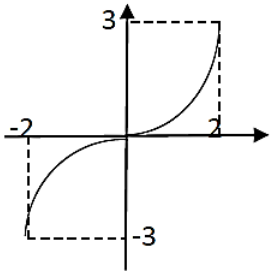
f:[-3, 3]→[-1, 1]



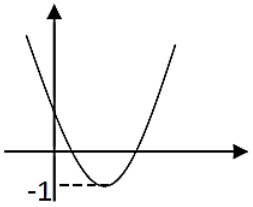
g:R→R



h :[-2, 2]→[-5, 5[

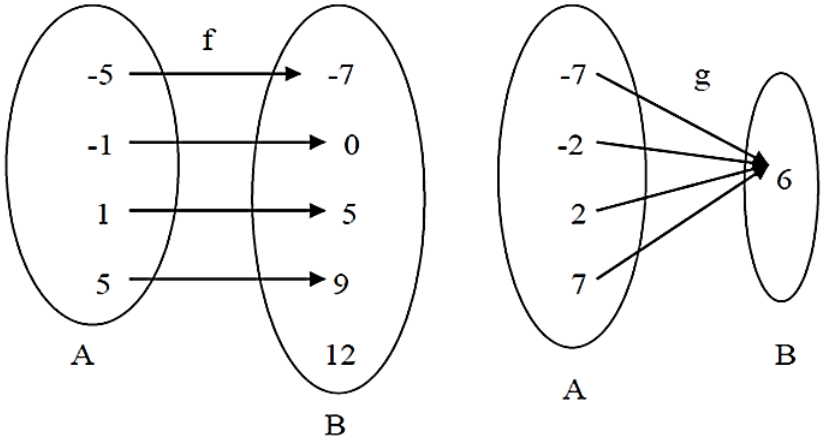


i:R→[-5, +∞[



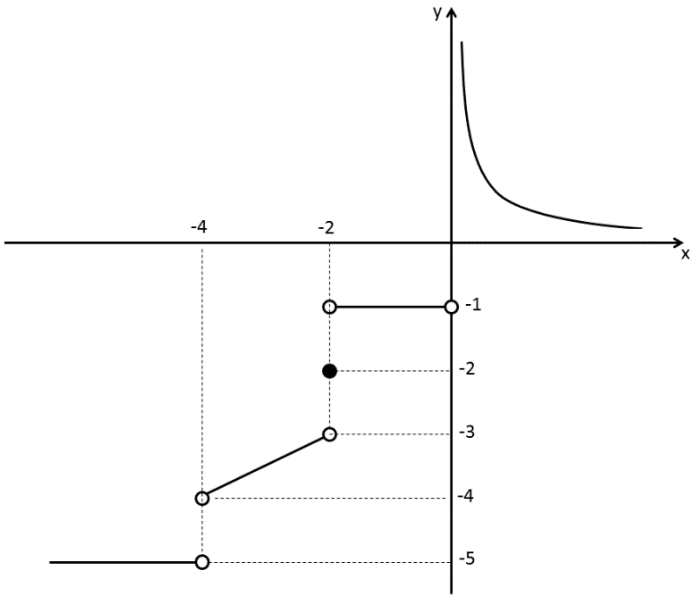
   Responda com V ou F
   (a) Na função h, $\forall$ x $\in [-2,2]$, $f(x) = -f(x)$
   (b) A função g é bijetora e ímpar ( )
   (c) A função f é sobrjetora, mas não é simétrica em relção ao eixo oy ( )
   (d) A função i não é injetora, nem par nem ímpar ( )
   (e) A função h não admite inversa. Para que isso seja possível, seria necessário mudar seu contradomínio para o intervalo [-3, 3] ( )

4. Dada a função $f(x) = \dfrac{mx+2}{nx-1}$, onde f(2) = 2 e $f^{-1}(3) = 1$. Determine:
   (a) Conjunto imagem de f(x)
   (b) Conjunto imagem de $f^{-1}(x)$
5. Dadas as funções abaixo:



   Responda com verdadeiro (V) ou falso (F):
   (a) A função f é injetora ou par ( )
   (b) A função g é par e bijetora ( )
   (c) f não admite inversa ( )
   (d) g é sobrejetora e não injetora ( )
6. Dadas as funções:
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -7$
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 6$
   (c) $h :]-\infty, 4] \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x^2 + 4$
   (d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i(x) = x^2 - 4x$
   (e) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se x} > 3 \\ -4, & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ 3x+1, & \text{se x} > 5 \end{cases}$

   Responda com V ou F:
   (a) Tomando uma função h' a partir da mesma lei de h, com $h' : [0, +\infty[\to]-\infty, 4]$, estamos criando uma função bijetora, e portanto, invertível. ( )
   (b) g é crescente, injetora e ímpar ( )
   (c) f e h são funções pares, mas apenas h é sobrejetora ( )
   (d) $\dfrac{-j(\pi) + j(-2 \cdot e) - j(1)}{2} = 0$ ( )
7. Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função f representada abaixo:



(a) D(f) =

(b) Im(f) =

8. Dados $(fog)(x) = \dfrac{4x-3}{5}$ e $f^{-1} = 5x+1$, determine (gof)(x).

Respostas

1. (a) $(f\ o\ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^3-7}$
   (b) $(g\ o\ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 - 7 = (\sqrt{x})^3 - 7 = \sqrt{x^3} - 7$
   (c) $(f\ o\ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$
   (d) $(g\ o\ g)(x) = g(g(x)) = (g(x))^3 - 7 = (x^3-7)^3 - 7 = x^9 - 21x^6 + 147x^3 - 350$
2. (a) $\{(-4,-2),(-2,8),(7,-4),(8,7)\}$
   (b) $\{(3,5),(4,3),(5,6),(6,4)\}$
   (c) $5(8)+3(-4)+5-(-2)-7 = 28$
3. VFFVV
4. (a) $\mathbb{R} - \{\frac{4}{3}\}$
   (b) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$
5. VFVV
6. VFVF
7. $D = \mathbb{R} - \{-4,0\}$ e $Im(f) =]-4,-3[\cup]0,+\infty[\cup\{-5,-2,-1\}$
8. $g(f(x)) = \dfrac{4x-14}{5}$