Análisis de nuevos algoritmos diferenciales de desplazamiento de fase para interferometría de campo completo

Analysis of new differential phase shifting algorithms for full-field interferometry

Marta Miranda^(*,S)

Departamento de Física Aplicada, Universidade de Vigo, España.

(*) Email: marta_miranda@uvigo.es

S: miembro de SEDOPTICA / SEDOPTICA member

Recibido / Received: 24/07/2012. Revisado / Revised: 11/11/2012. Aceptado / Accepted: 12/11/2012.

DOI: <http://dx.doi.org/10.7149/OPA.45.4.437>

RESUMEN:

Este artículo resume el trabajo de investigación llevado a cabo por la autora en la Universidade de Vigo para la realización de la Tesis Doctoral "Análisis de nuevos Algoritmos Diferenciales de Desplazamiento de Fase para interferometría de campo completo" dirigida por el Dr. José Benito Vázquez Dorrió. En ella se diseñan y caracterizan novedosos algoritmos de evaluación de la diferencia o suma de la fase óptica. Así, el cálculo directo de la diferencia de fase óptica codificada en dos patrones de franjas puede llevarse a cabo mediante el empleo de los algoritmos diferenciales de desplazamiento de fase (ADDFs), los cuales pueden ser obtenidos por ejemplo combinando apropiadamente de forma no lineal los conocidos algoritmos de desplazamiento de fase (ADFs), evitando el delicado proceso de reconstrucción si el resultado obtenido es directamente el valor continuo de la diferencia de fase. En este trabajo se presentan de forma metódica los protocolos de diseño de las principales familias de ADDFs caracterizando pormenorizadamente el efecto de las principales fuentes de error sistemático lo que proporciona valiosa información sobre las sensibilidades de los diferentes ADDFs, los relaciona si es el caso genéticamente con sus ADFs precursores e indica procedimientos de cancelación y/o comparación. Se analiza también el comportamiento de los ADDFs con patrones de franjas reales.

Palabras clave: Interferometría de Desplazamiento de Fase Diferencial/Aditiva, Análisis de Fourier, Espectro Característico, Polinomio Característico, Ajuste de Mínimos Cuadrados, Errores Sistemáticos, Método Monte Carlo.

ABSTRACT:

This paper summarizes the research work undertaken by the author at the University of Vigo for the realization of the Doctoral Thesis "Analysis of new Differential Phase Shifting Algorithms for full-field interferometry" directed by Dr. José Benito Vázquez Dorrió. In it, it is designed and characterized new algorithms to evaluate the optical phase difference or the optical phase sum. So, Direct calculation of optical phase difference encoded in two fringe patterns can be carried out by using differential phase shifting algorithms (DPSAs), which can be obtained, for example, by suitably combining known phase shifting algorithms (PSAs), so avoiding the delicate phase unwrapping process if the result obtained is directly the continuous value of the phase difference. This work methodically presents the design protocols for the main DPSA families, characterising in detail the effects of the main sources of systematic error, which provides valuable information about the sensitivities of the various DPSAs, relates them genetically to their PSA precursors when applicable, and indicates procedures for cancellation and/or comparison. The behavior of the DPSAs is analyzed making use of real fringe patterns.

Key words: Differential/Additive Phase Shifting Interferometry, Fourier Analysis, Characteristic Spectrum, Characteristic Polynomial, Least Squares Fitting, Systematic Errors, Monte Carlo Method.

REFERENCIAS Y ENLACES / REFERENCES AND LINKS

- [1]. D. Malacara, *Optical Shop Testing*, Wiley, Nueva York (2007).
- [2]. B. V. Dorrio, J. L. Fernández, "Phase-evaluation methods in whole-field optical measurement techniques", *Meas. Sci. Technol.* **10**, 33-35 (1999).
- [3]. D. Malacara, M. Servín, Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, Taylor & Francis, Florida (2005).
- [4]. K. A. Stetson, W. R. Brohinsky, "Eleetrooptic holography and its application to hologram interferometry", *Appl. Opt.* **24**, 3631-3637 (1985).
- [5]. D. C. Ghiglia y M. D. Pritt, *Two Dimensional Phase Unwrapping*, Wiley, New York (1998).
- [6]. K. A. Stetson, "Theory and applications of electronic holography", *Proc. SEM Conference on Hologram Interferometry and Speckle Metrology* **198**, 294-300 (1990).
- [7]. M. Owner-Petersen, "Digital speckle pattern shearing interferometry: Limitations and prospects", *Appl. Opt.* **30**, 2730-2738 (1991).
- [8]. C. S. Vikram, W. K. Whiterow, J. D. Trolinger, "Algorithm for phase-difference measurement in phase-shifting interferometry", *Appl. Opt.* **32**, 6250-6252 (1993).
- [9]. J. E. Greivenkamp, "Generalized data reduction for heterodyne interferometry", *Opt. Eng.* **23**, 350-352 (1984).
- [10]. M. Miranda, B. V. Dorrio, J. Blanco, J. Diz-Bugarín, "Linear error analysis of differential phase shifting algorithms", *Optik*, in press, 10.1016/j.ijleo.2012.02.006.
- [11]. J. Schwider, R. Burow, K. E. Elssner, J. Grzanna, R. Spolaczyk, K. Merkel, "Digital wave-front measuring interferometry: some systematic error sources", *Appl. Opt.* **22**, 3421-3432 (1983).
- [12]. P. Hariharan, B. F. Oreb, T. Eiju, "Digital phase-shifting interferometry: a simple error-compensating phase calculation algorithm", *Appl. Opt.* **26**, 2504-2506 (1987).
- [13]. K. Freischlad, C. L. Koliopoulos, "Fourier description of digital phase-measuring interferometer", *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 542-551 (1990).
- [14]. M. Miranda, B. V. Dorrio, "Fourier analysis of two-stage phase-shifting algorithms", *J. Opt. Soc. Am. A* **27**, 276-285 (2010).
- [15]. V. Álvarez-Valado, H. González-Jorge, B. V. Dorrio, M. Miranda, F. Rodríguez, J. L. Valencia, F. J. Yebra, J. Rodríguez, "Testing phase-shifting algorithms for uncertainty evaluation in interferometric gauge block calibration", *Metrologia* **46**, 637-645 (2009).
- [16]. Y. Surrel, "Design of algorithms for phase measurements by the use of phase stepping", *Appl. Opt.* **35**, 51-60 (1996).
- [17]. M. Miranda, B. V. Dorrio, J. Blanco, J. Diz-Bugarín, F. Ribas, "Characteristic polynomial theory of two-stage phase shifting algorithms", *Opt. Lasers Eng.* **50**, 522-528 (2012).
- [18]. M. Miranda, B. V. Dorrio, J. Blanco, J. Diz-Bugarín, F. Rivas, "Two-dimensional characteristic polynomials in the direct calculation of optical phase sum and difference", *J. Phys.: Conf. Ser.* **274**, 012031 (2011).
- [19]. K. G. Larkin, B. F. Oreb, "Propagation of errors in different phase-shifting algorithms: a special property of the arctangent function", *Proc. SPIE* **1775**, 219-227 (1992).
- [20]. M. Miranda, B. V. Dorrio, "Error behavior in differential phase shifting algorithms", *Proc. SPIE* **7102**, 710221B (2008).
- [21]. M. Miranda, V. Álvarez-Valado, B. V. Dorrio, H. González-Jorge, "Error propagation in differential phase evaluation", *Opt. Express* **18**, 3199-3209 (2010).
- [22]. J. V. Wingerden, H. J. Frankena, C. Smorenburg, "Linear approximation for measurement errors in phase shifting interferometry", *Appl. Opt.* **30**, 2718-2729 (1991).
- [23]. M. Miranda, B. V. Dorrio, "Error-phase compensation properties of differential phase-shifting algorithms for Fizeau fringe patterns", *AIP Conf. Proc.* **992**, 993-998 (2008).
- [24]. M. Miranda, B. V. Dorrio, "Differential phase evaluation assessment applying Monte Carlo based techniques", *AIP Conf. Proc.* **1236**, 369-374 (2010).

- [25]. M. Miranda, B. V. Dorrío, "Monte Carlo based techniques of two-stage phase shifting algorithms", *Opt. Laser Eng.* **49**, 439-444 (2011).
- [26]. M. Miranda, B. V. Dorrío, J. Blanco, J. Diz-Bugarín, F. Rivas, "The Monte Carlo method as a tool for statistical characterization of differential and additive phase shifting algorithms", *J. Phys.: Conf. Ser.* **274**, 012032 (2011).
- [27]. B.V. Dorrío, A. F. Doval, C. López, R. Soto, J. Blanco-García, J. L. Fernández, M. Pérez-Amor, "Fizeau phase measuring interferometry using the moiré effect", *Appl. Opt.* **34**, 3639-3643 (1995).

1. Introducción

La interferometría de campo completo obtiene con altísimas prestaciones metrológicas una distribución bidimensional variable de irradiancia que contiene información de cualquier magnitud natural que pueda ser relacionada con su fase óptica [1]. Aunque estas técnicas son bien conocidas y empleadas desde antiguo, no ha sido sino desde finales del siglo pasado (con el desarrollo, la universalización y el abaratamiento de los sistemas de iluminación coherente –esencialmente láseres– así como los sistemas de adquisición –cámaras CCD/CMOS – y procesamiento– en el ámbito de la programación a nivel de usuario) cuando han ocupado un lugar predominante en campos dominados hasta hace bien poco por otras técnicas.

Normalmente, los métodos de evaluación de la fase óptica [2] obtienen la información necesaria en el espacio directo empleando bien una modulación temporal bien una modulación espacial. Los algoritmos de desplazamiento de fase (ADFs) [3] son actualmente la herramienta más utilizada para recuperar la fase óptica $\phi(\mathbf{r})$ en la mayoría de métodos de evaluación requiriendo usualmente para ello al menos $M=3$ valores de irradiancia con k -armónicos de amplitud $a_k(\mathbf{r})$ y con un desplazamiento de fase adicional entre ellos α_m

$$s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mathbf{r}) \cos[k(\phi + \alpha_m)], \quad (1)$$

que se combinan a través de una función trigonométrica inversa, normalmente en la forma

$$\begin{aligned} M, \alpha \phi(\mathbf{r}) &= \arctan \left(\frac{N\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}}{D\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}} \right) = \\ &= \arctan \left(\frac{\sum_{m=1}^M n_m s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)}{\sum_{m=1}^M d_m s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

para obtener los valores principales de la fase óptica módulo 2π . $N\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$ y $D\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$ son combinaciones de los valores de irradiancia que definen el ADF particular en cada caso. Análogamente, éstos pueden ser empleados para calcular la irradiancia promedio local $a_0(\mathbf{r})$ y la visibilidad $a_1(\mathbf{r})/a_0(\mathbf{r})$ del patrón usado así como incluso la fase adicional α_m entre ellos. Estos ADFs permiten obtener la fase óptica con su polaridad en intervalos cortos de tiempo, con una baja complejidad computacional (incluso en presencia de fronteras o discontinuidades) o sin necesidad de la interacción del operario que realiza la medida. Actualmente existen innumerables ADFs que difieren en el número M de valores de irradiancia que emplean, en el valor del paso de fase adicional α_m , en la concreta combinación de los valores de irradiancia desplazados en fase, $N\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$ y $D\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$, y en su sensibilidad a los numerosos factores que intervienen en el proceso de cálculo.

En innumerables aplicaciones de gran interés científico-tecnológico la información del mensurando está asociada a la diferencia de fase óptica, o a la suma de fase óptica, codificada entre el patrón de franjas original $s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)$ y otro patrón modificado

$$\begin{aligned} t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p) &= \\ &= \sum_{g=0}^{\infty} b_g(\mathbf{r}) \cos[g(\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r}) + \beta_p)], \end{aligned} \quad (3)$$

donde $b_g(\mathbf{r})$ es la amplitud del g -ésimo armónico y β_p el incremento de fase adicional del p -ésimo valor de irradiancia. La diferencia de fase $\Delta\phi(\mathbf{r})$ (o la suma de fase $2\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})$) se puede calcular mediante el uso de ADFs para así obtener explícitamente la fase $\phi(\mathbf{r})$ asociada al patrón original y sustraerla (o sumarla) de la fase $\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})$ del modificado:

$${}^{P,\beta}[\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})] = \arctan\left(\frac{N\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}{D\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}\right) = \arctan\left(\frac{\sum_{p=1}^P n_p t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)}{\sum_{p=1}^P d_p t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)}\right), \quad (4)$$

Sin embargo, puede calcularse directamente la fase de interés empleando los Algoritmos Diferenciales de Desplazamiento de Fase (ADDFs) [4] (o los Algoritmos Aditivos de Desplazamiento de Fase (AADF)) y de este modo evitar la duplicación de los procesos de evaluación y posterior reconstrucción que podrían suponer pérdidas de exactitud y precisión (Fig. 1). Los ADDFs además de poder evitar el cálculo de los valores principales de las fases $\phi(\mathbf{r})$ y $\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})$ pueden recuperar directamente valores continuos de la fase $\Delta\phi(\mathbf{r})$, prescindiendo del delicado proceso de reconstrucción, cuando esta variación de fase no alcanza un periodo completo. De esta forma se hace viable su evaluación incluso si los patrones de franjas presentan ruido, tienen una baja modulación, presentan cambios abruptos de la fase o una densidad de muestreo baja [5].

Al contrario del estudio exhaustivo llevado a cabo por multitud de autores para distintos ADFs, para los ADDFs (o AADFs) no existen apenas referencias sobre su diseño eficiente ni sobre su sensibilidad a las principales fuentes de error. Este trabajo realiza un novedoso y original análisis extendido empleando herramientas similares a las usadas habitualmente en los ADFs, para caracterizar una serie de familias representativas de ADDFs con el fin de fijar la potencialidad inédita de los mismos así como, si es el caso, relacionarlos genéticamente con sus ADFs precursores. En lo que sigue centraremos el análisis en los ADDFs, siendo del todo similar al de los AADFs. De este modo, agrupamos los ADDFs en Genéricos (ADDFGs) o Específicos (ADDFEs) según estén o no derivados de un método sistemático de diseño. Así por ejemplo, en la literatura se pueden encontrar los ADDFEs de Stetson [6], Petersen [7] o Vikram [8]. En cuanto a los ADDFGs son dos las estrategias de creación seguidas que tienen la particularidad de

poder construirse combinando convenientemente los ya conocidos ADFs con el fin de propagar, de ser posible, sus importantes capacidades compensatorias. La primera de ellas es un ajuste de mínimos cuadrados, completamente análogo al de creación de ADFs [9], para el patrón de franjas modificado que se reescribe aislando su modulación de fase y buscando el mejor ajuste a una función senoidal. Los coeficientes que minimizan la varianza resuelven un sistema de ecuaciones que se simplifica notablemente considerando intervalos equiespaciados de la señal a lo largo de un solo periodo de la señal [10]. Así, la diferencia de fase se recupera de la forma

Fig. 1 Cálculo de la resta/suma de fases como resta/suma de dos ADFs o empleando un único AADF/AADF. El superíndice R indica fase reconstruida.

$${}^{M+P,\alpha,\beta}\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{D_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}N_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\} - N_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}D_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}{D_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}N_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\} + N_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}D_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}, \quad (5)$$

siendo $N_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$ y $N_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}$ una combinación de los valores de irradiancia en los numeradores de los ADFs precursores de la fase original y desplazada respectivamente y $D_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}$ y $D_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}$ en los denominadores obteniéndose, en definitiva, una combinación no-lineal de los valores de irradiancia de ambos patrones en un proceso independiente de los términos de continua $a_0(\mathbf{r})$ y $b_0(\mathbf{r})$ o amplitudes de modulación de la irradiancia $a_1(\mathbf{r})$ y $b_1(\mathbf{r})$. Como no es necesario que los patrones original y modificado empleen el mismo ADF precursor a estos ADDFGs los denominamos Asimétricos (ADDFGs).

El segundo método sistemático de obtención de ADDFGs combina linealmente los valores de irradiancia de ambos patrones requiriendo que los dos ADFs usados necesariamente empleen combinaciones equivalentes en los argumentos de la función arctan para los patrones original $s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)$ y modificado $t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)$ garantizando en este caso la invariabilidad en los valores de irradiancia del término de continua $a_0(\mathbf{r}) = b_0(\mathbf{r})$ y la modulación $a_1(\mathbf{r}) = b_1(\mathbf{r})$, a estos ADDFGs los denominamos por ello Simétricos (ADDFGs). Son dos las estrategias de creación de estos algoritmos:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 2\arctan\left(\frac{N_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\} - N_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\}}{D_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\} + D_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}\right), \quad (6a)$$

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 2\arctan\left(\frac{D_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\} - D_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}{N_1\{s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)\} + N_2\{t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)\}}\right), \quad (6b)$$

El conjunto innumerable de ADDFGs que pueden ser derivados de las ecuaciones anteriores están afectados en principio de las mismas fuentes de error que los ADFs. Aunque son tanto errores sistemáticos como aleatorios los que desvirtúan la medida merecen especial atención los primeros, bien por su relevante influencia en el resultado bien por las posibilidades numéricas de compensación que presentan, siendo posiblemente los más

significativos los errores de calibración del elemento desplazador de la fase adicional (llamados a primer orden errores de desintonía) o la pérdida de sinusoidalidad del perfil de la señal. Nuestro trabajo se centra en el análisis del comportamiento de distintas familias de ADDFGs frente a este tipo de errores. A modo de ejemplo, construimos el ADDFGA de Schwider-Hariharan [11,12] con el que a continuación se ilustrará el proceso de análisis de sensibilidades:

$${}^{5+5}_{2,2}\frac{\pi}{2}\Delta\phi = \arctan\left(\frac{(2s_3 - s_1 - s_5)(2t_3 - 2t_4) - (2s_2 - 2s_4)(2t_3 - t_1 - t_5)}{(2s_3 - s_1 - s_5)(2t_3 - t_1 - t_5) - (2s_2 - 2s_4)(2t_2 - 2t_4)}\right). \quad (7)$$

2. Análisis cualitativo de los ADDFG

El diseño y posterior estimación cualitativa de las inexactitudes en el cálculo de la diferencia de fase óptica $\Delta\phi(\mathbf{r})$ en el caso particular de los ADDFGs se puede realizar en el espacio recíproco [13] a partir del cociente de correlaciones $H_{N,D}$ de una función auxiliar producto del patrón original $s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)$ y el modificado $t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)$ con cada una de las Funciones Características de Muestreo

Diferenciales bidimensionales $g_{N,D}(u_1, u_2)$ [14,15], siendo $u_{1,2}$ las variables de muestreo de las señales original y modificada respectivamente, evaluadas en los puntos (u_m, u_p) los cuales permiten expresar la fase adicional del patrón original como $\alpha_m = 2\pi f_s u_m - \phi_0$, siendo f_s su frecuencia de referencia, y la del modificado como $\beta_p = 2\pi f_t u_p - \phi_0 - \Delta\phi_0$ con f_t su frecuencia de referencia:

$$\arctan\left(\frac{H_N}{H_D}\right) = \arctan\left(\frac{\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P s_m(\mathbf{r}, \phi, u_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, u_p) g_N(u_m, u_p)}{\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P s_m(\mathbf{r}, \phi, u_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, u_p) g_D(u_m, u_p)}\right). \quad (8)$$

Aplicando el teorema del valor central y el teorema de convolución [3], el numerador y

denominador de esta expresión se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} H_{N,D} &= \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p) g_{N,D}(\alpha_m, \beta_p) e^{-j2\pi f_1 u_1} e^{-j2\pi f_2 u_2} \Big|_{(f_1, f_2)=(0,0)} = \\ &= \mathbf{TF}[s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)]_{(f_1, f_2)=(0,0)} * \mathbf{TF}[g_{N,D}(\alpha_m, \beta_p)]_{(f_1, f_2)=(0,0)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{a_k b_l}{2} [G_{N,D}^*(kf_s, lf_t) e^{j(k\phi + l(\phi + \Delta\phi))} + G_{N,D}^*(-kf_s, lf_t) e^{j(-k\phi + l(\phi + \Delta\phi))}] \end{aligned} \quad (9)$$

De esta forma, se puede recuperar tanto la fase suma de ambos patrones como su diferencia $\Delta\phi(\mathbf{r})$. En este último caso los espectros característicos diferenciales $G_{N,D}(f_1, f_2)$ deben cumplir las siguientes condiciones:

1. No deben tener término de continua: $G_{N,D}(0,0) = 0$.
2. No deben interferir armónicos indeseados: $G_{N,D}(-kf_s, gf_t) = 0$ y $G_{N,D}(kf_s, gf_t) = 0$ para $k > 1$ y $g > 1$.
3. Se deben anular en (f_s, f_t) : $|G_{N,D}(f_s, f_t)| = 0$.
4. Deben ser ortogonales en $(-f_s, f_t)$: $G_N(-f_s, f_t) = G_D(-f_s, f_t) e^{\mp j\pi/2}$, es decir $\gamma_D(-f_s, f_t) = \Delta\phi_0$ y $\gamma_N(-f_s, f_t) = \Delta\phi_0 \mp \pi/2$.
5. Deben tener magnitudes iguales en $(-f_s, f_t)$: $|G_N(-f_s, f_t)| = |G_D(-f_s, f_t)|$.

Limitándonos al caso de la evaluación diferencial de desplazamiento de fase donde la señal original es muestreada uniformemente en cada $2\pi(m-1)/M$ y la modificada en cada $2\pi(p-1)/P$, las Funciones Características de Muestreo Diferenciales bidimensionales $g_{N,D}(u_1, u_2)$ vienen definidas por:

$$g_N(u_1, u_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P n_{m,p} \delta(u_1 - u_m, u_2 - u_p), \quad (10a)$$

$$g_D(u_1, u_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{m,p} \delta(u_1 - u_m, u_2 - u_p), \quad (10b)$$

cuya transformación al espacio recíproco proporciona sus Espectros Característicos bidimensionales:

$$G_N(f_1, f_2) = e^{-j\phi_0 f_1/f_s} e^{-j(\phi_0 + \Delta\phi_0) f_1/f_t} \times \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P n_{m,p} e^{-\alpha_m f_1/f_s} e^{-\beta_p f_1/f_t}, \quad (11a)$$

$$G_D(f_1, f_2) = e^{-j\phi_0 f_1/f_s} e^{-j(\phi_0 + \Delta\phi_0) f_1/f_t} \times \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P d_{m,p} e^{-\alpha_m f_1/f_s} e^{-\beta_p f_1/f_t}. \quad (11b)$$

El valor de las amplitudes diferenciales de muestreo asimétricas ($n_{m,p}, d_{m,p}$) se puede obtener de la condición de ortogonalidad y así finalmente la diferencia de fase $\Delta\phi(\mathbf{r})$ se puede entender como el cociente de una función matemática auxiliar $s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)$ evaluada en $M \times P$ puntos (u_m, u_p) equiespaciados a lo largo de un periodo completo:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p) \sin(\alpha_m - \beta_p)}{\sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p) \cos(\alpha_m - \beta_p)}, \quad (12)$$

Es precisamente el análisis cualitativo de los espectros característicos $G_{N,D}(f_1, f_2)$ el que nos previene de la exactitud del cálculo de la fase óptica $\Delta\phi(\mathbf{r})$. Por ello, para conocer la influencia de un tipo de error éste debe ser introducido en ellos. Así por ejemplo, para apreciar la influencia del error de calibración en los pasos de fase original y modificado se introducen los pasos perturbados

$${}^E\alpha_m = \alpha_m + E\alpha_m = \alpha_m + \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q \frac{\alpha_m^q}{q\pi^{q-1}} \quad (13a)$$

$${}^E\beta_p = \beta_p + E\beta_p = \beta_p + \sum_{r=1}^{\infty} \chi_r \frac{\beta_p^r}{r\pi^{r-1}} \quad (13b)$$

siendo ε_q y χ_r los coeficientes de error para los términos q -ésimo y r -ésimo. De esta forma, suprimir el efecto de errores de calibración en el paso de fase y la aparición de armónicos de orden superior implica que se verifiquen también una serie de condiciones que afectan principalmente a sus derivadas. Así, los Espectros Característicos Diferenciales del ADDFGA de Schwider-Hariharan (Fig. 2) son ortogonales a todas las frecuencias, no tienen término de continua y se tocan tangencialmente en la frecuencia de referencia $(-f_s, f_t)$ por lo que el ADDFGA de Schwider-Hariharan es insensible

a desintonía. En lo que se refiere a la sensibilidad a los armónicos se exige que no solo la función sea nula en ese punto sino que también su derivada lo sea pues debe anularse en k y g simultáneamente. Así el ADDFGA de Schwider-Hariharan no detecta los armónicos $(-kf_s, gf_t)$ con $k = g$ pares de la diferencia de fase $\Delta\phi(\mathbf{r})$. Tampoco hay contribuciones armónicas en múltiplos de la fase suma (kf_s, gf_t) con $k = g$.

Este análisis frecuencial puede conducir a representaciones espectrales proporcionales de cada rotación de un mismo ADDFGA con idénticas propiedades compensatorias y con una diferencia en general asociada a un término constante de fase que es irrelevante en la mayoría de las situaciones. Esta similitud no evidente entre ADDFGAs desplazados puede soslayarse mediante un análisis más completo considerando el espectro característico combinado

$$G(f_1, f_2) = G_D(f_1, f_2) + jG_N(f_1, f_2). \quad (14)$$

La caracterización de la diferencia de fase se puede realizar también asociando un número complejo [16] a cada ADDFGA de acuerdo a la ecuación [17,18]

$$\begin{aligned} V(\Delta\phi) &= \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P (d_{m,p} + jn_{m,p}) s_m(\mathbf{r}, \phi, u_p) t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, u_p) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{g=-\infty}^{\infty} a_k b_g e^{j[g\Delta\phi + (g+k)\phi + k\phi_0 + g(\phi_0 + \Delta\phi_0)]} P(e^{jk\alpha}, e^{jg\beta}), \end{aligned} \quad (15)$$

se obtiene así el polinomio característico bidimensional Asimétrico de orden $(M-1)(P-1)$

$$\begin{aligned} P(e^{jk\alpha}, e^{jg\beta}) &= \\ \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P (d_{m,p} + jn_{m,p}) e^{j[k\alpha(m-1) + g\beta(p-1)]}, \end{aligned} \quad (16)$$

que también se puede ver afectado por errores, por ejemplo de calibración, y sus raíces nos informarán de sus sensibilidades. Por ejemplo (Fig. 3), el ADDFGA de Schwider-Hariharan detecta el armónico fundamental $(k, g) = (-1, 1)$ que recupera $\Delta\phi(\mathbf{r})$, tiene una raíz doble en $(k, g) = (1, -1)$ y por tanto es insensible a desintonía. Además, tiene raíces simples en

todos los k y g pares (positivos y negativos) y doble en $k = +1, +5, -3, -7, \dots$ y $g = +3, +7, -1, -5, \dots$ es insensible a todas las contribuciones armónicas que se pueden construir con ambos.

Tanto la descripción frecuencial de los ADDFs dada por los espectros característicos diferenciales como el polinomio característico diferencial proporcionan resultados equivalentes puesto que [17,18]:

$$\begin{aligned}
 P(e^{jk\alpha}, e^{jg\beta}) &= \sum_{m=1}^M (d_m \mp jn_m) e^{jk(m-1)\alpha} \sum_{p=1}^P (d_p \mp jn_p) e^{jg(p-1)\beta} \\
 &= [H_D(-f_1) \mp jH_N(-f_1)][H_D(-f_2) \mp jH_N(-f_2)] = H(-f_1, -f_2),
 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 G_N &= 2j \left[-\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_1}{f_s} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_2}{f_1} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_1}{f_s} \right) \cos \left(\pi \frac{f_2}{f_1} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_2}{f_1} \right) \cos \left(\pi \frac{f_1}{f_s} \right) \right] \\
 G_D &= -\cos \left(\pi \frac{f_1}{f_s} \right) - \cos \left(\pi \frac{f_2}{f_1} \right) - 4 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_1}{f_s} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{f_2}{f_1} \right) + \cos \left(\pi \frac{f_1}{f_s} \right) \cos \left(\pi \frac{f_2}{f_1} \right) + 1
 \end{aligned}$$

Fig. 2 Espectro característico diferencial del ADDFGA de Schwider-Hariharan.

$$P(e^{jk\alpha}, e^{jg\beta}) = [2e^{j2k\alpha} - 1 - e^{j4k\alpha} - 2j(e^{jk\alpha} - e^{j3k\alpha})][2e^{j2g\beta} - 1 - e^{j4g\beta} + 2j(e^{jg\beta} - e^{j3g\beta})]$$

Fig. 3. Polinomio característico diferencial del ADDFGA de Schwider-Hariharan.

3. Análisis cuantitativo de los ADDFs

Como complemento al análisis cualitativo previo que emplea, un análisis en el espacio recíproco o en el plano complejo, se hace necesario un estudio cuantitativo pormenorizado de la sensibilidad de los distintos ADDFs a las diferentes fuentes de error de manera que su elección basada en ambos criterios complementarios nos pueda garantizar las más altas exactitud, resolución y repetibilidad.

La dependencia funcional genérica del error en el cálculo de la fase para un ADDFG obtenido a partir de la función arctan puede obtenerse atendiendo a su propiedad de desplazamiento en frecuencia [19]. Por ejemplo, para los ADDFGAs se obtiene de la identidad de la tangente de una resta [20,21].

$$\begin{aligned} \tan(E\Delta\phi(\mathbf{r})) &= \\ &= \frac{\tan(\Delta\phi^E(\mathbf{r})) - \tan(\Delta\phi(\mathbf{r}))}{1 + \tan(\Delta\phi^E(\mathbf{r}))\tan(\Delta\phi(\mathbf{r}))} = \\ &= \frac{\frac{N_2^E D_1^E - N_1^E D_2^E}{N_1^E N_2^E + D_1^E D_2^E} - \frac{N_2 D_1 - N_1 D_2}{N_1 N_2 + D_1 D_2}}{1 + \frac{N_2^E D_1^E - N_1^E D_2^E}{N_1^E N_2^E + D_1^E D_2^E} \cdot \frac{N_2 D_1 - N_1 D_2}{N_1 N_2 + D_1 D_2}} \end{aligned} \quad (18)$$

donde los numeradores N_i y denominadores D_i de los patrones original ($i = 1$) y modificado ($i = 2$) afectados de error (con superíndice E) se pueden expresar como los no afectados (sin superíndice) más un término que contenga explícitamente el error, obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} E\Delta\phi(\mathbf{r}) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_{D,\mu}}{2} \{ \sin[(\mu-1)\phi + \kappa_{D,\mu}] - \sin[(\mu+1)\phi + \kappa_{D,\mu}] \} \cos(2\phi + 2\Delta\phi) - \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_{N,\mu}}{2} \{ \cos[(\mu-1)\phi + \kappa_{N,\mu}] + \cos[(\mu+1)\phi + \kappa_{N,\mu}] \} - \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_{N,\mu}}{2} \{ \sin[(\mu-1)\phi + \kappa_{N,\mu}] - \sin[(\mu+1)\phi + \kappa_{N,\mu}] \} \sin(2\phi + 2\Delta\phi) + \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_{N,\nu}}{2} \{ \cos[(\nu-1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{N,\nu}] + \cos[(\nu+1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{N,\nu}] \} \cos(2\phi) - \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_{D,\nu}}{2} \{ \sin[(\nu-1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{D,\nu}] - \sin[(\nu+1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{D,\nu}] \} - \\
 & - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_{D,\nu}}{2} \{ \cos[(\nu-1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{D,\nu}] + \cos[(\nu+1)(\phi + \Delta\phi) + \kappa_{D,\nu}] \} \sin(2\phi),
 \end{aligned}$$

siendo $e_{N,\mu}$, $e_{D,\mu}$, $e_{N,\nu}$ y $e_{D,\nu}$ las componentes armónicas de los errores normalizados y $\kappa_{N,\mu}$, $\kappa_{D,\mu}$, $\kappa_{N,\nu}$ y $\kappa_{D,\nu}$ términos de fase inicial de cada uno de los coeficientes de error donde μ da cuenta de la contribución armónica del patrón original y ν del modificado. Este novedoso resultado nos muestra una dependencia genérica compleja en la propagación del error en múltiplos enteros de $\phi(\mathbf{r})$ y $\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})$.

Se puede obtener una expresión analítica del error mediante una aproximación lineal [22]. El error sistemático que en mayor medida afecta el cálculo de la diferencia de fase óptica $\Delta\phi(\mathbf{r})$ [20,21,23] es posiblemente el error de calibración de los desplazadores de fase que se puede calcular como la suma del error producido en la medida de α del patrón original y en β del patrón modificado:

$$\begin{aligned}
 E\Delta\phi(\mathbf{r}) = & \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial \Delta\phi}{\partial s_m} \right) \left(\frac{\partial s_m}{\partial \alpha_m} \right) E\alpha_m + \\
 & + \sum_{p=1}^P \left(\frac{\partial \Delta\phi}{\partial t_p} \right) \left(\frac{\partial t_p}{\partial \beta_p} \right) E\beta_p,
 \end{aligned} \quad (20)$$

Cuantificando $E\alpha_m$ y $E\beta_p$ la magnitud del error entre el paso de faso afectado de error y el ideal:

$$E\alpha_m = \sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q \frac{\alpha_m^q}{q\pi^{q-1}} \quad (21a)$$

$$E\beta_p = \sum_{r=1}^{\infty} \chi_r \frac{\beta_m^r}{r\pi^{r-1}} \quad (21b)$$

Para los ADDFGAs el modelo de dependencia funcional del error se ajusta a la Ec. (19) con $\mu = \nu = 1$.

Si se asumen patrones multifrecuenciales ($k > 1$ y $g > 1$) se puede calcular el error en $\Delta\phi(\mathbf{r})$ en aproximación lineal como:

$$\begin{aligned}
 E\Delta\phi(\mathbf{r}) = & \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial \Delta\phi}{\partial s_m} \right) E s_m + \sum_{p=1}^P \left(\frac{\partial \Delta\phi}{\partial t_p} \right) E t_p,
 \end{aligned} \quad (22)$$

siendo $E s_m(\mathbf{r}, \phi)$ y $E t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi)$ las diferencias entre el valor ideal y el afectado de error para cada patrón:

$$E s_m(\mathbf{r}, \phi) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\mathbf{r}) \cos[k(\phi(\mathbf{r}) + \alpha_m)] \quad (23a)$$

$$\begin{aligned}
 E t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi) = & \sum_{g=2}^{\infty} b_g(\mathbf{r}) \cos[g(\phi(\mathbf{r}) + \Delta\phi(\mathbf{r})) + \beta_p].
 \end{aligned} \quad (23b)$$

Fig. 4. Error del 10% a primer y segundo orden en el paso de fase adicional (arriba) y presencia de armónicos al 10% a segundo y tercer orden (abajo) en el ADDFGA de Schwider-Hariharan.

Fig. 5. Simulación del error con el MMC del 10% a primer y segundo orden en el paso de fase adicional con el ADDFGA de Schwider-Hariharan. Ver Fig. 4 (izda).

En los ADDFGAs, la expresión del error con armónicos no deseados a segundo y tercer orden se ajusta a la ecuación (19) con $\mu = \nu = 2$ y $\mu = \nu = 3$ respectivamente.

En la Fig. 4 se representan ambos tipos de errores para el ADDFGA de Schwider-Hariharan donde comprobamos que la magnitud del error es pequeña y no presenta discontinuidades.

Por último, con el método Monte Carlo [24-26] se obtiene exactamente la misma curva de error que mediante linealización por medio de la propagación de incertidumbres de los patrones original y modificado a la diferencia de fase calculada. Para el cálculo de los errores sistemáticos se considera una distribución de probabilidad cuadrada cuyo ancho en cada punto está directamente asociado con el error considerado. Estos valores de irradiancia son combinados en el correspondiente ADDF en cada punto. Repitiendo este proceso un número suficientemente grande de veces, en nuestro caso 10.000 iteraciones, se construye la curva del error. Así la Fig. 5 muestra el proceso de cálculo para obtener la curva de error en el paso de fase adicional en el ADDFGA de Schwider-Hariharan.

4. Ejemplo de evaluación diferencial

La evaluación de patrones de irradiancia provenientes de sistemas experimentales reales se ven afectados por la acción, individual o conjunta, de diversos errores sistemáticos (como los analizados pormenorizadamente en este

trabajo) o errores aleatorios. Para ilustrar los resultados obtenidos empleamos un interferómetro Fizeau para medir diferencias de camino óptico. En nuestro caso las medidas realizadas implican la combinación de patrones de franjas desplazados en fase $s_m(\mathbf{r}, \phi, \alpha_m)$ correspondientes a una oblea de silicio a la que posteriormente se le realiza un depósito de hidroxilapatita para obtener el patrón $t_p(\mathbf{r}, \phi + \Delta\phi, \beta_p)$ [27].

La Fig. 6 muestra los patrones original y desplazado evaluados con el ADDFGA de Schwider-Hariharan para obtener la diferencia de fase correspondiente al depósito de hidroxilapatita. El mapa de fase corrobora el análisis teórico previo en cuanto a sus errores sistemáticos verificando el buen comportamiento de este algoritmo.

Fig. 6 Patrones adquiridos con el interferómetro Fizeau (izda) y mapa de fase con diversos perfiles obtenido con el ADDFGA de Schwider-Hariharan (dcha).

5. Conclusiones

Este trabajo caracteriza de forma sistemática los Algoritmos Diferenciales de Desplazamiento de Fase (ADDFs) para los que apenas existían referencias en la literatura, ofreciendo además las herramientas necesarias para obtener un ADDF de forma eficiente. La labor realizada con los ADDFs ha seguido una trayectoria similar a la llevada a cabo en las últimas cuatro décadas con los Algoritmos de Desplazamiento de Fase (ADFs) en lo referente al diseño y estudio de sus sensibilidades. En concreto, entre otros, es trabajo original y novedoso: a) el diseño de nuevos métodos de creación de ADDFs y la

obtención tanto de una expresión genérica de sus errores asociados como de sus errores concretos por linearización; b) las condiciones que en el espacio recíproco (o en plano complejo) deben cumplir las representaciones de sus Espectros Característicos Bidimensionales (o las raíces de su Polinomio Característico Bidimensionales) para evitar las principales fuentes de error; y c) el análisis estadístico de los comportamientos derivados de los análisis previos para diversas familias de ADDFs empleando el método de simulación de Monte Carlo. La experiencia con sistemas reales corrobora las sensibilidades estudiadas.