Propuesta de James Bottomley para una ley colorimétrica general: Estudio de la reflectancia de superficies blancas y aplicación a superficies coloreadas

James Bottomley proposal for a general colorimetric law: Study of reflectance of White surfaces and application to colored surfaces

C. Millán Verdú(*), Ll. Garrigós Oltra, G. Blanes Nadal

Departamento de Física Aplicada, Escuela Politécnica Superior de Alcoy, Universidad Politécnica de Valencia, Spain.

(*) Email: cmillan@fis.upv.es

Recibido / Received: 09/01/2012. Revisado / Revised: 31/03/2012. Aceptado / Accepted: 02/04/2012.

RESUMEN:

James Bottomley (Salford, 1838-Preswitch, 1925), químico inglés formado en el Owens College y vinculado a la Universidad de Manchester y a la "Manchester Literary and Philosophical Society", institución en la que ocupó diversos cargos, realizó contribuciones al campo de la formalización matemática de procesos químicos y muy concretamente a la colorimetría y al ajuste de ecuaciones químicas. Desconocido para el gran público, los autores llegaron a confundirlo con el sobrino de Lord Kelvin James, T. Bottomley (Belfast, 1845- Glasgow, 1926). Su mayor aportación, sin duda, consistió en los intentos de formalizar una ley colorimétrica general, intentando ir más allá de la determinación química y ampliando el empleo de dicha "supuesta" ley a diferentes procesos físicos en un intento de correlacionar los diferentes parámetros puestos en juego en cada caso. Creemos de interés histórico describir el trabajo que realizó en esta dirección; no obstante, conviene señalar que la terminología actualmente empleada en relación con magnitudes fotométricas y radiométricas [1] poco tenían que ver con la empleada por Bottomley, por lo que ha sido necesario realizar alguna adaptación, consistente fundamentalmente en sustituir el término "*whiteness*" empleado por Bottomley por *reflectancia*.

Palabras clave: Bottomley, Ley Colorimétrica, Reflectancia, Transmitancia, Mezcla de Colores.

ABSTRACT:

James Bottomley (Salford, 1838-Preswitch, 1925) was an English chemical trained at Owens College and linked to the University of Manchester and the "Manchester Literary and Philosophical Society", institution where he held various positions; he made contributions to the field of mathematical formalizing of chemical processes and very specifically the colorimetry and the adjustment of chemical equations. Unknown to the general public, he was even confused with Lord Kelvin's nephew, James T. Bottomley (Belfast, 1845 - Glasgow, 1925). His greatest contribution, undoubtedly, consisted of his attempts to formalize a colorimetric general law, trying to go beyond the chemical determination and expanding the use of this "alleged" law to different physical processes in an attempt to correlate the different parameters at stake in each case. We believe of historical interest to describe the work done in this direction; However, it should be noted that the terminology currently used in relation with photometric and radiometric quantities [1] had little to do with that used by Bottomley, and therefore it was necessary to make some adaptation, consisting primarily of replacing the term *whiteness*, used by Bottomley with *reflectance*.

Key words: Bottomley, Colorimetric Law, Reflectance, Transmittance, Colour mixing.

REFERENCIAS Y ENLACES / REFERENCES AND LINKS

- [1]. A. Cruz, "Magnitudes radiométricas y fotométricas", *Opt. Pura Apl.* **13**, 15-19 (1980).

- [2]. C. Millán-Verdú, Ll. Garrigos-Oltra, G. Blanes-Nadal, "Aportaciones de James Bottomley a la formalización de la ley colorimétrica", sometido a revisión para publicar en *J. Chem. Education* (2012).
- [3]. C. Millán-Verdú, Ll. Garrigos-Oltra, G. Blanes-Nadal, "Bottomley y la cultura de la precisión en las determinaciones colorimétricas", sometido a revisión para publicar en *Am. J. Phys.* (2012).
- [4]. Ll. Garrigós-Oltra, C. Millán Verdú, "Pero...¿quién fue James Bottomley? Breve reseña biográfica, noticia de sus aportaciones científicas y detalle de los escritos químicos", *XI Congreso de la SEHCYT*, San Sebastián, Spain (2011).
- [5]. R. A. Crone, *A History of Color*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000), p. 100.
- [6]. J. Bottomley, "Colorimetry, Part VI. On a theory of mixed colours", *Proc. Manc. 6it. Phil. Soc.* **20**, 1-11 (1881).
- [7]. J. Bottomley, "Colorimetry, Part VI. On a theory of mixed colours", *Mem. Manc. Lit. Phil. Soc.* **8**, 70-82, (1884).
- [8]. Ll. Garrigós-Oltra, C. Millán-Verdú, G. Blanes-Nadal, "El color líquido. Instrumentos y útiles de la colorimetría en el siglo XIX", *Agua Clara*, Alicante (2006).
- [9]. J. F. W. Herschel, *Encyclopaedia Metropolitana* (1827). Publicado como parte integrante de "Treatises Physical Astronomy, Light and sound", London and Glasgow, Richard Griffin and Company, 430-8 (1845). <http://www.archive.org/details/treatisesonphysi00hersrich>.
- [10]. J. Bottomley, "On some colorimetrical experiments", *Chem. News* **38**, 191-193 (1878).
- [11]. J. Bottomley, "Colorimetry, Part V. On the absorption of Light by turbid solutions", *Chem. News* **42**, 218-220 (1880).
- [12]. J. Bottomley, "Colorimetry, Part V. On the absorption of Light by turbid solutions", *Proc. Manc. Lit. Phil. Soc.* **19**, 190-200 (1880).
- [13]. J. Bottomley, "Colorimetry, Part V. On the absorption of Light by turbid solutions", *Mem. Manc. Lit. Phil. Soc.* **7**, 187-198 (1882).
- [14]. J. D. Van der Waals, *Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistofoestand*, PhD Thesis, A. W. Sijthoff, Leiden (1873)
- [15]. J. C. Maxwell, "Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistofoestand", *Nature* **10**, 477-480, (1874).
- [16]. J. Bottomley, "Additional note on a theory of mixed colourours", *Proc. Manc. Lit. Phil. Soc.* **20**, 5-17 (1881).
- [17]. G. Gooday, "Precision measurement and the genesis of physics teaching laboratories in Victorian Britain", *British J. History Science* **23**, 25-51 (1990).

1. Introducción

Recientemente hemos analizado las contribuciones a la colorimetría [2,3] que James Bottomley¹ realizó entre 1875 y 1885², pudiendo constatar que de ellas se derivó un procedimiento para testear la precisión en las medidas de reflectancia³ mediante el empleo de

superficies blancas confeccionadas con sulfato de bario y carbón. Estas superficies eran observadas a través de diferentes disoluciones con un utillaje colorimétrico experimental rudimentario, pero que reproducía muy bien la base científica de los colorímetros que estaban siendo comercializados en la época, por lo que sus conclusiones podían ser aplicables a los procedimientos colorimétricos en general.

En Bottomley, sobre todo en lo que refiere a sus estudios sobre colorimetría, se detecta un denodado interés por formalizar mediante ecuaciones la mayor cantidad posible de procesos estudiados y ello con la intención de ir más allá de la constatación experimental o de la

¹Una aproximación bio-bibliográfica a este personaje ha sido presentada recientemente [4]

²Debemos entender por *colorimetría* el estudio de la transmitancia a través de soluciones coloreadas, si bien no detallamos la naturaleza de la radiación incidente.

³Quizás el término *reflectancia* no es exactamente el que deberíamos utilizar ya que Bottomley en sus trabajos no tiene en cuenta la naturaleza de la luz incidente y, sin dar más detalles, pensamos que nuestro autor empleaba luz solar sin distinguir si el día estaba soleado o lluvioso; no obstante, hemos acabado empleando *reflectancia* por

tratarse del término actual más próximo a lo que nuestro autor transmite.

elaboración de tablas aplicables a los procesos concretos considerados.

En este contexto, es de interés reseñar los intentos de formalización de un modelo teórico con el que representar las reflectancias obtenidas al hacer incidir luz sobre pantallas con diferentes tonos de blanco, modelo que, a su vez, pudiera ser conectado con una ley colorimétrica general como la propuesta por el mismo Bottomley [2].

Aunque nuestro autor nos habla de una “teoría” de la mezcla de colores, no contribuye como hicieron Tobias Mayer o Johann Heydrich Lambert [5] a la creación espacios métricos de color; es decir, construcciones geométricas y analíticas de color destinadas a su caracterización. Lo que realmente propone Bottomley es diseñar un modelo que le permita estudiar matemáticamente la variación de la reflectancia (*whiteness*, según el autor) de una pantalla elaborada al pintarla con una mezcla de dos materias colorantes a medida que se va variando la composición de dicha mezcla. Como ya se ha dicho, la intención de Bottomley al presentar esta propuesta es ampliar el campo de aplicación de la ley colorimétrica a otros sistemas físicos diferentes de las disoluciones; concluyendo satisfactoriamente que una formalización matemática de tales características puede ser aplicada al estudio de la reflectancia de superficies y a los procesos de impresión de grabados, mundo éste con el que debía estar familiarizado dado que había sido la ocupación profesional familiar desde tiempos de su abuelo, en el último cuarto del siglo XVIII [4].

2. Aplicación de la ley colorimétrica al color reflejado: estudio de la reflectancia de superficies coloreadas con mezclas binarias

Bottomley expuso por vez primera sus ideas sobre estos temas en una lectura pública realizada en octubre de 1880 en la *Manchester Literary and Philosophical Society* y extractada posteriormente en *Proceedings* y en *Memoirs* en 1881 y 1884, respectivamente [6,7]. La idea surgió de la necesidad en algunos de sus experimentos de obtener superficies blancas; pero, según sus propias palabras, con un grado

de blancura (concepto que debemos identificar con el de reflectancia) que pudiera ser variable y controlable. Para lograr estos propósitos recubría las superficies a utilizar con una materia colorante confeccionada al triturar conjuntamente sulfato de bario y carbón (concretamente, “*lampblack*”, véase nota 9 a pie de página) en diferentes proporciones, obteniendo, tras mezclar con agua, una pasta que constituía la pintura a utilizar. Lo más destacable de todo el proyecto es que se plantea la posibilidad de estudiar matemáticamente el grado de reflectancia obtenido para una superficie, proceso que, según nuestro autor, estaba relacionado de alguna manera con las variaciones en la tonalidad que experimentan los pigmentos empleados en pintura al ser mezclados con blanco o con negro en diferentes proporciones.

Bottomley afirma que este particular no había sido nunca estudiado, mencionando tan sólo que Newton en su “*Optics*” habla de la posibilidad de obtener gris mezclando sustancias de diferentes colores⁴.

Inicialmente, el razonamiento matemático que sigue Bottomley es el siguiente: si W_0 es la reflectancia inicial de una materia colorante blanca, y w la que se pierde al añadir una cantidad dada de partículas negras que ocultan otras blancas, la reflectancia que permanece debe ser:

$$W_1 = W_0 - w. \quad (1)$$

Si en el proceso se añaden n cantidades de materia colorante negra, la reflectancia remanente debería ser:

$$W_n = W_0 - nw. \quad (2)$$

Para testear este resultado, Bottomley obtiene diferentes gamas de blanco partiendo de 10 g de sulfato de bario al que añade sucesivas cantidades de 0,006 g de carbón hasta llegar a 0,048 g. Los resultados obtenidos tras la aplicación del test, sin embargo, no fueron satisfactorios, pues la diferencia entre dos muestras consecutivas se debilitaba hasta

⁴Conviene insistir que el objetivo de Bottomley no era el estudio de la mezcla de materias colorantes sino la variación de la reflectancia obtenida al aplicar dichas mezclas a una superficie.

hacerse inapreciable entre la séptima y octava adición de materia colorante negra.

La explicación que ofrece Bottomley sobre estos hechos, parte de una premisa derivada de la praxis colorimétrica vigente [8]: Bottomley asumió que la reflectancia de una pantalla determinada, W_0 , pintada exclusivamente con una cantidad, M , de materia colorante blanca, era mayor que la reflectancia de otra pantalla, W_1 , pintada con una mezcla de dos materias colorantes: una blanca, en cantidad M , y otra negra en cantidad m .

La relación existente entre ambas reflectancias venía dada por la ecuación:

$$W_1 = W_0 - pW_0, \quad (3)$$

donde p era una fracción numérica. Sucesivas adiciones de materia colorante negra implicaban disminuciones sucesivas de la reflectancia medida en cada caso. Todas las relaciones entre las reflectancias de partida y las reflectancias permanentes venían gobernadas por la Ec. (3):

$$W_2 = W_1 - pW_1, \quad (4)$$

$$W_3 = W_2 - pW_2, \quad (5)$$

donde p se asumía constante siempre y cuando se mantuviera la relación entre masa total de materias colorantes empleadas en la confección de la pintura destinada a pintar la pantalla de partida ($n - 1$) y la masa añadida de materia colorante negra en una nueva elaboración de materia colorante mezcla destinada a pintar la pantalla final (n).

El argumento se puede ilustrar con la siguiente serie de situaciones:

-*Experiencia 1*: Pintura elaborada con M de materia colorante blanca. Reflectancia W_0 .

-*Experiencia 2*: Pintura elaborada con M de materia colorante blanca y adición de m de materia colorante negra. Reflectancia W_1 . Relación entre masa total empleada en la elaboración de la materia colorante destinada a pintar la pantalla en la experiencia 1 y masa añadida de materia colorante negra para realizar la experiencia 2:

$$r_1 = \frac{M}{m}. \quad (6a)$$

-*Experiencia 3*: Pintura elaborada con M de materia colorante blanca, m de materia colorante negra y adición de x_1 de materia colorante negra. Reflectancia W_2 . Relación entre masa total empleada en la elaboración de la materia colorante destinada a pintar la pantalla en la experiencia 2 y masa añadida de materia colorante negra para realizar la experiencia 3:

$$r_2 = \frac{M + m}{x_1}. \quad (6b)$$

Según Bottomley para esta serie de experiencias se podían aceptar las relaciones entre reflectancias expresadas en las Ecs. (3) y (4) siempre y cuando se cumpliera la igualdad:

$$\frac{M}{m} = \frac{M + m}{x_1}, \quad (7)$$

generada al considerar las proporciones de masas derivadas por comparación de la experiencia 2 respecto de la 1 –parte izquierda de la Ec. (7)- y de la experiencia 3 respecto de la 2 -parte derecha de la Ec. (7)–.

Con este modelo en mente obtiene la ecuación que le permite relacionar la reflectancia que permanece después de haber añadido n veces carbón⁵.

$$W_n = W_0 R^n, \quad (8)$$

donde W_0 es la reflectancia inicial y R :

$$R = 1 - p, \quad (9)$$

siendo p la fracción de reflectancia perdida en la experiencia n respecto a la observada en la $n - 1$.

Esta forma de razonar no satisfizo, sin embargo, del todo las expectativas de nuestro autor quien propone una segunda interpretación

⁵Esta expresión, término general de la serie de reflectancias que expresa esta magnitud para la experiencia n (W_n) a partir de la reflectancia observada en la experiencia primera en la que la pantalla se ha pintado sólo con materia colorante blanca, W_0 , se corresponde con un término general que describe la serie de cantidades de materia colorante negra a añadir en cada experiencia. Dicho término general se expresa en función de la cantidad inicial de materia colorante blanca, M , y de la primera adición de materia colorante negra, m (que en esta ecuación representaremos por x_0):

$$x_n = \left(\frac{M + x_0}{M} \right)^{n-1} x_0, \quad (8a)$$

que muestra una progresión geométrica de razón:

$$\frac{M + x_0}{M}, \quad (8b)$$

y termino inicial x_0 , con $n=1,2,3...$

en la que obtiene dicha fracción a partir de las propiedades físicas de las partículas de materia colorante, en concreto del área: Bottomley propone que la reflectancia de una superficie es proporcional a su área, en consecuencia, aquella podrá ser expresada como: $W_0 = \mu A$ (μ es un coeficiente de proporcionalidad artificioso introducido para lograr sus objetivos). De acuerdo con la argumentación anterior, si se añade una medida de carbón que en total ocupa un área a , la reflectancia que permanece vendrá dada por:

$$W_1 = \mu(A - a) = \mu A \left(1 - \frac{a}{A}\right), \quad (10)$$

donde, como vemos, a/A se puede identificar con p en la Ec. (3) (dando significado físico a dicho parámetro); por lo que W_1 podría expresarse igualmente como:

$$W_1 = \mu AR = W_0 R. \quad (11)$$

Por consiguiente, si la operación de adición es realizada n veces, el resultado vendrá dado por:

$$W_0 = W_0 R^n. \quad (12)$$

Como se aprecia, la Ec. (11) es idéntica a la Ec. (8). Bottomley afirma explícitamente haber tenido en cuenta que cuando una segunda medida es añadida, las partículas negras se sitúan igual tanto sobre partículas blancas como sobre negras; sin embargo, esta consideración ya estaba implícita en el razonamiento que condujo a la Ec. (8), cuando afirmaba que la reflectancia perdida era una proporción constante de la reflectancia inicial.

La Ec. (12) pone de manifiesto una de las inquietudes subyacentes en los trabajos colorimétricos de Bottomley: la pretensión de formalizar una ley que unificara los procesos de transmisión y reflexión luminosa en los que participaran materias colorantes. Esta pretensión se hallaba reforzada por la similitud con la formalización matemática introducida por Herschel [9] y subrayada por Bottomley [10] relativa al proceso de transmisión (T) de la radiación luminosa a través de una muestra líquida transparente y coloreada, obtenida al disolver Q unidades de materia colorante en un soluto transparente:

$$T = ak^Q. \quad (13)$$

En la expresión (13) a representa la intensidad del haz incidente y k , un coeficiente de transmisión. Como se aprecia, identificando Q en la Ec. (13) con n –que, recordemos, es el número de cantidades no iguales de carbón añadido (Véase la nota 5 a pie de página)– en la Ec. (12), la similitud es evidente.

Bottomley también trató de extender la aplicación de la ecuación colorimétrica, aquí representada por la Ec. (13), a la transmisión de luz a través de sólidos en suspensión [11-13]. Por ello no es de extrañar que los argumentos empleados para obtener la Ec. (12) relativa al progresivo oscurecimiento presentado por la pantalla blanca los utilice también para dichos sistemas físicos, aunque de una forma un tanto marginal⁶.

Tras la introducción del modelo físico con el que obtuvo la Ec. (12) lo inmediato era extender su aplicación a otras mezclas de colores; concretamente, Bottomley lo ajusta a mezclas de amarillo y negro, y de blanco y rojo. En el primer caso, obtiene que la reflectancia de la superficie pintada de color amarillo remanente (Y_n) al añadir n cantidades de carbón a la mezcla viene dada por la siguiente ecuación:

$$Y_n = Y_0 R^n. \quad (14)$$

donde Y_0 es la reflectancia inicial y R se expresa, al igual que en la ecuación (9), como:

$$R = 1 - p. \quad (15)$$

Igual que en las ecuaciones anteriores en las que aparece, p es la fracción de reflectancia perdida respecto a la inicial al añadirle una medida de carbón.

Para el segundo caso, como cabía esperar, los resultados no son muy diferentes, obteniendo una expresión similar para la reflectancia remanente (W_n) después de haber añadido n cantidades no iguales (véase la nota 5 a pie de página) de materia colorante roja:

$$W_n = W_0 R'^n, \quad (16)$$

donde W_0 es la reflectancia inicial que se detecta cuando la pantalla se halla pintada sólo con

⁶Los resultados experimentales no parecían corroborar la aplicación de la Ec. (13) a sólidos en suspensión con un nivel de confianza aceptable.

materia colorante blanca; por otra parte R' viene dada por una expresión similar a la (9) o (15):

$$R' = 1 - \frac{a}{A}. \quad (17)$$

La fracción a/A representa la porción de área que ocupan las partículas rojas sobre las blancas, manteniendo el significado físico del parámetro p que aparece en las Ecs. (9) y (15); es decir, la fracción de la reflectancia de la radiación de partida perdida cada vez que era añadida una cantidad de materia colorante diferente⁷ (carbón para oscurecer o rojo para enrojecer).

Conviene destacar en este punto una puntualización relevante, según nuestra opinión, traída a colación por Bottomley: en todos los razonamientos expuestos, el autor supone que las moléculas se distribuyen homogéneamente sobre la superficie en la que son depositadas, sin mostrar preferencia por posiciones en concreto; sin embargo, Bottomley subraya el efecto que tendría la existencia de fuerzas ejercidas por las moléculas, de forma que se crearán centros de atracción que condujeran a una distribución no homogénea sobre la superficie. Esto conduciría a desviaciones experimentales respecto a las ecuaciones expuestas; no obstante, el autor destaca la importancia de este hecho porque ayudaría a estudiar dichas fuerzas, confirmando una utilidad nueva a la "colorimetría".

El interés del argumento radica en que Bottomley se refiere a fuerzas físicas del tipo Van der Waals descritas por el químico holandés en su tesis doctoral defendida en 1873 [14] y sobre las que Maxwell daría noticia en el ámbito científico británico en la revista *Nature* [15], lo que nos lleva a la conclusión de que la propuesta de Bottomley realizada unos seis años después se halla encuadrada en el ambiente más vanguardista de la química de la época⁸.

⁷No especifica si está pensando en alguna sustancia concreta; parece, más bien, un ejercicio matemático que busca darle, cómo ya se ha comentado, un carácter más general a la Ec. (13).

⁸Esta consideración es concordante con la interpretación que Bottomley realiza sobre el carácter reversible de la reacción entre bórax y yodo [4].

3. Corroboración experimental

Bottomley avala sus propuestas conceptuales mediante una serie de experimentos colorimétricos desarrollados con anterioridad a la formulación de las mismas. Para ello confecciona tres pantallas con diferentes reflectancias mediante el procedimiento, ya mencionado en el apartado 2 de este trabajo, consistente en añadir a una determinada cantidad de sulfato de bario, tres cantidades diferentes de "lampblack"⁹ p , q y r . Estas pantallas, designadas en lo sucesivo A , B y C , son visionadas de dos en dos interponiendo entre ellas y el observador una disolución oscura preparada al disolver en agua una cierta cantidad de carbón ("lampblack"), aunque no hace constar qué cantidad. Suponemos que para hacer posible esta operación, se debía de hacer necesario observar cada muestra a través de una disolución diferente, aunque de la misma concentración.

El proceso de comparación comprendía la igualación¹⁰ de la transmitancia de la luz procedente de dos de las pantallas, por ejemplo las que contienen las cantidades p y q , con diferente reflectancia, a través de las disoluciones oscuras. Lograda dicha igualación, combinando la ecuación que permite obtener la luz transmitida a través de una disolución de espesor dado¹¹ con la Ec. (12), podemos escribir:

⁹Las cantidades con las que se prepararon las muestras fueron 10 gramos de bario triturado y 0.012, 0.024 y 0.048 g de "lampblack" (sustancia oscura confeccionada a partir de hollín).

¹⁰Las muestras son situadas debajo de un tubo de ensayo conteniendo la disolución oscura, la longitud de la cual podía ser variada sin más que añadir más cantidad de disolución; el observador posiciona el ojo sobre el tubo.

¹¹Dicha ecuación, si no tenemos en cuenta la descomposición espectral de la luz, puede ser expresada del siguiente modo para el caso que nos ocupa:

$$I_n k^t = I_{nt},$$

donde I_n representa la intensidad incidente sobre la disolución y que procede de una superficie a la que se le han añadido n cantidades de lampblack; k , un coeficiente de transmisión; t , el espesor de la disolución, y I_{nt} , la intensidad transmitida. Si suponemos que la disolución recibe la luz de una superficie sobre la que incide una intensidad I_0 , dividiendo por esta cantidad obtenemos reflectancia y transmitancia:

$$\frac{I_n}{I_0} k^t = \frac{I_{nt}}{I_0} \rightarrow W_n k^t = T_{nt},$$

$$W_0 R^p k^\theta = W_0 R^p k^{\theta'}, \quad (18)$$

donde θ y θ' son las longitudes correspondientes a los caminos ópticos a través de las disolución oscuras que permite igualar las transmitancias.

De la misma forma, para las pantallas elaboradas con las cantidades q y r de carbón, permite establecer la igualdad:

$$W_0 R^q k^t = W_0 R^r k^{t'}, \quad (19)$$

siendo ahora t y t' los nuevos caminos ópticos a través de la disolución.

Las Ecs. (18) y (19) permiten establecer:

$$R = k^{\frac{\theta' - \theta}{p - q}}, \quad (20)$$

$$R = k^{\frac{t' - t}{p - r}}, \quad (21)$$

expresiones de las que se podía derivar la siguiente igualdad:

$$\frac{\theta' - \theta}{p - q} = \frac{t' - t}{p - r}, \quad (22)$$

más práctica desde un punto de vista empírico, si se quería hacer comprobaciones rápidas y sencillas.

Con sus experiencias, Bottomley obtiene para R los resultados:

$$R = k^{0.3}, R = k^{0.346}, R = k^{0.4}.$$

El primer valor lo obtiene al comparar A con B ; el segundo, A con C , y el tercero, B con C . Estos resultados resultaron satisfactorios para nuestro autor. En un posterior ensayo, Bottomley sustituyó la muestra A por otra en la que la cantidad de "lampblack" añadida era 0,4003 g (con lo que se aumentaba considerablemente esta sustancia con respecto a las muestras anteriores), obteniendo un valor de R al comparar dicha muestra con la B , mucho mayor que el obtenido en los primeros ensayos; es decir, que $R = k^{0.3}$, pero no indica dicho valor.

4. Mejoras del modelo teórico

Bottomley, aunque en principio parece satisfecho, trató de explicar la dispersión de los resultados obtenidos en el conjunto de experiencias anteriores sirviéndose de dos argumentos. En primer lugar, toma en consideración la falta de homogeneidad en las muestras fabricadas. Según el autor, para preparar las pantallas, el sulfato de bario y el polvo obtenido del carbón eran disueltos en agua para poder ser aplicados como una pintura. Cuando esta última tarea era realizada, y antes de que la muestra se hubiera secado, sobre el cartón se creaba un medio líquido en el cual dos tipos de partículas se encontraban en suspensión, poseyendo cada una de ellas una movilidad diferente en virtud de sus diferentes masas. El autor supone que las más pesadas se debían depositar en el fondo en mayor concentración y, las más ligeras, tenderían a situarse próximas a la superficie.

Por otra parte, establece el hecho de que el material utilizado para oscurecer el sulfato de bario, el "lampblack", no era una sustancia totalmente negra, ya que al interponer un objeto entre dicha sustancia y una fuente de luz, aparece sobre la misma la sombra del objeto. Basándose en esto Bottomley piensa que el modelo de partida debe ser modificado, lo que le llevará a obtener una ecuación ligeramente diferente.

Nuestro autor emplea dos líneas argumentales para introducir las modificaciones oportunas, de acuerdo con lo expresado en el párrafo anterior, y conseguir que el modelo físico se correspondiera de la forma más precisa posible con los resultados experimentales obtenidos.

En primer lugar, considera que al aplicar a la pasta de sulfato de bario, una cierta cantidad de materia oscura, parte del blanco es sustraído (tal como había argumentado para la obtención de la Ec. (3)); pero, teniendo en cuenta que el "lampblack" no representa una sustancia totalmente negra (contiene un porcentaje de blancura), se le debe "devolver" a la blancura de la pasta inicial una parte de ese blanco "teóricamente" sustraído. Si identificamos esa proporción que hay que devolver por la letra h ,

donde W_n es la reflectancia de la superficie como la hemos venido empleando a lo largo del artículo, y T_{nt} es la transmitancia de la disolución. Este último concepto, para enlazar con los parámetros que han sido empleados para mostrar una concepción actual del trabajo de Bottomley, puede perfectamente ser entendido como la reflectancia de la superficie objeto de estudio, pero observada a través de la disolución.

Bottomley obtiene para la reflectancia que permanece tras la adición de n cantidades sucesivas de materia colorante negra, la expresión:

$$W_n = W_0 R^n + W_0(1 - R^n)h = W_0 R^n(1 - h) + W_0 h. \quad (23)$$

A esta misma expresión, llega Bottomley siguiendo una segunda línea argumental centrada en consideraciones de índole atomística: si a es el área ocupada por puntos oscuros, cómo estos también reflejan cierta cantidad de luz, esta será evaluable a partir del coeficiente μ_1 (el concepto es el mismo que el empleado para la superficie blanca, pero ahora el coeficiente de proporcionalidad del área gris es menor, $\mu_1 < \mu$) de forma que estos puntos contribuyen con la cantidad a a la reflectancia. De acuerdo con estos considerandos, Bottomley concluye¹²:

$$W_n = \mu A(R^n(1 - h) + h). \quad (24)$$

Ecuación idéntica a la Ec. (23) si se interpreta μA como W_0 . Esta nueva formulación de la reflectancia residual tiene la ventaja de que permite dar un significado físico a cada parámetro, especialmente al parámetro h , tal y como se explicita en la nota 12 a pie de página.

Bottomley concluye que esta segunda interpretación parece más satisfactoria al fundamentarse en un modelo que podemos designar como "atomístico"; sin embargo, no plantea ninguna prueba experimental destinada a verificar la bondad de la Ec. (24).

5. Aplicación al oficio de grabador

Enlazando con el oficio de grabador que, como hemos mencionado en la introducción, fue el ejercido por su abuelo, su tío y su padre, nuestro autor trata de aplicar lo desarrollado en los apartados anteriores al arte del grabado. Éste consistía en trazar rayas paralelas, o puntear de

negro, sobre una superficie blanca. Tales puntos o rayas serían tan diminutos que haría imposible su apreciación individual. Tomando como punto de partida el trazado de rayas oscuras, el autor llega a la siguiente expresión que le permite obtener la reflectancia de la superficie después de haber trazado n líneas de grosor b y longitud l :

$$W_n = \mu A \left(1 - \frac{nbl}{A} \right) = W_0(1 - nr), \quad (25)$$

donde μA , como antes, es W_0 , es la reflectancia de partida y r es el cociente bl/A .

Finalmente, se plantea qué ocurre cuando las líneas no son paralelas, sino que se cruzan perpendicularmente, o, si en lugar de líneas, lo que dibuja son puntos, llegando a un resultado que difiere ligeramente del anterior.

6. Irrupción del concepto de átomo en el modelo de Bottomley sobre el color reflejado

Con posterioridad a la presentación pública, nuestro autor remitió a *Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society* [16] una nota aclaratoria sobre los comentarios surgidos en dicho acto en el turno de preguntas y comentarios. La comunicación de Bottomley suscitó el interés de James Heelis, quien sugiere que las partículas de color negro que son esparcidas sobre la superficie blanca pueden disponerse, en algunos casos, unas sobre otras; pero no como ya había considerado Bottomley, como consecuencia de operaciones de adiciones sucesivas de cantidades iguales de carbón, sino en una misma operación de adición. La respuesta de Bottomley fue que, si bien este hecho no modifica la ecuación fundamental, sí puede afectar a la constante¹³ R ; ya que si la menor partícula negra es el átomo, que ocupa un área p ; al considerar que una unidad de masa de

¹²La reflectancia de toda la superficie vendrá dada por $\mu_1 a + \mu(A - a) = \mu AR + \mu_1 a$, donde identificamos $R = 1 - (a/A)$, siendo A el área ocupada por partículas blancas y a el área ocupada por partículas negras. Siguiendo los razonamientos que llevaron a la Ec. (12), al repetir n veces la operación, la superficie blanca remanente será AR^n , y la oscura $A - AR^n$; por lo tanto, la reflectancia se obtiene de $\mu AR^n - \mu_1(A - AR^n)$. Agrupando los términos de esta ecuación de forma apropiada obtenemos la Ec. (24). Es importante destacar que con esta interpretación: $h = \mu_1/\mu$.

¹³En realidad, esta discusión sería superflua si no fuese por la aportación (que no se sabe quién la hace, si James Heelis o Bottomley) consistente en sugerir que el átomo es la unidad materia mínima capaz de reflejar luz. El parámetro a que aparece en la Ec. (10), como define el autor, es el área oscurecida que se obtiene al añadir una medida de carbón; pero este valor no tiene porque ser igual al número de átomos multiplicado por el área que cubre cada uno de ellos; puede ser perfectamente de valor más pequeño, con lo que estaríamos teniendo en cuenta la sugerencia de James Heelis.

materia contiene p átomos, la reflectancia remanente será:

$$W_1 = W_0 \left(1 - \frac{\rho}{A}\right)^p, \quad (26)$$

ecuación obtenida empleando los mismos razonamientos que Bottomley expuso en su lectura [6,7], pero considerando aquí que una cantidad añadida es simplemente la adición de un átomo, y lo hace de uno en uno, hasta completar p átomos. Dado que la posibilidad de superposición de partículas ya se tuvo en cuenta para obtener la Ec. (12), se deduce que lo mismo ocurre para la Ec. (26). Si se añaden n cantidades de masa con p átomos cada una, la reflectancia remanente vendrá dado por:

$$W_n = W_0 \left(1 - \frac{\rho}{A}\right)^{p+n}. \quad (27)$$

Al identificar R con $\left(1 - \frac{\rho}{A}\right)^p$, la expresión queda como $W_0 R^n$, por lo que concluye que la ecuación ahora obtenida (Ec. (27)) es idéntica, con la nueva interpretación de R , a la inicialmente considerada (Ec. (8)).

Con la aportación consistente en la introducción del concepto de átomo, Bottomley trabaja la Ec. (12) para reducirla a otra más simple. Para ello parte de la expresión explícita de esta misma ecuación:

$$W_n = W_0 \left(1 - \frac{a}{A}\right)^n, \quad (28)$$

reescribiéndola como:

$$W_n = W_0 e^{n \ln \left(1 - \frac{a}{A}\right)}. \quad (29)$$

Desarrollando en serie de McLaurin el exponente de esta ecuación obtenemos¹⁴:

$$n \ln \left(1 - \frac{a}{A}\right) = n \left(-\frac{a}{A} - \frac{a^2}{2A^2} \dots \right). \quad (30)$$

Por ello, la Ec. (29) puede reescribirse¹⁵ como:

¹⁴Conviene recordar que:

$$\ln(1+x) = \sum (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

¹⁵Si en la Ec. (30) operamos el paréntesis del lado derecho de la igualdad (despreciando los términos a partir del que está elevado al cubo), obtenemos los siguientes términos:

$$1^{er} = -n \frac{a}{A}, \quad (a1)$$

$$W_{n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} = A e^{-\frac{b}{A}}. \quad (31)$$

Bottomley indica que fue James Heelis quien le sugirió la forma simplificada – Ec. (31) – de la Ec. (30), aunque él sólo menciona que le sugirió la ecuación en sí; el desarrollo matemático, como hemos indicado en la nota 16 a pie de página, y las referencias al átomo parecen haber sido introducidas por Bottomley. En cualquier caso, da la impresión de que han sido mostradas con la intención de criticar los argumentos de James Heelis. Efectivamente, la aparición de la indeterminación matemática que aparece en los razonamientos que conducen a la Ec. (31) (véase nota 15 a pie de página) es superada asignando significado físico tanto a los parámetros que aparecen en dicha ecuación como a los que aparecen en la Ec. (32), como veremos más adelante, resultado de la aportación final que Bottomley hizo en el mismo artículo. Añade que la constitución atómica de la materia era un inconveniente para la total aceptación de la Ec. (31): el tamaño de la cantidad más pequeña de materia que podemos concebir vendría limitado por el tamaño finito del átomo, por lo que no cabía hacer tender dicho valor a cero¹⁶. Nuestro

$$2^o = -n \frac{a^2}{2A^2}, \quad (a2)$$

Si en la expresión (a1) hacemos tender n a infinito (lo que no ocurrirá en la práctica, pero sirve para extrapolar lo que sucede si el número de cantidades añadidas fuese muy grande) y a a cero (teniendo en mente que estamos considerando el área de los átomos), se llega a la siguiente indeterminación: $0 \cdot \infty / A$. Sin embargo, este último resultado parece introducido para criticar el argumento de James Hellis, pues Bottomley sugiere que puede ser fácilmente resuelto si se tiene en cuenta que a , al ser el área ocupada por una medida de sustancia tomada para oscurecer la pasta blanca de sulfato de bario, y n , la cantidad de medidas añadidas, na es, de alguna manera, una medida de la cantidad total de sustancia añadida que representaremos por la letra b . Con estas consideraciones, las expresiones (a1) y (a2) pueden ser escritas en la siguiente forma:

$$1^{er} = -\frac{b}{A}, \quad (a3)$$

$$2^o = -\frac{ba}{2A^2}, \quad (a4)$$

La expresión (a4), por presentar A^2 en el denominador, puede ser dejada al margen de las consideraciones matemáticas por lo que, finalmente, el segundo miembro de la Ec. (24) se reduce al término (a3).

¹⁶Parece, en consecuencia, que los argumentos que Bottomley expone y que conducen a la Ec. (31) son de James Heelis y por eso la crítica. Pero, entonces, ¿de quién es la idea

autor afirma que esto ocurre en numerosos razonamientos matemáticos que, con posterioridad, vienen limitados por los condicionantes del modelo físico empleado.

Bottomley, finalmente sugiere otra línea de razonamiento capaz de incluir la propuesta de Heelis, para lo cual conecta el parámetro b con otros no carentes de significado físico¹⁷. El parámetro a de la Ec. (30) que aparece en el exponente podría ser obtenido a través del producto¹⁸ $pn\rho$; donde p , como ya se ha dicho, es la cantidad de átomos en la unidad de masa; n , el número de unidades de masa añadidos, y ρ , el área ocupada por un átomo. De acuerdo con esto y con la propia Ec. (30), la Ec. (29) queda en la forma:

$$W_n = W_0 e^{-\frac{pn\rho}{A} - \frac{pn\rho^2}{2A^2}}, \quad (32)$$

en la que el segundo término de la exponencial puede ser eliminado, dado que es un infinitésimo de orden superior al primero. De esta manera, Bottomley afirma que asigna significado físico a lo que en la propuesta de Heelis no lo tenía.

7. Conclusiones

Bottomley vivió una época que podría ser calificada como de crisis en el ambiente científico de la Inglaterra victoriana. Los usos tradicionales de la industria británica, al entrar en confrontación con sus correspondientes en el continente, demostraron ser abiertamente más ineficaces [17]: se confiaba más en el conocimiento transmitido por la tradición para fundamentar la producción y la puesta en marcha de grandes proyectos que en la de la eficacia en la aplicación sistemática del método científico. Esta desventaja queda claramente

manifiesta en grandes fracasos como fue, por ejemplo, el tendido del cable telegráfico atlántico.

Bottomley se inserta en la corriente regeneradora que trató de cambiar la deriva que llevaba la ingeniería y la ciencia británica a partir del último cuarto del siglo XIX. En este trabajo, aunque por los títulos de los artículos de Bottomley pueda conducir a engaño, nuestro autor estudia la aplicabilidad de la ley colorimétrica (transmitancia) a la reflexión en una pantalla pintada con una mezcla binaria de materias colorantes (reflectancia) sin pretender con ello crear ningún sistema de patrones estables que posibilitaran la identificación del color de los objetos y con ello su replicación en otros, y llega a cuantificar matemáticamente la reflectancia en los procesos del grabado aplicando dicha ley. Por último, llega a emplear, e introducir en sus cálculos, el concepto de átomo como unidad más pequeña capaz de absorber o reflejar color. Todo ello desarrollado con la correspondiente sanción experimental.

de introducir el átomo como la menor partícula capaz de reflejar luz?

¹⁷Este punto del artículo parece confuso porque en el razonamiento que aparece en el artículo [16] y que conduce a la Ec. (31), para superar el problema de la indeterminación (vease nota 16 a pie de página), Bottomley le asigna significado físico a cada uno de los parámetros y , como consecuencia, a b .

¹⁸La introducción de este producto no parece muy afortunada, porque, si unos átomos pueden superponerse a otros, el área total cubierta en una medida nunca será igual al área de un átomo multiplicada por el número de átomos, como hemos mencionado en la nota 12.