

doi: 10.5862/MCE.49.4

Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли

*Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»*

Аннотация. Оценивается деформация упругой статически определимой консольной фермы увеличенного внутреннего объема под действием изгибающих и скручивающих нагрузок для произвольного числа поясов конструкции.

Увеличение объема достигается заменой плоских боковых граней фермы выпуклыми. Усилия в стержнях определяются аналитически методом вырезания всех неопорных узлов фермы. Выведены простые аналитические выражения для прогиба, позволяющие выбрать оптимальные размеры и асимптотически сравнить конструкцию по гибкости с аналогичными известными системами.

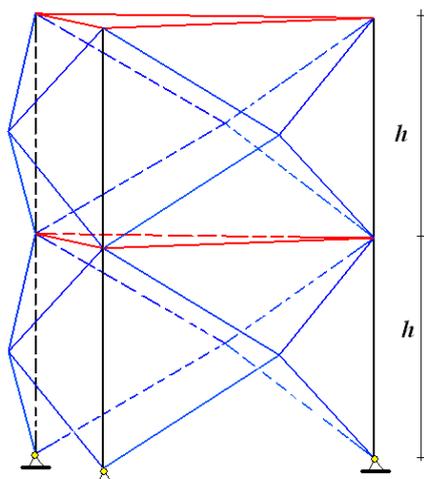
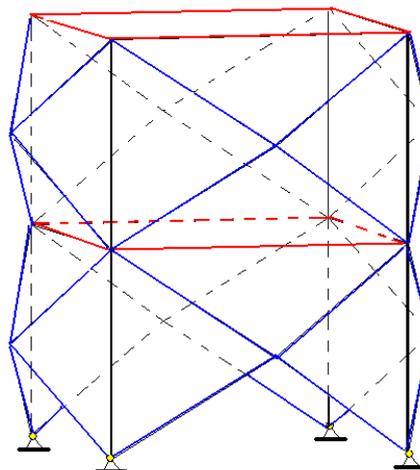
Показано, что гибкость предлагаемой конструкции сравнима с известными системами. Графики зависимости прогиба от размеров и числа поясов обнаруживают экстремумы, что позволяет оптимизировать геометрию фермы. Получены точные формулы для параметров оптимальной по прогибу фермы. Использован индуктивный метод при поддержке системы компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: деформации; метод индукции; пространственная ферма; консоль; кручение

Несмотря на широкое распространение в практике пространственных ферм, аналитические расчеты усилий и конечные формулы для них достаточно редки [1–5]. Задачи повышения прочности и оптимизации, как правило, решаются численно, с применением различных специализированных пакетов и программ [6–15]. Известно [1], что в некоторых случаях численные методы не в состоянии выявить особенности конструкции, найти ее слабые места. Аналитические методы, ставшие более доступными с появлением систем символьных преобразований [16, 17], позволяют проводить исследования сложных (в основном регулярных [18]) конструкций и получать практические формулы с достаточно широким спектром применения. В настоящей работе для расчета и анализа статически определимых систем развивается индуктивный метод [1–5] на основе системы аналитических вычислений Maple.

Схема конструкции

Ферма представляет собой пространственную статически определимую конструкцию, состоящую из шарнирно соединенных между собой стержневых треугольников (рис. 1, 2). По высоте ферма разбита на n поясов одинаковой высоты h . В общем случае ферма может иметь k граней (рис. 1, 2). Горизонтальные стержни образуют в плане правильные многоугольники, вписанные в окружность радиуса r (при $k=3$ – треугольники, рис. 1). Через шарниры их вершин проходят стержни вертикальных стоек. Боковые стороны пояса – стержни, соединенные по четыре в правильные пирамиды. Основное назначение таких пирамид – увеличение внутреннего объема конструкции. В более простом и распространенном варианте аналогичной фермы вместо четырех стержней пирамиды используется один диагональный стержень (ниже такая ферма будет принята за ферму сравнения при оценке жесткости системы, рис. 7, 8). Вершины пирамиды также расположены на горизонтальных окружностях радиуса R (рис. 2, 3) и образуют правильный многоугольник. Каждый пояс содержит $6k$ стержней. Стержни нижнего пояса опираются на шарнирные опоры.

Рисунок 1. $n = 2, k = 3$ Рисунок 2. $n = 2, k = 4$

Рассмотрим случай фермы с треугольным основанием, $k = 3$ (рис. 1). Зададимся геометрией фермы, характеризующейся тремя размерами: h, R, r и числом поясов n , $H = nh$ – общая высота фермы. Введем систему координат с началом в центре тяжести верхнего горизонтального сечения, ось z направим вниз. Получим:

$$\begin{aligned} x_i &= r \cos(\varphi(i-1)), y_i = r \sin(\varphi(i-1)) = 0, z_i = 0, \\ x_{i+k+t} &= R \cos(\varphi i - \varphi/2), y_{i+k+t} = R \sin(\varphi i - \varphi/2) = 0, z_{i+k+t} = h(2j-1), \\ x_{i+2k+t} &= r \cos(\varphi i - \varphi), y_{i+2k+t} = r \sin(\varphi i - \varphi) = 0, z_{i+2k+t} = 2hj, \end{aligned}$$

где $\varphi = 2\pi/k$, $i = 1, \dots, k$, $t = 2k(j-1)$, $j = 1, \dots, n$, $k = 3$.

Алгоритм расчета был составлен с перспективой расширения объекта исследования до ферм с большим числом боковых граней k . Принцип составления системы уравнений метода вырезания узлов основан на вычислении направляющих косинусов усилий, вычисляемых по заданным координатам, и организации их записи в матрицу G [6]. Уравнения равновесия сводятся к системе $G\vec{X} = \vec{Y}$, где \vec{X} – вектор усилий в стержнях, \vec{Y} – вектор нагрузок. Для решения системы линейных уравнений в символьном виде применялась операция вычисления обратной матрицы, имеющая в системе Maple простой вид $G^{-1} = 1/G$. С помощью обратной матрицы решение системы получается умножением матрицы на вектор нагрузок $\vec{X} = G^{-1}\vec{Y}$. Такой несколько необычный прием не требует вызова специализированного пакета LinearAlgebra и сокращает время преобразований.

Изгиб

Рассмотрим нагружение конструкции в верхнем поясе горизонтальной сосредоточенной силой, направленной вдоль оси x (рис. 3). При этом консольная ферма в целом условно работает на изгиб. Результатом работы программы являются следующие аналитические выражения для усилий в i -м поясе фермы:

$$\begin{aligned} S_i^I &= S_i^{VI} = -S_i^{II} = -S_i^{III} = -(1/3R)\sqrt{R^2 + r^2 + h^2} - Rr, \\ V_i^I &= -2(2i-1)h/r, V_i^{II} = (2i-1)h/r, T_1^I = \sqrt{3}(R+r)/(9r), T_1^{II} = -\sqrt{3}(2R-r)/(9r), \\ & i = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Отметим, что усилия S_i в боковых пирамидальных гранях фермы не зависят от номера пояса i и отличны от нуля на боковых (по отношению к направлению оси x) гранях. Естественная симметрия усилий в этих гранях выполняется. На третьей, задней, грани усилия в каждом из четырех стержней пирамиды равны нулю (эти усилия на рисунке 4 не обозначены). В верхнем горизонтальном поясе усилия T отличны от нуля, во всех других они нулевые при данной нагрузке: $T_i^I = T_i^{II} = 0, i = 2, \dots, n$.

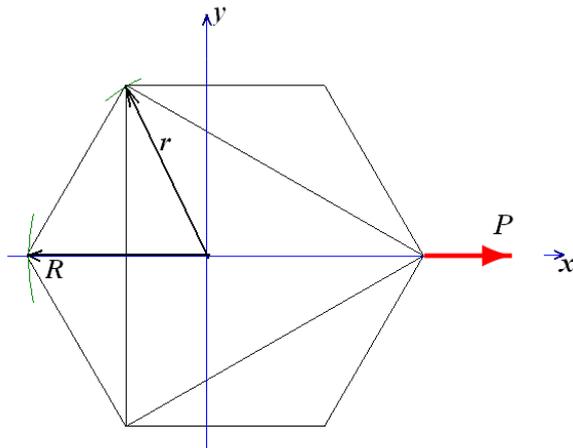


Рисунок 3. Изгиб

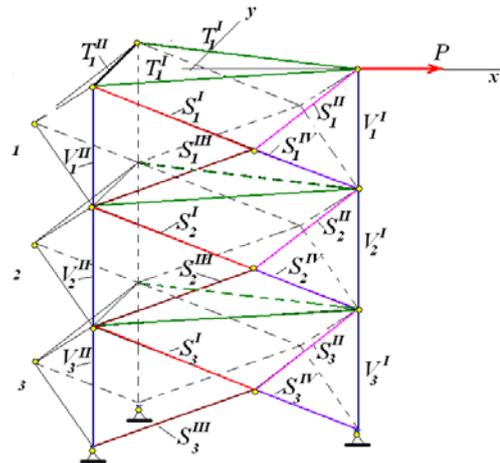


Рисунок 4. Обозначения усилий ($n = 3$)

Прогиб (перемещение точки приложения силы по оси x) определяем по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = P \sum_{j=1}^m \frac{S_j^2 l_j}{EF}, \tag{1}$$

где E – модуль упругости стержней; F – площадь сечения стержней (одинаковые для всей конструкции); l_j и S_j – длина j -го стержня и усилие в нем от действия единичной силы; $j = 1, \dots, m$. Всего в конструкции $m = 6kn$ стержней. Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$. Методом индукции после некоторых преобразований получим относительный прогиб верхнего узла фермы

$$\tilde{\Delta} = \frac{A_n (R^2 + r^2 + h^2 - Rr)^{3/2} + 12B_n h^3 + r\sqrt{3}(r^2 + 2R^2)}{9r^2}, \tag{2}$$

где $A_n = 8n$, $B_n = n(4n^2 - 1) / 3$. Если линейная зависимость от числа n в коэффициенте A_n легко угадывается, то коэффициент B_n получен в системе Maple [16, 17] обобщением последовательности 1, 10, 35, 84, 165, 286... . Для получения общего члена последовательности применялась функция `rgf_findrecur` из пакета `genfunc`, возвращающая рекуррентное уравнение

$$B_n = 4B_{n-1} - 6B_{n-2} + 4B_{n-3} - B_{n-4}.$$

Для решения этого уравнения использовался оператор `rsolve` [1, 16]. Для фермы заданной высоты $H = nh$ зависимость прогиба от числа поясов n обнаруживает минимум (рис. 5). При этом выявляется несколько неожиданный результат – с увеличением радиуса R (отвечающего за условную высоту стержневых «пирамид» по бокам фермы) прогиб не падает, а наоборот, растет (R на рисунке в метрах). Зависимость прогиба от радиуса R также обнаруживает минимум (рис. 6).

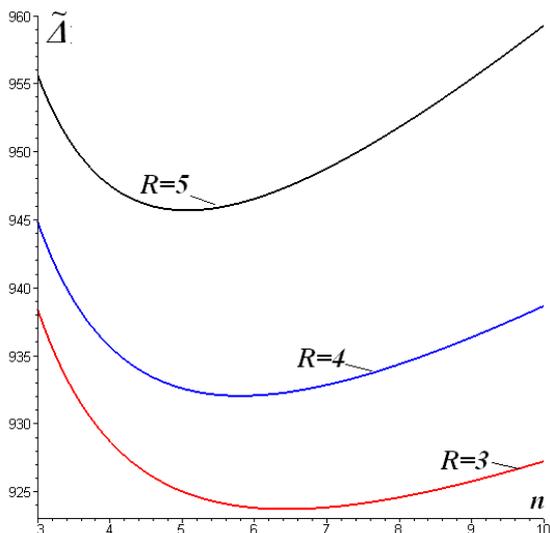


Рисунок 5. $H = 20 м, r = 4 м$

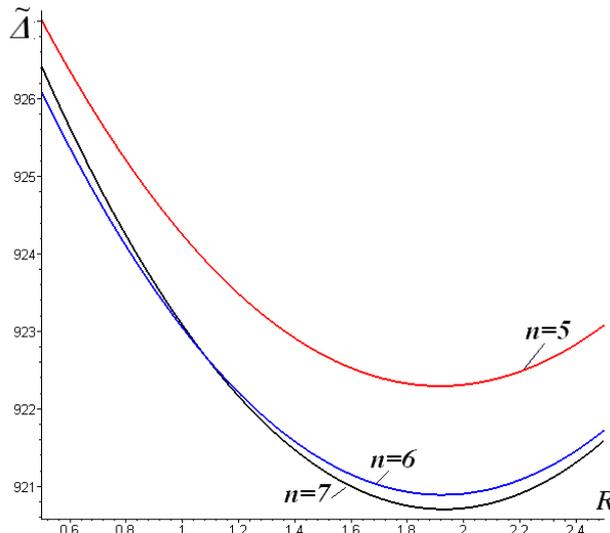


Рисунок 6. $H = 20 м, r = 4 м$

Асимптотическое сравнение

Исследуемая ферма, безусловно, сложнее общепринятой простой статически определимой фермы, где вместо «пирамид» на боковых гранях расположен простой диагональный стержень (рис. 7, 8). Фермы 1 и 2 отличаются ориентацией диагональных стержней на боковых гранях. Сравним исследуемую ферму и фермы 1 и 2 по жесткости. Проведя индуктивный анализ прогибов ферм 1 и 2 (этот анализ получается проще, так как стержней меньше), получим по формуле Максвелла – Мора прогибы $\tilde{\Delta}_1$ и $\tilde{\Delta}_2$ соответственно для ферм сравнения 1 и 2:

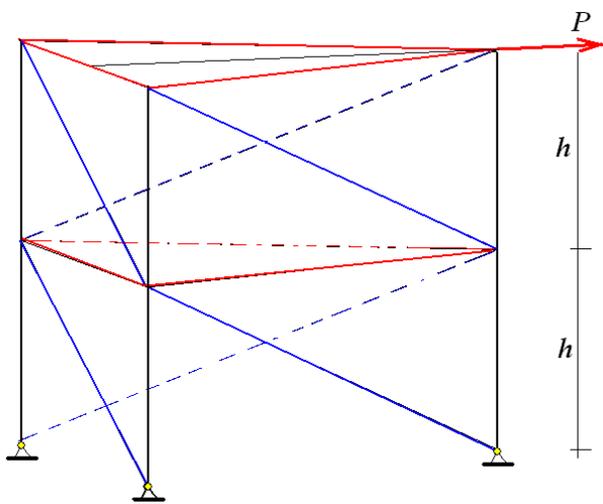


Рисунок 7. Ферма сравнения 1

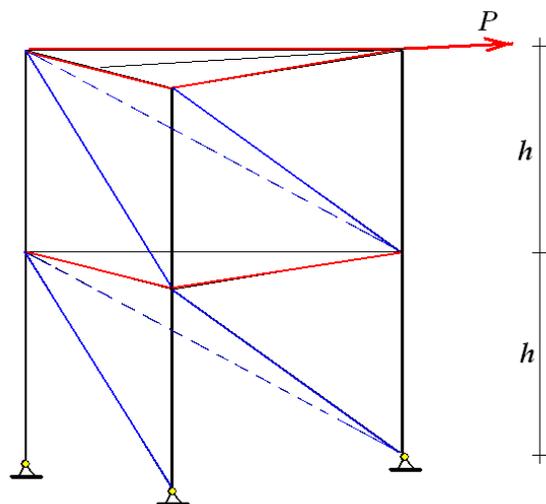


Рисунок 8. Ферма сравнения 2

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{2n(3r^2 + h^2)^{3/2} + 2n^3h^3 + 3(2n - 1)\sqrt{3}r^3}{9r^2}, \tag{3}$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \frac{2(n(3r^2 + h^2)^{3/2} + n(n^2 + (1 - n) / 2)h^3 + 3n\sqrt{3}r^3)}{9r^2},$$

где введены обозначения для относительных величин $\tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 EF / P$, $\tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 EF / P$.

Зависимость прогибов от числа поясов при постоянной высоте $H = nh$ позволяет найти предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} / \tilde{\Delta}_3 = 2\sqrt{3} / 9 \approx 0,385$, показывающий, что гибкость исследуемой

Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли

фермы (рис. 1) приблизительно в три раза меньше гибкости ферм сравнения (рис. 7, 8), и это отношение не зависит от размеров R, r, H конструкции.

Кручение

Для определения жесткости конструкции на кручение приложим к вершинам верхнего стержневого треугольника осесимметричным образом три горизонтальные сосредоточенные силы P (рис. 9). По формуле Максвелла – Мора получим окружное смещение одной из вершин (по оси y , для вершины с координатами $(r, 0, 0)$):

$$EF\Delta^\varphi = P \frac{4n(R^2 + r^2 + h^2 - Rr)^{3/2}}{3R^2}. \quad (4)$$

Как и в задаче об изгибе при заданной высоте $H = nh$ конструкции, кривая $\tilde{\Delta}^\varphi(R) = \Delta^\varphi EF / P$ зависимости прогиба от радиуса R обнаруживает минимум, значение которого достигается при

$$R = \frac{1}{4} \left(\sqrt{33r^2 + 32(H/n)^2} - r \right) \quad (5)$$

В частном случае при $R = r$ минимум зависимости $\tilde{\Delta}^\varphi(R)$ достигается для $r = \sqrt{2}H/n$ (рис. 10, радиус r в метрах).

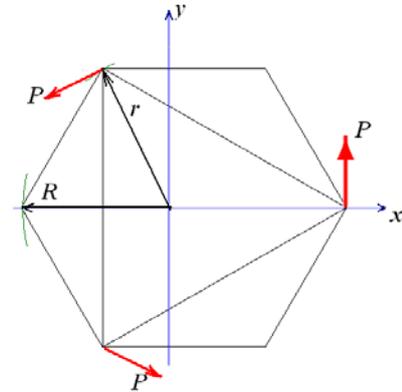


Рисунок 9. Кручение

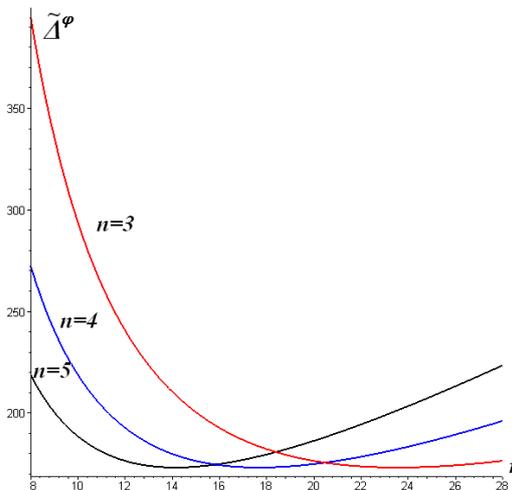


Рисунок 10. Кручение фермы, $H = 50$ м

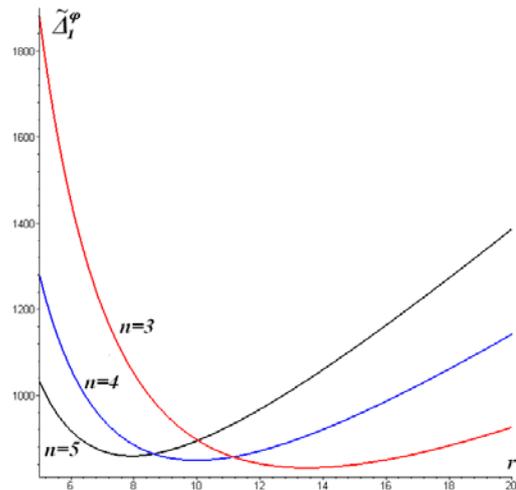


Рисунок 11. Кручение фермы сравнения 1, $H = 50$ м

Окружное смещение для призмы сравнения 1 под действием такой же крутящей нагрузки в зависимости от числа поясов и размеров получается индуктивно и имеет вид

$$EF\Delta_1^\varphi = P \frac{4n(h^3 + (3r^2 + h^2)^{3/2}) + 3\sqrt{3}(4n-3)r^3}{3r^2}. \quad (6)$$

Соответствующая кривая $\tilde{\Delta}_1^\varphi(R)$ (рис. 11) также обнаруживает минимум. Аналитическое выражение для экстремального радиуса, подобное (5), здесь получить не удастся (хотя ферма и проще). Предельное отношение относительных прогибов (4) и (6) при $\tilde{\Delta}_1^\varphi = \Delta_1^\varphi EF / P$ зависит от радиусов R и r .

Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}^\varphi / \tilde{\Delta}_1^\varphi = \frac{\sqrt{3}(R^2 + r^2 - Rr)^{3/2}}{18rR^2}.$$

При $R = r$ это число равно $\sqrt{3}/18 \approx 0,096$, т. е. на кручение ферма повышенного объема по отношению к стандартной ферме сравнения приблизительно в 10 раз менее жесткая. Этот факт подсказывает проектировщику, что необходимо принимать меры по увеличению жесткости конструкции, в частности, это возможно за счет перераспределения материала по стержням [5, 18–20].

Численный пример расчета. При высоте мачты антенной конструкции, равной 20 м, с $n = 10$ секциями и тремя стойками (например, мачта типа МТП без оттяжек), $R = r = 1$ м, по формуле (2) имеем горизонтальное смещение мачты от действия изгибающей силы $P = 1000$ Н, равное 0,367 м. Стойки мачты выполнены из стальных труб длиной 2 м, диаметром 6 см с толщиной стенки 1 мм. При действии трех скручивающих сил $P = 1000$ Н линейное смещение точек верхнего контура этой же конструкции по формуле (6) равно 3,83 мм. Эти значения близки к оптимальным для данной конструкции. Некоторое изменение соотношения числа секций и радиусов R и r приводит к снижению жесткости конструкции (рис. 5, 6).

Выводы

На основе индуктивного метода с помощью системы компьютерной математики Maple получены аналитические формулы для прогибов консольной фермы с боковыми гранями пирамидальной формы в зависимости от числа поясов и размеров фермы. Проведено асимптотическое сравнение результатов с простыми фермами с плоскими гранями тех же размеров. Найдены оптимальные по жесткости геометрические параметры фермы. Все результаты легко обобщаются на фермы с большим числом боковых граней.

Литература

1. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. №5. С. 11–15.
 2. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. №6(24). С. 28–34.
 3. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
 4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49–53.
 5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. № 5. С. 5–8.
 6. Ramaswamy G. S., Eekhout M., Suresh G.R. Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames. London: Thomas Telford Publishing, 2002. 242 p.
 7. Narayanan S. Space Structures: Principles and Practice. U.K., Essex, Brentwood: Multi-Science Publishing Company, 2006. 844 p.
 8. Chilton J. Space Grid Structures. U.S.A. Woburn, MA: Architectural Press, 2000. 180 p.
 9. Gasbarria P., Montia R., Sabatinib M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // Acta Astronautica. 2014. Vol. 93. Pp. 252–265.
 10. Camp C. V., Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization // Engineering Structures. 2014. Vol. 62–63. Pp. 87–97.
 11. Kaveh A., Sheikholeslami R., Talatahari S., Keshvari-Ilkhichi M. Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 67. Pp. 136–147.
 12. Maggie Kociecki, Hojjat Adeli Two-phase genetic algorithm for topology optimization of free-form steel space-frame roof structures with complex curvatures // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2014. Vol. 32. Pp. 218–227.
 13. Lebee A., Sab K. Homogenization of a space frame as a thick plate: Application of the Bending-Gradient theory to a beam lattice // Computers & Structures. 2013. Vol. 127. Pp. 88–101.
- Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли

14. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers // Proceedings of the IASS Symposium, Valencia Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, 28 September – 2 October 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Spain. Alberto DOMINGO and Carlos Lazaro (eds.) Pp. 127–138.
15. Zhang R., Guo X., Liu Y., Leng J. Theoretical analysis and experiments of a space deployable truss structure // Composite Structures. 2014. Vol. 112. Pp. 226–230.
16. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК – Пресс, 2011. 800 с.
17. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
18. Клячин А.З. Металлические решетчатые пространственные конструкции регулярной структуры. Екатеринбург: Диамант, 1994. 276 с.
19. Марутян А. С., Григорьян М. Б., Глухов С. А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №1. С. 64–71.
20. Алпатов В. Ю., Холопов И. С. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций // Металлические конструкции. 2009. Т. 15. №1. С. 47–57.

Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия

Тел. моб.: +7(916)905-59-94; эл. почта: mrei2004@yandex.ru

© Кирсанов М. Н., 2014

doi: 10.5862/MCE.49.4

Bending, torsion and asymptotic analysis of the cantilever bar

M.N. Kirsanov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia
+79169055994; e-mail: mpei2004@yandex.ru

Key words

deformation; induction method; space truss; cantilever; torsion

Abstract

The paper estimates deformation of elastic, statically determinate cantilever truss of the large internal volume which is subjected to bending and torsional loads for an arbitrary number of structure zones.

The volume is increased by replacing flat sides of the truss with raised ones. Forces in the bars are determined analytically by cutting nodes of the truss. We derive simple analytical expressions for deflection, which allows selecting the optimal size and asymptotically compare the design flexibility to the known systems.

It is shown that the flexibility of the proposed design is comparable with the known systems. Graphs, showing the dependence of the deflection on the size and the number of zones, reveal extremes, which enables optimizing the geometry of the truss. We have derived the accurate formulas for optimal parameters of the truss deflection. The induction method, supported by Maple mathematics software, is used.

References

1. Kirsanov M.N. Osobennosti analiticheskogo rascheta prostranstvennykh sterzhnevyykh sistem [Features of the analytical calculation of spatial rod systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2011. No. 5. Pp. 11–15. (rus)
2. Kirsanov M.N. Sticheskiy raschet i analiz prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy [Static calculation and analysis of spatial rod system]. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No.6(24). Pp. 28–34. (rus)
3. Kirsanov M.N., Andreevskaya T.M. Analiz vliyaniya uprugikh deformatsiy machty na pozitsionirovaniye antennoy i radiolokatsionnoy oborudovaniya [Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5(40). Pp. 52–58.
4. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy [Analytical calculation of the spatial rod system]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012. No. 1. Pp. 49–53. (rus)
5. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermy [Analytical calculation and optimization of the spatial truss]. *Vestnik MPEI*. 2012. No. 5. Pp. 5–8. (rus)
6. Ramaswamy G. S., Eekhout M., Suresh G. R. Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames. London: Thomas Telford Publishing, 2002. 242 p.
7. Narayanan S. Space Structures: Principles and Practice. U.K., Essex, Brentwood: Multi-Science Publishing Company, 2006. 844 p.
8. Chilton J. Space Grid Structures. U.S.A., Woburn, MA: Architectural Press, 2000. 180 p.
9. Gasbarria P., Montia R., Sabatinib M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties. *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 93. Pp. 252–265.
10. Camp C. V., Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization. *Engineering Structures*. 2014. Vol. 62–63. Pp. 87–97.
11. Kaveh A., Sheikholeslami R., Talatahari S., Keshvari-Ilkhichi M. Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures. *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 67. Pp. 136–147.
12. Maggie Kociecki, Hojjat Adeli Two-phase genetic algorithm for topology optimization of free-form steel space-frame roof structures with complex curvatures. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2014. Vol. 32. Pp. 218–227.

13. Lebee A., Sab K. Homogenization of a space frame as a thick plate: Application of the Bending-Gradient theory to a beam lattice. *Computers & Structures*. 2013. Vol. 127. Pp. 88–101.
14. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers. *Proceedings of the IASS Symposium, Valencia Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures 28 September – 2 October 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Spain*. Alberto DOINGO and Carlos Lazaro (eds.) 1997. Pp. 127–138.
15. Zhang R., Guo X., Liu Y., Leng J. Theoretical analysis and experiments of a space deployable truss structure. *Composite Structures*. 2014. Vol. 112. June 2014. Pp. 226–230.
16. Dyakonov V.P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetah* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMK – Press, 2011. 800 p. (rus)
17. Goloskokov D. P. *Practical course in mathematical physics in the Maple* [Practical course in mathematical physics in the Maple]. Saint Petersburg: Izd-vo ParkKom, 2011. 644 p. (rus)
18. Klyachin A. Z. *Metallicheskiye reshetchatyye prostranstvennyye konstruksii regulyarnoy struktury* [Metal lattice spatial structure of a regular structure]. Yekaterinburg: Diamant, 1994. 276 p.
19. Marutian A., Grigorian M. B., Gluhov S. A. Prostranstvennyye reshetchatyye nesushchiye konstruksii(moduli tipa «Pyatigorsk»-2) [Spatial lattice supporting structures (modules of the "Pyatigorsk" – 2)]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No 1. Pp. 64–71.
20. Alpatov V.Y., Holopov J.S. Optimizatsiya geometricheskoy formy prostranstvenno-sterzhnevyykh konstruksiy [Engineering diagnostics of metal frames of a variable i-shaped cross, section of a sports complex framework]. *Metal Constructions*. 2009. Vol. 15. No 1. Pp. 47–57.

Full text of this article in Russian: pp. 37–43