Developing students' creative approach to solving the equations

Rozvíjanie tvorivého prístupu študentov k riešeniu rovníc

Dalibor GONDA

Abstract

Many researches show that pupils prefer learning how to solve the math problems by heart even in learning mathematics. It is necessary to look for ways of teaching mathematics leading to a departure from such a trend. One of the options is the frequent assignment of substitution-related tasks. This method develops pupils' creativity. Many tasks offer several possible substitutions. Pupils learn to create a substitute expression. The substitution method allows the task to be transformed, thus creat connections between the different areas of mathematics and offer pupils new insights into the use of already acquired knowledge.

Keywords

method of substitution; creativity; equation; autonomy; transformation

Abstrakt

Mnohé výskumy poukazujú, že aj pri učení sa matematiky žiaci uprednostňujú učenie sa riešení matematických úloh naspamäť. Je potrebné hľadať spôsoby vyučovania matematiky vedúce k odklonu od takéhoto trendu. Jednou z možností je časté zaraďovanie úloh riešených metódou substitúcie. Táto metóda rozvíja tvorivosť žiakov. Mnohé úlohy ponúkajú viacero možných substitúcií. Žiaci sa učia substitučný výraz vytvoriť. Metóda substitúcie umožňuje úlohu transformovať, a tak vytvárať prepojenia jednotlivých oblastí matematiky. Tým ponúka žiakom nové pohľady na využitie už získaných vedomostí.

Kľúčové slová

metóda substitúcie; tvorivosť; rovnica; samostatnosť; transformácia

DOI: <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.P210-8590-2017-6>

Úvod

V dnešnej dobe sa stretávame s rovnakým problémom pri vyučovaní všetkých predmetov – je to problém s motiváciou k učeniu sa daného predmetu. Študenti sa stavajú do pozície pasívnych prijímateľov vedomostí a „učenie sa“ považujú vo veľkej miere za nutné zlo. Vo veľkej miere sa s takýmto postojom stretávame aj na hodinách matematiky. Žiaci sa nezaujmajú, akým spôsobom by mohli samostatne vyriešiť úlohu. Stačí, ak im učiteľ

ukáže riešenie na vyučovacej hodine a oni sa daný postup naučia v podstate naspamäť, aby mali dobrú známku na vysvedčení. Len v ojedinelých prípadoch sa zaujímajú o príčiny jednotlivých krokov postupu riešenia úlohy. Chýba snaha, túžba po porozumení. Tieto tvrdenia sa opierajú o viacero výskumov. V jednom z nich bol zistený nasledovný postoj žiakov ku učeniu sa matematiky: „Bežní žiaci nemôžu chápať matematiku, môžu sa len naučiť naspamäť pravidlá, ktoré sa preberajú.“ (Vankúš, Kubicová, 2010) Žiaci sa snažia zapamätať, akým spôsobom sa daný príklad riešil. Teda pri učení sa matematiky si vytvárajú schémy, kde priradujú jednotlivým typom zadania úlohy príslušné postupy. Výsledkom takéhoto učenia sa matematiky je, že aj najmenšia zmena zadania spôsobí, že pre mnohých je úloha neriešiteľná a tvrdia, že taký príklad sme ešte nepočítali. myslíme si, že učiteľ by mal tak vyučovať matematiku, aby predišiel takejto mylnej predstave o matematike. Pri takomto postoji je veľmi náročné priviesť študentov k tvorivosti. „Je potrebné hľadať na vyučovaní matematiky spôsoby výučby, ktoré prekonajú u žiakov schematické učenie sa smerujúce k formalizmu.“ (Lengyelfalussy, 2005) Jednou z ciest je inšpirovať žiakov ku kladeniu si otázky, prečo sa daná úloha rieši daným spôsobom a či by nebolo možné úlohu riešiť aj iným, prípadne jednoduchším spôsobom.

1. Motivácia a tvorivosť – prínos substitúcie

Vyučovanie matematiky by malo byť pozvánkou pre študentov k tvorbe matematiky. „Učiť matematiku znamená robiť matematiku, matematika je činnosť. To môže zabezpečiť realistický prístup k vyučovaniu matematiky, ktorý vychádza z reálnych podnetov a problémov zo sveta žiakov. Žiak sa musí stať znovuobjaviteľom, tvorcom matematiky, čo rozvíja nie len jeho matematické činnosti ale aj matematické myslenie.“ (Fulier-Šedivý, 2001) Z tohto pohľadu by sme rozdelili štúdium matematiky na dve etapy:

1. Prvá etapa je naučenie základných zručností a osvojenie si základných poznatkov z jednotlivých častí matematiky.
2. Druhou etapou je efektívne využívanie výsledkov prvej etapy pri riešení úloh, predovšetkým pri príprave budúcich maturantov.

Keďže najsilnejšou motiváciou je možnosť dosiahnuť cieľ, je potrebné matematiku „tvoriť“ tak, aby študenti stále mali cieľ na dosah, ale aby nenadobudli pocit, že matematika je množstvo postupov, definícií a logicky náročných operácií. „Motivujúca sila rovnice je v tom, že je to „hádanka“ – výzva k činnosti. Túžba rozriešiť hádanku je najdôležitejším momentom celého procesu riešenia.“ (Hejný, 1989) Túžba vyriešiť danú matematickú „hádanku“ si vyžaduje predovšetkým tvorivý prístup s využitím už získaných vedomostí a zručností.

Za jednu z efektívnych metód na „tvorbu matematiky“ a odstraňovanie vyššie uvedených nedostatkov považujeme substitúciu, pričom sa zameriame predovšetkým na jej transformačnú úlohu. Substitúciu považujeme za metódu, ktorá dané nedostatky odstraňuje nie jednotlivo, ale naraz. V podstate možno povedať, že časté využívanie substitúcie ani nedovolí vzniku daných nedostatkov.

Substitúcia vytvára prepojenia medzi jednotlivými časťami matematiky, a tak napomáha k pohľadu na matematiku ako jeden celok. Učí študentov prechádzať z jedného celku na iný v rámci jednej úlohy. Keďže substitúcia vyžaduje tvorivý prístup, hľadanie vhodnej substitúcie, neumožňuje automatické aplikovanie naučených postupov. Aj keď aj tu možno nájsť schémy postupu. Tieto schémy sú skôr návodom, že teraz

je vhodná substitúcia, no samotnú substitučnú rovnosť je potrebné vždy objaviť. Najznámejšia schéma na zavedenie substitúcie je ak rovnica má tvar

$$a(V(x))^{2n} + b(V(x))^n + c = 0$$

a to v tvare $y = (V(x))^n$, čím danú rovnicu transformujeme na kvadratickú rovnicu. Túto schému však nemôžeme považovať za postup výpočtu. Je to skôr medzivýsledok, nad ktorým možno uvažovať pri výbere postupu riešenia.

Príklad 1. Na množine $\mathbf{R}$ riešte rovnicu $\frac{x}{x+1} - 2\sqrt{\frac{1+x}{x}} = 3$.

Riešenie: Skôr ako začneme riešiť danú iracionálnu rovnicu stanovíme podmienky riešiteľnosti. Každé riešenie rovnice musí spĺňať podmienky $x + 1 \neq 0 \wedge \frac{1+x}{x} \geq 0$.

Dané podmienky spĺňajú všetky reálne čísla $x \in (-\infty; -1) \cup (0; \infty)$. Máme za sebou prvú časť riešenia – riešili sme racionálnu lomenú nerovnicu.

Bežným spôsobom riešenia iracionálnej rovnice je osamostatnenie odmocniny a následné umocnenie rovnice. Úlohu však možno riešiť aj iným, tvorivejším a zároveň jednoduchším spôsobom. Zrejme ako prvú objavíme substitúciu $y = \frac{1+x}{x}$, ktorá však nie je jedinou možnosťou. Po jej zavedení a úpravách dostávame rovnicu v tvare

$$4y^3 - 9y^2 + 6y - 1 = 0$$

Po krátkej úvahe objavíme inú možnú substitúciu v tvare $y = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$. Potom platí $\frac{x}{x+1} = \frac{1}{y^2}$. Po zavedení substitúcie máme rovnicu $\frac{1}{y^2} - 2y = 3$ a po úpravách dostávame algebrickú rovnicu tretieho stupňa $2y^3 + 3y^2 - 1 = 0$. Keďže jedným z jej koreňov je $y_1 = -1$, rovnicu upravíme na tvar $(y+1)(2y^2 + y - 1) = 0$. Ďalej platí:

$$(y+1)(2y^2 + y - 1) = 0 \Leftrightarrow (y+1) = 0 \vee (2y^2 + y - 1) = 0,$$

a preto pre získanie ostatných koreňov stačí vyriešiť kvadratickú rovnicu

$$2y^2 + y - 1 = 0.$$

Jej riešením sú čísla $y_1 = -1$ a $y_2 = \frac{1}{2}$. Dosadením do substitučnej rovnice máme

iracionálne rovnice $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = -1$, ktorá nemá na množine $\mathbf{R}$ riešenie a rovnicu

$\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{2}$, ktorej riešením je číslo $-\frac{4}{3}$, teda množina koreňov zadanej rovnice je

$$\mathbf{K} = \left\{-\frac{4}{3}\right\}.$$

Ďalšou možnosťou riešenia bola substitúcia $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{y}$, ktorá je rovnocenná s predchádzajúcou použitou substitúciou. Jej objavenie však vyžaduje viac skúseností. Použitie tejto substitúcie vedie k rovnici

$$y^3 - 3y - 2 = 0.$$

Danú rovnicu bolo možné vyriešiť aj bez použitia substitúcie. Substitúcia však úlohu rozdelila na niekoľko čiastkových úloh: riešenie algebrickej rovnice tretieho stupňa, delenie polynómu polynómom, riešenie kvadratickej rovnice, riešenie jednoduchých iracionálnych rovníc pri návrate k pôvodnej premennej.

Zaradenie takejto úlohy je vhodné aj pri príprave maturantov. Vyžaduje tvorivejší prístup k riešeniu a zároveň vytvára prepojenie viacerých častí matematiky a napomáha tak k chápaniu matematiky ako jedného celku. V neposlednom rade poskytuje priestor na preopakovanie si poznatkov z viacerých oblastí. V záverečnej diskusii sa môže poukázať na výhody využívania metódy substitúcie. Jednou z vážnych výhod je vyhnutie sa zdĺhavým úpravám pri použití bežného postupu. No najväčším prínosom je nahradenie automatického (naučeného) spôsobu výpočtu tvorbou inej cesty k vyriešeniu zadanej rovnice.

2. Základné prvky substitučného myslenia

Domnievame sa, že žiak sa veľa naučí, ak učiteľ pri riešení rozmýšľa „nahlas“. Práve takáto situácia dovoľí nahliadnuť do matematického myslenia a učí žiakov, ako rozmýšľať pri riešení matematických úloh. Nie je cieľom naučiť žiakov nejaké postupy, ale naučiť ich hľadať efektívne spôsoby riešenia, nové postupy. Musíme ich naučiť počas riešenia premýšľať ako ďalej. Nedovoliť, aby počítali automaticky, „memorujúc“ naučený postup. Je vhodné naučiť ich vidieť dopredu, vedieť si predstaviť, ako sa bude vyvíjať riešenie úlohy, ak urobím ten či onen krok. Často sa stretávame s tým, že žiaci uvažujú o tom, ako sa takáto úloha riešila na hodine a aký bol postup.

Tvorivý prístup k matematike, a nie len k matematike, spočíva v hľadaní odpovedí na otázky. Pričom tie otázky by nemali smerovať do minulosti ale predovšetkým do budúcnosti. Pokúsime sa načrtnúť jednu z možností ako postupovať pri analýze matematickej úlohy.

V prvom rade je potrebné úlohu zaradiť do príslušnej oblasti matematiky a pripomenúť si základné poznatky. Potom je veľmi dôležité stanoviť cieľ: „K čomu sa máme riešením úlohy dopracovať?“ Napríklad pri rovnici je cieľom vyjadrenie neznámej. Musíme poznamenať, že častým problémom žiakov je, že počítajú úlohu a ani nevedia k čomu sa majú „prepočítať“. Nie raz sú prekvapení, keď im učiteľ oznámi, že úlohu už majú vyriešenú. Najdôležitejšou časťou úvodných úvah nad úlohou je najst' najvhodnejší postup na dosiahnutie cieľa. Táto časť vyžaduje najviac tvorivosti. Mali by sme žiakov učiť premýšľať nad pokračovaním úlohy neustále, po každej vykonanej úprave, pri dosiahnutí každého medzivýsledku. Postup ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 2. Na množine $\mathbf{R}$ riešte rovnicu

$$(2x + \sqrt{x-1})(2x + \sqrt{x-1} - 8) - 2(2x + \sqrt{x-1}) - 24 = 0.$$

Riešenie: Najskôr stanovíme podmienky vyplývajúce z definície odmocniny v obore $\mathbf{R}$. Pre každý koreň x danej iracionálnej rovnice musí platiť $x \geq 1$. Študentom pripomenieme, stanovenie podmienok ich nezbavuje povinnosti vykonať skúšku správnosti dosadením, pri použití dôsledkových úprav rovnice.

Teraz nasleduje diskusia o možnostiach spôsobu riešenia. Bežným spôsobom je roznásobením odstrániť zátvorky. Nie je správne túto možnosť hneď zamietnuť, skôr treba poukázať na jej neefektívnosť a zdĺhavosť. Tu je namieste skôr otázka,

ako by to dopadlo keby sme sa vybrali touto cestou riešenia? Po niekoľkých úpravách výrazu na ľavej strane dostaneme rovnicu

$$4x^2 + 6x\sqrt{x-1} - 8\sqrt{x-1} - 11x - 25 = 0.$$

Túto rovnicu je ešte náročnejšie riešiť, lebo ku lineárnemu a iracionálnemu členu nám pribudol kvadratický člen.

Nápoveďou k hľadaniu vhodnej substitúcie je otázka: „Ktorý člen rovnice je pre nás najhorší?“ Samozrejmovou odpoveďou je: „ $\sqrt{x-1}$ “. Nasleduje otázka: „Je možné sa ho zbaviť?“ A spoločne objavíme substitúciu $y = \sqrt{x-1}$ a pripomenieme, že po substitúcii musí byť nahradená pôvodná premenná novou. Teda $x = y^2 + 1$. Pomocou takejto substitúcie sa rovnica zmení na tvar

$$(2y^2 + y + 2)(2y^2 + y - 6) - 2(2y^2 + y - 1) - 24 = 0.$$

Ďalším roz násobením by sme dostali rovnicu štvrtého stupňa, ktorej riešenie je zdlhové. Preto by bolo lepšie použiť ďalšiu substitúciu $a = 2y^2 + y$, čím rovnicu transformujeme na kvadratickú. Pokúsme sa však nájsť efektívnejšie a predovšetkým menej zdlhové riešenie. Ak zavedieme substitúciu

$$y = 2x + \sqrt{x-1},$$

rovniciu transformujeme na kvadratickú rovnicu $y(y-8) - 2y - 24 = 0$ a po úprave dostaneme $y^2 - 10y - 24 = 0$. Koreňmi kvadratickej rovnice sú čísla $y_1 = -2$ a $y_2 = 12$. Dosadením do substitučnej rovnice máme dvojicu iracionálnych rovníc

$$2x + \sqrt{x-1} = -2 \quad \text{a} \quad 2x + \sqrt{x-1} = 12.$$

Po úprave na tvar $\sqrt{x-1} = -2 - 2x$ a $\sqrt{x-1} = 12 - 2x$ stanovíme doplnkové podmienky, aby umocňovanie oboch strán rovnice bolo ekvivalentnou úpravou. Pre každé riešenie prvej rovnice platí: $(x-1 \geq 0 \wedge -2 - 2x \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge x \leq -1)$. Túto podmienku však nespĺňa žiadne reálne číslo, preto množina riešení prvej substitučnej rovnice je $K_1 = \emptyset$. Pre každé riešenie druhej rovnice platí:

$$(x-1 \geq 0 \wedge 12 - 2x \geq 0) \Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge x \leq 6).$$

Túto podmienku spĺňajú reálne čísla z intervalu $x \in \langle 1; 6 \rangle$. Potom druhú rovnicu umocníme a upravíme na tvar $4x^2 - 49x + 145 = 0$. Koreňmi tejto kvadratickej rovnice sú čísla

$$x_1 = 5, \quad x_2 = \frac{58}{8}.$$

Vzhľadom na doplnujúcu podmienku množina koreňov druhej substitučnej rovnice $K_2 = \{5\} = K$.

Poznámka: Pri riešení tejto rovnice je potrebné poukázať na výhodnosť určovania doplnkových podmienok pri iracionálnych rovniciach a to nie len pri pôvodnej rovnici ale aj pri novovzniknutých substitučných rovniciach. Pri prvej substitučnej rovnici nám určenie doplnkových podmienok ušetrilo „zbytočné“ riešenie kvadratickej rovnice.

Záver

Oplatí sa investovať čas a poukázať, aspoň v náznakoch, kam vedú jednotlivé možnosti riešenia úlohy. Ak žiaci vidia rôznu efektívnosť jednotlivých možností, budú ochotnejšie

hľadať jednotlivé možnosti riešení. Učiteľ by nemal byť ten, ktorý určí spôsob riešenia, ale má napomáhať k jej hľadaniu. Mal by byť moderátor tvorby matematiky. Ak učiteľ povie: „Túto úlohu vyriešime takto...“, vytvára u žiakov dojem, že každá úloha má len jeden spôsob riešenia. A ešte horším výsledkom je, keď si žiaci myslia, že všetky podobné úlohy sa riešia rovnako. Poznamenajme, že žiaci si do zošitov zapisujú postup riešenia. Najdôležitejšie, a to spôsob premýšľania, sa do zošita nedostane. Preto ich musíme učiť klásť si tie správne otázky, ktoré ich budú smerovať správnym smerom pri riešení nie len matematických úloh.

Vzhľadom na to, že substitúcia nie je pre žiakov jednoduchá metóda riešenia úloh, je potrebné venovať sa jej vyučovaniu systematicky, s dôrazom na správnu voľbu príkladov a úloh. Ak sa nám však podarí rozvinúť u žiakov substitučné myslenie, tak im umožníme celkom iný pohľad na matematiku. Uvidia, že matematiky je jeden súvislý celok, kde je možné vedomosti z jednej oblasti efektívne využívať pri riešení úloh z inej oblasti. S rozvojom substitučného myslenia je spojený i rozvoj tvorivosti, a tak budú pripravení aj na zvládanie rôznych životných situácií.

Literatúra

- Fischer, R.; Malle, G. (1992): Človek a matematika. SPN, Bratislava, ISBN 80-08-01309-5.
- Fulier, J.; Šedivý, O. (2001): Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky. Prírodovedec. Nitra: FPV UKF, ISBN 80-8050-418-0.
- Fulier, J. (2004): Funkcie a funkčné myslenie vo vyučovaní matematickej analýzy. Prírodovedec č. 78. Nitra: FPV UKF, ISBN 80-8050-700-7.
- Gábor, O. a kol. (1989): Teória vyučovania matematiky 1. SPN. Bratislava
- Gavora, P. (1999): Úvod do pedagogického výskumu. Bratislava: UK, ISBN 80-223-1342-4.
- Hejný, M. a kol. (1989): Teória vyučovania matematiky 2. SPN, Bratislava.
- Hejný, M.; Kuřina, F. (1993): Konstruktivní přístupy k vyučování matematiky. Matematika-Fyzika-Informatika. Prometheus, Praha.
- Lengyelfalussy, T. (2005): Tvorivosť vo vyučovaní matematiky. In: XXIII. mezinárodní kolokvium o řízení osvojovacího procesu. Zborník abstraktov a elektronických verzií príspevkov na CD-ROMe. Univerzita obrany, Brno. ISBN 80-85960-92-3.
- Vankúš, P.; Kubicová, E. (2010): Postoje žiakov 5. a 9. ročníka ZŠ k matematike. ACTA MATHEMATICA 13, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, Nitra. ISBN 978-80-8094-781-1.

Kontakt

PaedDr. Dalibor Gonda, PhD.
Katedra pedagogických štúdií, Fakulta humanitných vied, Žilinská univerzita v Žiline
Univerzitná 1, 010 26 Žilina, Slovenská republika
daliborgonda@gmail.com