Some notes about cyclography

Několik poznámek k cyklografii

Jitka PANÁČOVÁ

Abstract

In the paper there are briefly described basic problems of cyclography (one-to-one correspondence of the set of all points of the $\bar{E}_3$ onto the set of all directed circles – cycles – of the proper plane of the $\bar{E}_3$). The article summarizes principles and applications of cyclography method, and in the end introduces its historical development.

Keywords

cycle, directed line, isotropic line, directed plane, basic conic C , C – conic area

Abstrakt

Práce se zabývá základními problémy cyklografické zobrazovací metody (bijektivní zobrazení množiny všech bodů rozšířeného euklidovského prostoru $\bar{E}_3$ na množinu všech orientovaných kružnic – cyklů – vlastní roviny π prostoru $\bar{E}_3$). Shrnuje dále aplikaci této metody na řešení planimetrických úloh z geometrie orientovaných kružnic a v závěru zachycuje stručně její historický vývoj.

Klíčová slova

cyklus; orientovaná přímka; isotropní přímka; orientovaná rovina; základní kuželosečka C ; C – kuželová plocha

DOI: <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.P210-8590-2017-13>

Úvod

Cyklografie nebo cyklografické zobrazení je příkladem nelineární zobrazovací metody. Pod pojmem zobrazovací metody rozumíme bijektivní zobrazení útvarů trojrozměrného euklidovského prostoru (popř. rozšířeného euklidovského prostoru) na určité objekty jedné roviny, kterou nazýváme nákresna. Bodu v prostoru tedy přiřadíme určitý útvar v nákresně. V případě cyklografického zobrazení je obrazem bodu v prostoru cyklus v nákresně, přičemž střed cyklu je ortogonální průmět daného bodu do nákresny.

Základní principy cyklického promítání

V dalším textu se předpokládá znalost následujících pojmů elementární geometrie euklidovské roviny E_2 : orientace přímky (orientovaná přímka), orientace roviny (orientovaná rovina), orientovaný úhel.

Poznámka 1: Pod pojmem úhel se v celém textu bude rozumět příslušný konvexní úhel (např. $\angle AOB$ nebo $\angle \vec{u}\vec{v}$). Jestliže úhel $\angle \vec{u}\vec{v}$ patří do zvolené (kladné) orientace roviny, budeme říkat, že tento úhel určuje orientaci roviny nebo orientace roviny je tímto úhlem určená.

Definice 1: Buď $k(O, r)$ libovolná kružnice orientované euklidovské roviny E_2 (úhlem $\angle \vec{u}\vec{v}$) a K, L libovolná uspořádaná dvojice navzájem různých bodů na k . Řekneme, že kružnice k je dvojicí bodů K, L orientovaná kladně, resp. záporně, jestliže orientovaný úhel $\angle KOL$ patří, resp. nepatří do zvolené orientace roviny (tj. jestliže úhly $\angle \vec{u}\vec{v}$, $\angle KOL$ jsou orientované souhlasně, resp. nesouhlasně).

Poznámka 2: Orientovanou kružnici nazýváme *cyklus*, původní kružnici *nositelkou cyklu*. Analogicky orientovanou přímku nazýváme *paprskem*, původní přímku *nositelkou paprsku*. Ve smyslu předchozí definice pak hovoříme o *kladných a záporných cyklech*. Poloměrem kladného, resp. záporného cyklu budeme nazývat reálné číslo r , resp. $-r$, kde r je poloměr nositelky cyklu.

Definice 2: Kladnou polorovinou orientované eukleidovské roviny ρ vzhledem k danému paprsku (určeného polopřímkou $\overrightarrow{KL}$) nazýváme polorovinu (s hraniční přímkou danou body K, L) incidentní s bodem X , pro který orientovaný úhel $\angle LKX$ patří do zvolené orientace roviny ρ . Opačnou polorovinu k této polorovině nazýváme *zápornou polorovinou* orientované roviny ρ vzhledem k danému paprsku.

Kladnou stranou kladného, resp. záporného cyklu nazýváme vnitřek, resp. vnějšek nositelky cyklu; vnějšek, resp. vnitřek této kružnice se nazývá jeho *zápornou stranou*.

Definice 3: Buď v orientované euklidovské rovině ρ dána přímka t a kružnice k . Řekneme, že paprsek s nositelkou t se dotýká cyklu s nositelkou k , jestliže nastane právě jedna z následujících dvou možností:

1. Přímka t je tečnou kružnice k a kladná polorovina roviny ρ vzhledem k danému paprsku je částí kladné strany cyklu.
2. Přímka t je tečnou kružnice k a kladná strana cyklu je podmnožinou kladné poloroviny roviny ρ vzhledem k danému paprsku.

Jestliže mají dva cykly ve společném bodě společný dotykový paprsek, řekneme, že se oba cykly ve společném bodě *dotýkají*.

Obraz bodu

Základním prostorem bude rozšířený euklidovský prostor $\overline{E}_3$ nad polem reálných čísel. Principem cyklografické zobrazovací metody je kolmé promítání do jedné (vlastní) roviny. Buď $\pi \subset \overline{E}_3$ libovolná vlastní rovina (průmětna). Orientujme oba poloprostory prostoru $\overline{E}_3$ s hranicí π (tj. prohlásíme libovolný z nich za kladný). V kótovaném zobrazení se přiřadí každému vlastnímu bodu $P \in \overline{E}_3$ uspořádaná dvojice (P_I, z^P) , kde P_I je kolmý průmět bodu P do průmětny π a z^P je orientovaná vzdálenost bodu P od roviny π (kóta bodu P). V cyklografii se postupuje analogicky. Při zobrazení libovolného

vlastního bodu $P \in \bar{E}_3$ se sestrojí nejprve jeho kolmý průmět P_I do roviny π . Dále je třeba (kromě orientace poloprostorů prostoru $\bar{E}_3$ s hranicí π) orientovat průmětnu π např. orientovaným úhlem $< \vec{u}\vec{v}$. Každému bodu P prostoru $\bar{E}_3$ pak přiřadíme cyklus P^C průmětny π s poloměrem z^P , jehož nositelka má střed P_I . Cyklus P^C je tedy kladný, resp. záporný, jestliže orientovaná vzdálenost bodu P od průmětny je kladná, resp. záporná. Pro bod $Q \in \pi$ je $Q = Q_I$ a $z^Q = 0$ (tento bod nazýváme „nulovým“ cyklem).

Věta 1: Zobrazení $\varphi: \bar{E}_3 \rightarrow C_\pi$ množiny všech vlastních bodů prostoru $\bar{E}_3$ na množinu všech cyklů C_π průmětny π , které bodu P přiřadí cyklus P^C , je bijekce.

Definice 4: Zobrazení φ z věty 1 je zobrazovací metoda a nazývá se *cyklografické zobrazení*. Množina C_π všech cyklů v rovině π se nazývá *prostor cyklů*.

Poznámka 3: Nositelka cyklu $P^C \subset \bar{E}_3$ je průnikem rotační kuželové plochy v $\bar{E}_3$ dané vrcholem P , jejíž tvořící přímky mají odchylku 45° od průmětny π . Tato kuželová plocha protíná rovněž nevlastní rovinu $\Omega \subset \bar{E}_3$ v kuželosečce C (tzv. *základní kuželosečka*). Kuželosečka C leží na analogických kuželových plochách pro všechny vlastní body prostoru $\bar{E}_3$ a její střed je nevlastním bodem přímek kolmých na průmětnu π . Tento přístup umožňuje jiný pohled na nositelky cyklů v průmětně; každou kružnici – nositelku cyklu P^C – lze vyjádřit jako průnik kuželové plochy s vrcholem P a určující kuželosečkou $C \subset \Omega$ s průmětnou π . Tuto kuželovou plochu značíme symbolem $\mathbf{K}^P(P, P^C)^1$.

Definice 5: Rotační kuželovou plochu, jejíž tvořící přímky svírají s osou odchylku 45° , nazýváme *C – kuželová plocha*.

Věta 2: Množinou všech dotkových cyklů k pevnému cyklu P^C jsou cyklografické obrazy všech bodů C – kuželové plochy, jejíž určující kružnice je nositelka cyklu P^C .

Poznámka 4: Množinou cyklů, které incidují se společným bodem $Q \in \pi$, jsou cyklografické obrazy všech bodů C – kuželové plochy s vrcholem Q . V dalším textu by bylo možné ukázat, jakým způsobem se cyklograficky zobrazuje přímka nebo rovina. Touto problematikou se však již dále nebudeme podrobně zabývat, neboť momentálně zbudovaný aparát vystačí pro ilustraci využití cyklografie na následujícím příkladu.

Praktické využití cyklografie

Možností využití cyklografického zobrazení je celá řada, nejzajímavější je však řešení planimetrických úloh pomocí cyklografie, ze kterých je v následujícím textu vybrána jedna z Apolloniových úloh.

Původní Apolloniova úloha se zabývá konstrukcí kružnice, která se dotýká daných tří kružnic. Obecnou Apolloniovou úlohou rozumíme úlohu o konstrukci kružnice dotýkající se daných tří geometrických útvarů (body, přímky, kružnice). Její řešení metodou cyklografického zobrazení je velmi jednoduché a elegantní. Před samotnou ukázkou řešení Apolloniovy úlohy užitím této metody se však nejdříve zabývejme otázkou průniku dvou C – kuželových ploch.

¹ Pokud nemůže dojít k záměně, budeme používat zkráceného zápisu kuželové plochy $\mathbf{K}^P$.

Pomocná úloha

Jsou dány dvě C-kuželové plochy $\mathbf{K}^A(A, A^C)$, $\mathbf{K}^B(B, B^C)$, přičemž určující kružnice plochy $\mathbf{K}^A$, resp. $\mathbf{K}^B$ obsahuje cyklus $A^C \subset \pi$, resp. $B^C \subset \pi$. Určete průnik $\mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^B$.

Řešení: Průnikem dvou kvadrik je obecně křivka 4. stupně. Protože kuželové plochy $\mathbf{K}^A$, $\mathbf{K}^B$ obsahují základní kuželosečku C , musí být i druhá část průniku těchto ploch kuželosečka. Označme tuto kuželosečku k a její rovinu α .

Rovina λ ($AB \subset \lambda$, $\lambda \perp \pi$) obsahující osy AA_I , BB_I obou kuželových ploch je jejich rovinou souměrnosti, tj. i vlastní části k jejich průniku. Rovina α kuželosečky k je kolmá na rovinu λ a osa kuželosečky k je průsečnicí rovin α a λ . Zvolme si rovinu λ za druhou průmětnu a dořešme úlohu v Mongeově zobrazení s nákretnou π . V druhém průmětu pak pohodlně sestrojíme vlastní body průniku $\mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^B \cap \lambda = (\mathbf{K}^A \cap \lambda) \cap (\mathbf{K}^B \cap \lambda)$, což jsou vrcholy M , N kuželosečky k . Je zřejmé, že k je hyperbola nebo elipsa (pokud nositelka jednoho cyklu leží uvnitř nositelky druhého) a MN je jejich osou. Rovina α je určená ($MN \subset \alpha \wedge \alpha \perp \lambda$); její stopa p^α je chordála nositelek cyklů A^C , B^C .

Kuželosečku k pak sestrojíme jako rovinný řez např. $\mathbf{K}^A \cap \alpha$. Ohniska kolmého průmětu kuželosečky k do roviny π jsou body A_I , B_I . Odtud vyplývá následující vlastnost:
Věta 3: Množina středů všech cyklů, které se dotýkají daných dvou cyklů, je hyperbola nebo elipsa, která má středy daných cyklů za ohniska.

Apolloniova úloha

Sestrojte kružnici, která se dotýká daných tří kružnic a , b , d v rovině π .

Rozbor: Orientujme dané kružnice a , b , d v rovině π a příslušné cykly označme A^C , B^C , D^C .

Buď $\mathbf{Z}$ cyklografické zobrazení v prostoru $\bar{E}_3$ s průmětnou π

$$\mathbf{Z}^{-1} : A^C, B^C, D^C \rightarrow A, B, D.$$

Jestliže v π existuje cyklus X^C , který se dotýká cyklů A^C , B^C , D^C , tak pro bod $X = \mathbf{Z}^{-1}(X^C)$ platí: $X \in \mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^B \cap \mathbf{K}^D$. Obráceně pro každý bod $Y \in \mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^B \cap \mathbf{K}^D$ platí, že cyklus $Y^C \subset \pi$ se dotýká cyklů A^C , B^C , D^C . Planimetrická Apolloniova úloha je tak převedena s využitím principů cyklografického zobrazení na prostorovou úlohu: nalézt průnik tří C-kuželových ploch a k němu určit jeho cyklografický obraz. Nositelky cyklografických obrazů bodů průniku jsou pak částí řešení zadané úlohy.

Konstrukce: Bod X průniku C-kuželových ploch leží v rovině γ vlastní kuželosečky $k \subset \mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^B$ a analogicky v rovině β kuželosečky $l \subset \mathbf{K}^A \cap \mathbf{K}^C$ (konstrukce rovin γ , β podle předcházející pomocné úlohy; p^γ , p^β jsou chordály příslušných dvojic kružnic). Označme $\gamma \cap \beta = s$. Pak platí: $X \in \mathbf{K}^A \cap s$. Zřejmá je konstrukce stopníku $p^s \in p^\beta \cap p^\gamma$ přímky s ; kromě toho je přímka s rovnoběžná s přímkou s' ($s' \subset \gamma' \cap \beta'$), kde $A \in \beta' \wedge \beta' \parallel \beta$, $A \in \gamma' \wedge \gamma' \parallel \gamma$, tj. γ' , β' jsou vrcholové roviny kuželové plochy $\mathbf{K}^A$ rovnoběžné s rovinami β , γ (v daném pořadí).

Průsečíky $\mathbf{K}^A \cap s$ se sestrojí pomocí roviny λ dané rovnoběžkami s , s' . Platí: $\mathbf{K}^A \cap s = s \cap (\lambda \cap \mathbf{K}^A) = s \cap \{AX_0, AY_0\}$, kde $\{X_0, Y_0\} = p^\lambda \cap a$. Pak přímka daná body A , X_0 , resp. A , Y_0 protíná přímku s v bodě X , resp. Y a X_I , Y_I jsou středy hledaných cyklů. Kružnice, které jsou nositelkami cyklů X^C , Y^C , jsou částí řešení úlohy (0 až 2 řešení).

Diskuse: Úplné řešení získáme, když budeme uvažovat všechny možné kombinace orientací kružnic a , b , d . Jejich počet je 2^3 . Vždy dvě dvojice (pro navzájem opačné cykly)

dají jedno řešení, tj. všechna řešení dají čtyři trojice cyklů. Úloha má celkem 0–8 řešení; jejich počet závisí na vzájemné poloze kružnic a , b , d .

Historie cyklografie

Samotná myšlenka cyklografie (vzájemně jednoznačného zobrazení bodů v prostoru na cykly v rovině) se objevila již v díle B. E. Cousineryho (Cousinery, 1828), ve kterém je jí využito při řešení některých Apolloniových úloh. Poté pak Nikolaus Druckenmüller (1806–1883) – žák Julia Plückera (1801–1868) – v r. 1842 zkonstruoval v díle (Druckenmüller, 1842) prostředky analytické geometrie zobrazení, které bylo později také nazváno *isotropní projekce*.

Za první soustavně zpracované dílo o cyklografii jako o zobrazovací metodě deskriptivní geometrie je považováno dílo Wilhelma Fiedlera (1832–1912) (Fiedler, 1882). Tato kniha má čistě konstruktivní charakter, věnuje svou pozornost konstrukčním úlohám o kružnici a kouli. Fiedlerovo pojetí zobrazení splňuje principiálně parametry kruhového zobrazení, nelze ho proto označovat za cyklografii v pravém slova smyslu, přestože jeho publikace paradoxně ve svém názvu slovo cyklografie nese. V jeho knize sice narazíme na zmínku o tom, že kružnici v rovině lze orientovat, aby se zabránilo dvojznačnosti, ale autor této možnosti nevyužil a operoval výhradně s elementy neorientovanými.

Nejnovější podobu cyklografie jako zobrazovací metody deskriptivní geometrie přineslo systematické dílo (Müller, 1929), které vyšlo jako druhý díl přednášek Emila Müllera na vídeňské technice. Bylo zpracováno po Müllerově smrti jeho asistentem Josefem Leopoldem Kramsem (1897–1986). Z hlediska cyklografie se jedná o praktickou aplikaci myšlenky isotropní projekce v deskriptivní geometrii a tím zároveň za plod mnohých úvah F. Kleina a Maria Sophuse Lieho (1842–1899), které se vztahovaly v té době k modernímu výzkumu deskriptivní geometrie. Toto Müllerovo dílo přineslo mnoho poznatků z jeho dřívějších publikací o cyklografii, z díla W. Fiedlera (Fiedler, 1882) a ze studií například Wilhelma Blaschkeho (1885–1962) a Erwina Wilhelma Kruppy (1885–1967). Samotné konstruktivní provedení různých úloh však Müller na rozdíl od Fiedlera prováděl pomocí kótovaného promítání a operoval zásadně s orientovanými elementy. Obě pojetí se dále odlišovala v tom, že v Müllerově díle (Müller, 1929) plnila velmi důležitou funkci nevlastní základní kuželosečka, s níž Fiedler vůbec nepracoval.

Cyklografie v Čechách

Jedinou knižní publikací u nás, která se podrobně a uceleně problematikou cyklografického zobrazení zabývala, je monografie L. Seiferta (1883–1956) (Seifert, 1949). Tato kniha je napsána v Müllerově pojetí – jedná se o přeložené a zkrácené Müllerovo dílo (Müller, 1929). Autor v ní popisuje základními principy cyklografie, vysvětlil pojmy a vlastnosti tzv. cyklografické koule a cyklického zobrazení bodových transformací, popsal konstrukci cyklického obrazu křivky a plochy v $\bar{E}_3$ a v závěru zkoumal užití cyklické projekce a Laguerrových transformací. Na příkladech různých planimetrických úloh je ilustrováno praktické využití cyklografie.

Seifertova monografie (Seifert, 1949) byla určena především pro kandidáty středoškolského učitelství. L. Seifert usiloval o zavedení cyklografie do výuky

deskriptivní geometrie na českých vysokých školách pro budoucí středoškolské učitele a přednášel ji na Přírodovědecké fakultě MU v Brně. Po jeho smrti zde cyklografii přednášel Seifertův žák Karel Svoboda. Jména těchto dvou geometrů však éra cyklografie ve výuce u nás začíná a zároveň i postupně končí. V hodinách deskriptivní geometrie byl dán prostor jiným metodám.

Kromě práce (Seifert, 1949) nalezneme v české odborné literatuře v mnohých souvislostech rozličné zmínky o cyklografii, často ve spojení s řešením planimetrických úloh. Z celé této nevelké řady knižních publikací o cyklografii se zmiňujících jmenujme alespoň učebnici deskriptivní geometrie Jana Sobotky (1862–1931) (Sobotka, 1906), která je však napsána ještě ve Fiedlerově pojetí. Další zmínky o této zobrazovací metodě již v Müllerově pojetí nalezneme v monografiích Josefa Holubáře (1895–1970) (Holubář, 1940; Holubář, 1948), ve kterých mimo jiné autor ilustroval prostřednictvím cyklografie řešení Apolloniových úloh.

Závěr

Využití cyklografie v oblastech matematiky a geometrie je široké, bohužel se dnes v rámci výuky deskriptivní geometrie s touto zajímavou metodou setkáme již velmi zřídka. Její aplikace na řešení klasických úloh z elementární geometrie je elegantní a názorná a mohla by tudíž vzbudit opětovný zájem. V současné době na tuto metodu narazíme v některých pracích a materiálech Zity Sklenárikové (Sklenáriková, 2004) z FMFI UK v Bratislavě. Velmi inspirativní je dále novější pojednání o cyklografii od Lenky Juklové (Juklová, 2013) z UP v Olomouci a diplomová práce od Jiřího Hátle (Hátle, 2006).

Literatura

- Seifert, L. (1949). *Cyklografie*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků.
- Müller, E.- Krames, J. L. (1929). *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, 2. Band: *Die Zyklographie*. Wien und Leipzig.
- Fiedler, W. (1882). *Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*. Leipzig.
- Sobotka, J. (1906). *Deskriptivní geometrie promítání paralelního*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků.
- Holubář, J. (1940). *O metodách rovinných konstrukcí*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků.
- Holubář, J. (1948). *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků.
- Cousinery, B. E. (1828). *Geometrie perspective*.
- Druckenmüller, N. (1842). *Die Übertragungsprinzipien der analytischen Geometrie*.
- Sklenáriková, Z. (2004). *K metodám riešenia Apolloniovej úlohy* (s. 45–55). Matematika v proměnách věků. III.
- Juklová, L. (2013). *Aplikace deskriptivní geometrie: základy kartografie a cyklografie*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
- Hátle, J. (2006). *Cyklografie a její užití k řešení planimetrických úloh*. Olomouc: PřF UP Olomouc (diplomová práce).

Kontakt

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

Katedra matematiky, Pedagogická fakulta MU

Poříčí 31, 603 00 Brno, Česká republika

panacova@ped.muni.cz