NÚMEROS COMPLEXOS E REGIÕES NO PLANO

COMPLEX NUMBERS AND REGIONS IN THE PLANE

Mariana Laura da Cruz da Costa¹; Antônio Carlos Tamarozzi²;¹ Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três LagoasE-mail: marilaura65@gmail.com² Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três LagoasE-mail: act.ufms@gmail.com

RESUMO – Este trabalho resulta das práticas de investigação de metodologias de ensino de Matemática desenvolvidas pelo grupo PETMAT – Programa de Educação Tutorial da UFMS, campus de Três Lagoas-MS, onde é apresentado uma proposta de aplicação dos números complexos para abordagem de cônicas e outras regiões do plano cartesiano para alunos do ensino médio. Com o desenvolvimento desta linha de trabalho, pretendemos facilitar a obtenção das equações algébricas de algumas curvas e regiões do plano, bem como a visualização gráfica correspondente. São utilizados conceitos e técnicas como manipulação das partes real e imaginária, conjugados, equações e inequações modulares e outros, que fazem parte da teoria elementar dos números complexos e, portanto, acessíveis aos alunos. O trabalho enfatiza o processo ensino-aprendizagem em que a matemática é utilizada como contextualização para o desenvolvimento de seus próprios tópicos.

Palavras-chave: número complexo; circunferência; elipse; hipérbole.

ABSTRACT – This work results from the research practices of Mathematics teaching methodologies developed by the Group PETMAT-Tutorial education program UFMS, Três Lagoas-MS campus, where it is presented a proposal of application of complex numbers for conical and other parts of the plan cartesian for middle school students. With the development of this line of work, we intend to facilitate the obtaining of the algebraic equations of some curves and parts of the plan, as well as the corresponding graphic display. Are used concepts and techniques as real and imaginary parts, conjugates, modular and other, which are part of the elementary theory of complex numbers and, therefore, accessible to students. The work emphasizes the teaching-learning process in which mathematics is used as contextualization for the development of their own topics.

Keywords: complex number; circumference; ellipse; hyperbole.

1. INTRODUÇÃO

Uma das barreiras para o ensino eficiente da matemática é a forma estante que seus conteúdos são apresentados aos alunos. Principalmente de um ano letivo para outro, se observa a falta de conexão entre os tópicos,

inclusive na abordagem dos livros didáticos. Neste sentido SPINELLI destaca

[...] os contextos de ensino são agentes que dão vida às abstrações, na medida em que configuram o objeto de estudo sobre uma rede de significações em que diversos conceitos se associam, permitindo, dessa forma, que o objeto de conhecimento seja visto como um feixe de

relações, estabelecido a partir do conjunto de circunstâncias que caracteriza o contexto adotado. (SPINELLI, 2011, p. 05)

Com a apresentação descontinuada dos tópicos da matemática, perde-se, portanto a oportunidade de explorar diversas situações de aprendizagem que a interação entre os assuntos pode proporcionar.

Este trabalho foi elaborado com base em um dos projetos de pesquisa em Ensino de Matemática desenvolvido pelo grupo de educação tutorial PET- Matemática da UFMS/CPTL. Propomos a apresentação de equações de cônicas e outras curvas como aplicação da teoria básica dos números complexos. Além do aspecto intuitivo, esta abordagem proporciona uma introdução alternativa ao estudo de cônicas e outras curvas no plano.

2. METODOLOGIA

A introdução dos números complexos como medida de resolução de equações algébricas é bastante conhecida, conforme apresenta Garbi. Por outro lado, algumas generalizações do conjunto dos números reais para o conjunto $\mathbb{C}$ dos complexos, são bastante intuitivas, destacamos, por exemplo, a noção de módulo de um número real. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, o módulo de a pode ser definido por,

$$|a| = \sqrt{a^2} \quad (*)$$

que é uma extensão natural do módulo de um número complexo $z = a+bi$, definido por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (**)$$

De fato, a pode ser identificado ao número complexo $a+0i$, e assim as definições de $|a|$ coincidem.

A definição (*) possibilita a resolução de equações em $\mathbb{R}$, de maneira interessante, como podemos observar com $a > 0$.

$$|x| = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = a \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

De forma similar, a inequação em $\mathbb{R}$, $|x| < a$, ($a > 0$) pode ser resolvida com a técnica aplicada neste contexto.

$$\begin{aligned} |x| < a &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < a \Leftrightarrow \\ x^2 &< a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow \\ -a &< x < a \end{aligned}$$

Com uma adaptação simples, podemos abordar, com a mesma técnica, as equações e inequações da forma $|x - b| = a$ e $|x - b| < a$.

Ou seja, as técnicas transformam uma equação ou inequação modular em uma equação ou inequação quadrática equivalente, cuja resolução já foi explorada em momento anterior da aprendizagem matemática.

Parte deste trabalho consiste em aplicar a mesma técnica no campo complexo, para esta finalidade usamos a identificação natural de um número complexo $a+bi$ ao ponto (a,b) do plano cartesiano.

3. RESULTADOS

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Para a resolução da equação $|z - z_0| = r$, temos, considerando $z = x + yi$ que

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow \\ |x + yi - (a + bi)| = r &\Leftrightarrow \\ |(x - a) + (y - b)i| = r &\Leftrightarrow \\ \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r &\Leftrightarrow \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

Ou seja, se o número complexo $z = x + yi$ é solução da equação modular, então o ponto (x,y) está em uma circunferência de centro (a,b) e raio r , conforme mostra a figura abaixo.

Figura 1. Circunferência de centro (a,b) e raio r .

Observemos que o módulo $|z - z_0|$ representa a distância entre os pontos representados pelos números complexos z e z_0 , logo a solução da equação $|z - z_0| = r$, realmente representa uma circunferência, por se tratar do conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo C , desse plano.

Apresentaremos na sequência outras regiões do plano que tomam como base a equação da circunferência:

3.1. Círculos

Fixados os números $s > 0$ e $z_0 = a + bi$ real e complexo respectivamente, vamos explorar o conjunto de todos os números complexos z que satisfazem a inequação $|z - z_0| < s$. Considerando que já analisamos uma igualdade da forma $|z - z_0| = r$, podemos interpretar este conjunto como a união de todos os conjuntos da forma $|z - z_0| = r$, onde r pode assumir qualquer valor real que atenda a desigualdade $0 \leq r < s$. Assim, obtemos circunferências concêntricas, como mostra a figura abaixo para alguns valores de r : $r_1 > \dots > r_4$.

Ampliando o número de circunferências podemos preencher ainda mais a circunferência, de forma que o preenchimento completo ocorre quando se considera todos os valores de r da desigualdade $0 \leq r < s$.

Portanto, a figura acima à direita é a região determinada pela desigualdade $|z - z_0| < s$ chamada de disco aberto de raio s . O disco fechado de raio s é obtido similarmente pela desigualdade modular $|z - z_0| \leq s$ e sua

representação inclui a circunferência pontilhada $|z - z_0| = s$, como mostra a figura a seguir.

3.2. Coroa circular

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r e s dois números reais positivos. Uma coroa é formada por todos os complexos que estão fora do disco fechado de centro em z_0 e raio em r e dentro do disco aberto de centro em z_0 e raio em s , ambos centrados em z_0 . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$r < |z - z_0| < s$$

3.3. Disco Aberto

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Um disco aberto de centro em z_0 e raio em r é o conjunto de todos os complexos z tal que a distância de z a z_0 seja menor do que r . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$|z - z_0| < r$$

3.4. Disco Fechado

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Um disco fechado de centro em z_0 e raio em r é o conjunto de todos os complexos z tal que a distância de z a z_0 seja menor ou igual a r . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$|z - z_0| \leq r$$

3.5. Vizinhança Aberta

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Uma vizinhança aberta são os pontos exteriores à circunferência de centro em z_0 e raio em r tal que a distância de z a z_0 seja maior do que r . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$|z - z_0| > r$$

3.6. Vizinhança Fechada

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r um número real positivo. Uma vizinhança fechada são os pontos exteriores à circunferência de centro em z_0 e raio em r tal que a distância de z a z_0 seja maior ou igual a r . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$|z - z_0| \geq r$$

3.7. Conjunto Conexo ou Coroa

Seja z_0 um número complexo da forma $z_0 = a + bi$ e r e s dois números reais positivos. Uma coroa é formada por todos os complexos que estão fora do disco fechado de centro em z_0 e raio em r e dentro do disco aberto de centro em z_0 e raio em s , ambos centrados em z_0 . Portanto, satisfazem a desigualdade:

$$r < |z - z_0| < s$$

Um ponto Z ($Z = x + yi$) pertence à elipse se e somente se:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

Sendo, $Z = x + yi$, $F_1 = -c + 0i$ e $F_2 = c + 0i$, temos:

$$|Z - F_1| + |Z - F_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}$$

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + (y)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + (y)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + (x+c)^2 + (y)^2$$

$$x^2 - 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 - 2xc - c^2 - y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 4a^2 + x^2 - x^2 + 2xc + 2xc + c^2 - c^2 + y^2 - y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = 4a^2 + 4xc$$

$$\frac{4a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}}{4} = \frac{4a^2 + 4xc}{4}$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2} = a^2 + xc$$

$$\left(a\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 = (a^2 + xc)^2$$

$$(a)^2 \left(\sqrt{(x+c)^2 + (y)^2}\right)^2 = (a^2 + xc)^2$$

$$a^2((x+c)^2 + (y)^2) = (a^2 + xc)^2$$

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 + 2a^2xc - 2a^2xc$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como $a > c > 0$, implica $a^2 - c^2 > 0$, chamaremos, por conveniência, $a^2 - c^2 = b^2$, para algum $b > 0$.

Logo:

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Portanto, a elipse formada pelos conjuntos de pontos Z , $Z = x + yi$ cuja soma das distâncias até os focos $F_1 = -c + 0i$ e $F_2 = c + 0i$ é igual a uma constante $2a$, tem como equação reduzida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4. CONCLUSÃO

O trabalho apresenta uma proposta de aplicação dos números complexos para abordagem de cônicas e outras curvas no ensino médio. Com o desenvolvimento desta linha de trabalho, pretendemos facilitar a obtenção das equações algébricas de algumas curvas do plano, bem como a visualização gráfica correspondente. São utilizados conceitos e técnicas como manipulação das partes real e imaginária, conjugados, equações e inequações modulares e outros, que fazem parte da teoria elementar dos números complexos e, portanto, acessíveis aos alunos. O trabalho enfatiza o processo ensino-aprendizagem em que a matemática é utilizada como contextualização para o desenvolvimento de seus próprios tópicos.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus, a minha família e ao meu orientador.

REFERÊNCIAS

MICOTTI, M. C. O. O ensino e as propostas pedagógicas. In: BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

GARBI, Gilberto G.O. O Romance das Equações Algébricas - 2ª Ed. 2007, Editora Makron