ENSINO DE CÔNICAS E A ARTE DAS DOBRADURAS

Lucas Ribeiro de Souza Tenani, Christoffer Lucas Bezão Silveira, Eugenia Brunilda Opazo Uribe

Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS, PET Conexões de Saberes – Matemática, Três Lagoas, MS.
Agência de fomento: Programa de Educação Tutorial. E-mail: lucastenani@hotmail.com

RESUMO

O presente trabalho faz parte de uma atividade de pesquisa desenvolvida no Grupo PET Conexões de Saberes – Matemática do CPTL/UFMS, por alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo do trabalho é explorar o ensino das Seções Cônicas de maneira a desenvolver atividades diversificadas visando a construção coletiva do conhecimento, sem deixar de lado o formalismo necessário no estudo de Matemática. As atividades desenvolvidas foram leitura e compreensão de artigos e monografias sobre o tema, os quais foram estudados através de seminários de discussão e do desenvolvimento de exercícios, demonstrações e atividades práticas utilizando o processo de dobraduras para a construção de cada uma das cônicas. As atividades práticas apresentadas podem ser desenvolvidas em sala de aula sem muita dificuldade e o estudo teórico pode fornecer subsídios para o desenvolvimento do conteúdo, bem como para o desenvolvimento de projetos.

Palavras-chave: Cônicas, Dobraduras, Geometria Analítica, Programa de Educação Tutorial.

CONICAL TEACHING AND THE FOLDING ART

ABSTRACT

This paper is part of a research activity developed by the PET Group Knowledge Connections - Mathematics of CPTL/UFMS, by Mathematics Graduation students. The goal of the paper is to explore the teaching of Conical Sections, in a manner to develop diversified activities viewing collective construction of knowledge, without leaving aside the formalism necessary in the Mathematics study. The developed activities were reading and comprehending articles and monographs about the theme, which were studied through discussion seminars and development of exercises, demonstrations and practical activities, using the folding process for the construction of each of the conics sections. The practical activities presented may be developed in class without many difficulties and the theoretical study may provide informations for the development of the content, as such for the development of projects.

Keywords: Conical, Folding, Analytical Geometry, Tutorial Education Program.

INTRODUÇÃO

Segundo Eves (2011), a obra “Seções Cônicas”, um tratado de oito volumes e aproximadamente 400 proposições, tornou famoso o matemático Apolônio, nascido em 262 a.C. no sul da Ásia Menor, já que faz um estudo exaustivo dessas curvas e supera completamente trabalhos anteriores. No Livro I de seu tratado, obtinha todas as seções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. Os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por Apolônio.

As Seções Cônicas hoje são estudadas no terceiro ano de Ensino Médio e os alunos apresentam muita dificuldade no aprendizado deste tema. Assim, a atividade de pesquisa que relatamos, foi proposta no sentido de fornecer subsídios aos futuros professores para desenvolver atividades diversificadas buscando a construção coletiva do conhecimento, sem deixar de lado o formalismo necessário no estudo de Matemática. Considerando as Orientações curriculares para o Ensino Médio (Brasil, 2006) nosso trabalho partirá do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o “pensar matematicamente”, dando prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados.

O objetivo do presente trabalho é apresentar os tópicos estudados nesta atividade de pesquisa e os resultados das atividades desenvolvidas no âmbito da proposta de pesquisa do Grupo PET Conexões de Saberes – Matemática do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido através de uma série de pesquisas bibliográficas e de seminários apresentados para o professor orientador, realizando um estudo teórico/prático sobre a construção das cônicas através do processo de dobraduras.

RESULTADOS

Primeiramente, apresentaremos as três seções cônicas elipse, hipérbole e parábola, através da sua definição e dos seus elementos.

ELIPSE

Definição: Dados dois pontos quaisquer do plano, F_1 e F_2 , seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias à F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($2a > 2c$).

Elementos da Elipse:

- F_1 e F_2 são chamados Focos,
- C é o Centro da Elipse,
- A_1A_2 é o eixo maior,
- B_1B_2 é o eixo menor,
- $2c$ é distancia focal,
- $2a$ é medida do eixo maior,
- $2b$ é medida do eixo menor,
- c/a é a excentricidade.

Figura 1. Elipse

Fonte: www.brasilecola.com

Os valores a , b e c satisfazem a relação $a^2 = b^2 + c^2$ e a equação da elipse é

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde, x_0 e y_0 são as coordenadas do centro $C(x_0, y_0)$ da elipse.

HIPÉRBOLE

Definição: Sejam F_1 e F_2 dois pontos quaisquer do plano, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano cuja diferença (em módulo) das distâncias à F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($0 < 2a < 2c$).

Elementos da Hipérbole:

- F_1 e F_2 são os focos da hipérbole,
- O é o centro da hipérbole,
- A_1A_2 é o eixo real ou transversal,
- B_1B_2 é o eixo menor ou imaginário,
- $2c$ é a distância focal,
- $2a$ é a medida do eixo real ou transversal,
- $2b$ é a medida do eixo menor ou imaginário,
- c/a é a excentricidade.

Figura 2. Hipérbole

Fonte: www.brasilecola.com

Os valores de a , b e c satisfazem a relação $c^2 = a^2 + b^2$ e a equação da hipérbole é

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

onde, x_0 e y_0 são as coordenadas do centro $C(x_0, y_0)$ da hipérbole.

PARÁBOLA

Definição: Dados um ponto F uma reta d , do plano, com F não pertencente a d . Parábola é o conjunto dos pontos do plano que estão a mesma distância de F e d .

Elementos da Parábola:

- F é o foco da parábola,
- d é a diretriz,
- V é o vértice da parábola,
- VF é o eixo de simetria,

Figura 3. Parábola

Fonte: www.brasilescola.com

A equação da parábola é dada por

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2,$$

onde, x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice $V(x_0, y_0)$ da parábola.

CONSTRUÇÃO DAS CONICAS COM DOBRADURAS

Para construção de cada uma das cônicas, devemos ter em mãos: folha vegetal tamanho A4, régua, compasso, lápis e borracha. E devemos seguir alguns passos conforme mostrado a seguir para cada uma das delas.

ELIPSE

1º Passo: Desenhe uma circunferência de raio r e de centro F_1 e marque um ponto F_2 interior a mesma. Ainda, marque sobre a circunferência de raio r , n pontos P_n (figura 4a).

2º Passo: Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F_2 coincida com o ponto P_1 feito na circunferência. Desdobre a folha, voltando-a para a posição inicial. Temos assim o primeiro vinco, onde se deve traçar a reta M_1 (figura 4b).

Figura 4.

Fonte: Elaborada pelos autores

3º Passo: Faça isso para todos os pontos da circunferência, assim obteremos as mediatrizes M_n dos segmentos F_2P_n e como consequência a elipse de focos F_1 e F_2 (figura 4c).

HIPERBOLE

1º Passo: Desenhe uma circunferência de raio r e de centro F_1 e marque um ponto F_2 exterior a mesma. Ainda, marque sobre a circunferência de raio r , n pontos P_n (figura 5a).

2º Passo: Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F_2 coincida com o ponto P_1 feito na circunferência. Desdobre a folha, voltando-a para a posição inicial. Temos assim o primeiro vinco, onde se deve traçar a reta M_1 (figura 5b).

Figura 5.

Fonte: Elaborada pelos autores

3º Passo: Faça isso para todos os pontos da circunferência, assim obteremos as mediatrizes M_n dos segmentos F_2P_n e como consequência a hipérbole de focos F_1 e F_2 (figura 5c).

PARABOLA

1º Passo: Trace uma reta d e marque um ponto F fora da mesma. Marque ainda, n pontos P_n sobre a reta d , (figura 6a).

2º Passo: Faça a primeira dobra de maneira que o ponto F coincida com o ponto P_1 . Desdobre a folha, voltando-a para posição inicial. Assim, formando o primeiro vinco, onde se deve traçar a reta M_1 (Figura 6b).

3º Passo: Faça isso para os demais pontos da reta, assim, obteremos a mediatriz M_n dos segmentos FP_n e como consequência a parábola de diretriz d e foco F (figura 6c).

Figura 6.

Fonte: Elaborada pelos autores

DISCUSSÃO

Pode ser demonstrado que cada uma das cônicas construídas com as dobraduras satisfaz as propriedades e definições das mesmas, o que faremos a seguir para o caso da elipse.

ELIPSE

Na figura 7 temos uma circunferência de raio r e centro F_1 e uma elipse interna a circunferência de focos F_1 e F_2 . O ponto A pertencente à elipse é o ponto de intersecção entre a reta m_n , que é a mediatriz do segmento F_2P_n , com o segmento F_1P_n .

Queremos mostrar que $AF_1 + AF_2$ é uma constante para qualquer A tangente a elipse, satisfazendo assim a definição de elipse.

Figura 7

Fonte: Ribeiro, 2014

De fato, como dizemos antes a reta m_n é a mediatriz do segmento F_2P_n , e portanto M é ponto médio de F_2P_n e por consequência $MP_n = MF_2$. Como o segmento AM é comum aos triângulos AMP_n e AMF_2 , temos que $MP_n = MF_2$ e o ângulo $PnMA$ é igual ao ângulo AMF_2 , podemos concluir pelo critério LAL temos uma congruência entre esses triângulos. Assim podemos concluir que o segmento AF_2 e AP_n são congruentes. Portanto,

$$AF_1 + AF_2 = AF_1 + AP_n = r \text{ e que } r = 2a,$$

(o semi eixo maior é igual ao raio da circunferência) como queríamos demonstrar.

CONCLUSÃO

Podemos concluir que os objetivos foram alcançados já que o trabalho teórico/prático proposto foi desenvolvido, com resultados muito positivos, porque foi constatado que as atividades podem ser desenvolvidas de fato em sala de aula, ajudando a diversificar as atividades para o ensino das cônicas. Além disso, os alunos participantes da atividade poderão utilizar os conteúdos desenvolvidos na sua futura vida profissional. Como continuidade deste projeto está

sendo trabalhado o uso de artefatos para a construção de cônicas, isto é, pesquisa de materiais concretos para complementar o ensino de cônicas em Laboratório de Ensino.

REFERENCIAS

1. BRASIL. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).
2. EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.
3. HARTUNG, G.E, Construção das Cônicas com Dobraduras. Portal do Professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219>
4. RIBEIRO, F.O. O Uso de Dobraduras no Processo de Ensino das Cônicas no Ensino Básico. Monografia (PROFMAT). Departamento de Ciências Exatas. Universidade Estadual de Santa Cruz.. 2014.
5. Brasil Escola. Disponível em <http://www.brasilecola.com/matematica>