CLASSIFICAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE LIE TRIDIMENSIONAIS

José Paulo Rodrigues da Silveira, Fernando Pereira de Sousa

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campus de Três Lagoas. Bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes – Matemática/CPTL/UFMS. E-mail: josepapt@hotmail.com

RESUMO

O trabalho apresenta resultados de um estudo sobre “Estruturas Algébricas com ênfase em elementos da Teoria De Lie” que foi desenvolvido como parte das atividades de pesquisa e apresentações de seminários, vinculado às disciplinas de Álgebra e Álgebra Linear, com o objetivo de um futuro aprofundamento na teoria de álgebras não comutativas. Durante o desenvolvimento do presente trabalho, foram estudados alguns conceitos de Álgebra Linear, relacionados com Espaços Vetoriais, além de alguns conceitos de álgebra, no que diz respeito a Grupos, Aneis, Corpos e Ideais. Em seguida, foram estudados as definições, proposições e teoremas necessários para a abordagem das Álgebras de Lie Solúveis e Nilpotentes, bem como a classificação de álgebras de Lie Tridimensionais.

Palavras - chave: Lie, Álgebras, Solúvel, Nilpotente, Tridimensional.

CLASSIFICATION OF Lie ALGEBRA DIMENSIONAL

ABSTRACT

The paper presents results of a study on " Algebraic Structures with an emphasis on elements of Lie Theory " that was developed as part of research activities and seminar presentations , linked to the disciplines of Algebra and Linear Algebra , with a view to a future deepening in algebra theory does not commutative . During the development of this work , we studied some concepts of linear algebra , vector spaces related , and some algebra concepts , with regard to groups, rings , Bodies and ideals . Then , the settings were studied , and theorems propositions required for the approach of Lie algebras soluble and nilpotent as well as the classification of Lie algebras dimensional

Keywords: Lie, Álgebra, Soluble, Nilpotent, Three-dimensional.

INTRODUÇÃO

Para uma melhor compreensão quanto á classificação das álgebras de Lie tridimensionais é necessário um conhecimento básico sobre:

Definição 1: Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial α munido da operação colchete de Lie:

$$\begin{aligned}\alpha \times \alpha &\mapsto \alpha \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y]\end{aligned}$$

O colchete de Lie satisfaz às condições:

1. O colchete de Lie é bilinear, isto é,

$$\begin{aligned}[aX + bY, Z] &= a[X, Z] + b[Y, Z] \\ [Z, aX + bY] &= a[Z, X] + b[Z, Y], \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \forall X, Y, Z \in \alpha.\end{aligned}$$

2. O colchete de Lie é antissimétrico, isto é, $[X, X] = 0, \forall X \in \alpha$.

3. A identidade de Jacobi é satisfeita $\forall X, Y, Z \in \alpha$:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Definição 2: Seja B um subconjunto de α , chamamos de centralizador de B em α , ao conjunto $z(B) = \{X \in \alpha / [X, Y] = 0, \forall Y \in B\}$.

Definição 3: Se α é uma álgebra de Lie, então o centro de α será denotado por:

$$c(\alpha) = \{X \in \alpha / [X, Y] = 0, \forall Y \in \alpha\}.$$

Definição 4: Seja α uma álgebra de Lie. Dizemos que α' é uma álgebra derivada de α se: $\alpha' = \langle \{[X, Y] / X, Y \in \alpha\} \rangle$.

ÁLGBRAS DE LIE TRIDIMENSIONAIS

Seja α uma álgebra de Lie tridimensional e seja α' sua álgebra derivada. Classificaremos esta álgebra através das dimensões da álgebra derivada α' .

Teorema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional e tal que sua álgebra derivada α' é nula. Então, α é abeliana.

Demonstração: Suponhamos que $\dim(\alpha') = 0$, isto é, $\alpha' = \{0\}$. Neste caso, tem-se que α é uma álgebra abeliana.

Agora, analisaremos o caso em que $\dim(\alpha') = 1$. Este caso se dividirá em duas etapas, a primeira considerando $\alpha' \subset c(\alpha)$ e outra considerando que α' não está contido em $c(\alpha)$. Para $\alpha' \subset c(\alpha)$ temos o seguinte resultado sobre classificação de álgebras de Lie tridimensionais:

Teorema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional cuja álgebra derivada α' é unidimensional. Suponha que $\alpha' \subset c(\alpha)$. Então, existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de α tal que $[Y, Z] = X$, $[X, Y] = 0$ e $[X, Z] = 0$.

Demonstração: Sejam $\{X\}$ e $\{X, Y_1, Z\}$ bases de α' e α , respectivamente. Como $\alpha' \subset c(\alpha)$, temos que para qualquer $U \in \alpha'$ tem-se que $[U, W] = 0, \forall W \in \alpha$. Como $\{X\}$ é base de α' temos $[X, W] = 0, \forall W \in \alpha$, e, em $[X, Y_1] = 0$ e $[X, Z] = 0$, pois $Y_1, Z \in \alpha$. Já que $[Y_1, Z] \in \alpha'$, segue que $[Y_1, Z] = aX$, $a \neq 0$. Verifiquemos que a é realmente não nulo. Caso contrário, $[Y_1, Z] = 0$. Como $[X, Y_1] = 0 = [X, Z]$ temos que $\forall U, V \in \alpha$, vale

$$[U, V] = [aX + bY_1 + cZ, \alpha X + \beta Y_1 + \gamma Z] = 0.$$

Concluimos então que $\dim(\alpha') = 0$, contradizendo a hipótese. Definamos $Y = \frac{1}{a}Y_1$. Então, $\{X, Y, Z\}$ também é uma base de α e

$$[X, Y] = 0 = [X, Z] \text{ e } [Y, Z] = \frac{1}{a}[Y_1, Z] = \frac{1}{a}aX = X.$$

Agora, para analisar o caso em que α' não está contido em $c(\alpha)$ precisamos dos dois lemas a seguir.

Lema: Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que α' é unidimensional. Suponha que α possua uma subálgebra bidimensional $\mathfrak{b}$ que não é abeliana. Então, $\mathfrak{b}$ é um ideal de α .

Lema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que α' é unidimensional. Se α' não está contido em $c(\alpha)$, então existe uma subálgebra bidimensional de α que não é abeliana.

Veremos a seguir, uma classificação das álgebras de Lie de dimensão três, cuja álgebra derivada α' é unidimensional e não está contida em $c(\alpha)$.

Teorema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que α' é unidimensional. Se α' não está contido em $c(\alpha)$, então existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de α tal que $[X, Y] = X$, $[X, Z] = 0$ e $[Y, Z] = 0$.

Demonstração: Pelo lema anterior, temos que α possui uma subálgebra bidimensional não abeliana $\mathfrak{b}$. Seja $\{X, Y\}$ a base canônica de $\mathfrak{b}$ com $[X, Y] = X$. Pelos lemas anteriores, temos que $\mathfrak{b}$ é um ideal de α . Logo, $\alpha = \mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b})$, onde $z(\mathfrak{b})$ é o centralizador de $\mathfrak{b}$ em α . Complete a base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{b}$ para obtermos a base $\{X, Y, Z\}$ de α . Como $\alpha = \mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b})$ e $\{X, Y\}$ gera $\mathfrak{b}$, temos que $Z \in z(\mathfrak{b})$. Decorre daí que $[Z, X] = 0$ e $[Z, Y] = 0$.

À seguir, apresentaremos o caso em que a álgebra derivada α' é bidimensional:

Lema: Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que α' é bidimensional. Suponha que α possui uma subálgebra não abeliana bidimensional $\mathfrak{b}$. Então, o ideal α' é diferente de $\mathfrak{b}$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que $\alpha' = \mathfrak{b}$. Tomemos uma base $\{X, Y\}$ de $\mathfrak{b}$ com $[X, Y] = Y$. Como $\mathfrak{b}$ é ideal, temos que $\alpha = \mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b})$ e, daí,

$$\begin{aligned}\alpha' &= [\mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b}), \mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b})], \\ \therefore \alpha' &= [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [\mathfrak{b}, z(\mathfrak{b})] + [z(\mathfrak{b}), \mathfrak{b}] + [z(\mathfrak{b}), z(\mathfrak{b})] \\ \therefore \alpha' &= [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [z(\mathfrak{b}), z(\mathfrak{b})].\end{aligned}$$

Como $\dim(\mathfrak{b}) = 2$ e $\alpha = \mathfrak{b} \oplus z(\mathfrak{b})$, temos que $\dim(z(\mathfrak{b})) = 1$. Daí, concluímos que $z(\mathfrak{b})$ é abeliano e, portanto, $[z(\mathfrak{b}), z(\mathfrak{b})] = 0$. Assim, da igualdade $\alpha' = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] + [z(\mathfrak{b}), z(\mathfrak{b})]$, temos que $\alpha' = \mathfrak{b}'$. Como $\mathfrak{b}' = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ é gerado por Y , temos que α' é unidimensional, o que contradiz a hipótese.

Definição: A aplicação ad abaixo é chamada de representação adjunta da álgebra de Lie α

$$\begin{aligned}\text{ad}(X): \alpha &\rightarrow \alpha \\ X &\mapsto \text{ad}(X)\end{aligned}$$

Lema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada α' é bidimensional. Então, $\text{ad}(Z): \alpha' \rightarrow \alpha'$ é um isomorfismo $\forall Z \in \alpha$, $Z \neq \alpha'$.

O resultado a seguir classifica as álgebras de Lie Tridimensionais, cuja álgebra derivada é bidimensional.

Teorema. Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada α' é bidimensional. Então, existe uma base $\{X, Y, Z\}$ de α e escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tais que $[X, Y] = 0$, $[Z, X] = \alpha X + \beta Y$, $[Z, Y] = \gamma X + \delta Y$, e $W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ é uma matriz invertível.

Demonstração: Por intermédio do lema anterior, como α' é abeliana, tomemos uma base $\{X, Y\}$ de α' com $[X, Y] = 0$ e estendamos esta base a uma base $\{X, Y, Z\}$ de α . Ainda pelo lema anterior, $\{[X, Z], [Y, Z]\}$ também é uma base de α' , assim $[X, Z] = \alpha X + \beta Y$ e, do mesmo modo, $[Y, Z] = \gamma X + \delta Y$, uma vez que $\{X, Y\}$ também é base de α' . Como $\text{ad}(Z)$ é um isomorfismo, temos que $U = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ é invertível, pois é a matriz do isomorfismo $\text{ad}(Z)$.

Assim, como a transposta de uma matriz invertível também é invertível,

$$U^T = W = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ é invertível.}$$

Definição. Duas matrizes A e B são chamadas cogredientes se existe uma matriz invertível N e um número real $p \neq 0$ tal que $B = pN^TAN$.

Usaremos a notação $A \sim B$ para denotar que A é cogredientes a B .

Proposição. A relação A é cogredientes a B ($A \sim B$) é uma relação de equivalência.

A proposição a seguir nos mostra que no conjunto das matrizes simétricas e invertíveis só existem duas classes de equivalência de matrizes cogredientes.

Proposição. Se A é uma matriz 3×3 real, simétrica e invertível, então A é cogredientes a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou a $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Demonstração: Seja A uma matriz real, simétrica e invertível. Pelo teorema espectral, temos que existe uma matriz ortogonal N tal que N^TAN é uma matriz diagonal, ou seja,

$$N^T A N = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Como A é invertível e $\det(A) \neq 0$, temos que $\det(N^T A N) = \alpha\beta\gamma \neq 0$. Multiplicando

$N^T A N$ por γ^{-1} , obtemos: $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tomando $\frac{\alpha}{\gamma} = \alpha'$, e $\frac{\beta}{\gamma} = \beta'$, temos que A é cogradients a

$$B = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que a matriz B é cogridente a:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou a } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De fato, para mostrar isto, seja $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

Para simplificarmos a notação, troquemos α' por α e β' por β . Dessa forma, $N^T B N =$

$$\begin{pmatrix} x^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & y^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}.$$

Para concluir a demonstração, consideraremos todas as possibilidades para os sinais de α e β .

- Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, tomamos a matriz N tal que $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ e $z = 1$. Daí,

$$N^T B N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C, \text{ ou seja, } B \sim C.$$

- Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$, tomamos a matriz N tal que $x = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ e $z = 1$. Daí,

$$N^T B N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D, \text{ ou seja, } B \sim D.$$

- Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$, tomamos a matriz N tal que $x = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{-\beta}}$ e $z = 1$. Daí,

$$N^T B N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ou seja, } B \text{ é cogradients a } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora, observe que se tomarmos $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, teremos que

$$(-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, $E \sim D$.

- Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, tomamos a matriz N tal que $x = \frac{1}{\sqrt{-\alpha}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{-\beta}}$ e $z = 1$. Daí,

$$N^T B N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ ou seja, } B \sim F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Agora, tomemos } N =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que:

$$(-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, temos que $F \sim D$.

Com o teorema a seguir, encerraremos as classificações das álgebras de Lie tridimensionais:

Teorema: Seja α uma álgebra de Lie tridimensional tal que sua álgebra derivada α' também é tridimensional, ou seja, $\alpha = \alpha'$. Então, existem exatamente duas classes de álgebras de Lie tridimensionais distintas. Uma com colchetes entre os elementos da base dados por $[Y, Z] = X$; $[Z, X] = Y$ e $[X, Y] = Z$ e a outra com colchetes dados por $[Y, Z] = -X$; $[Z, X] = Y$ e $[X, Y] = Z$.

Demonstração: Seja $\{X_1, X_2, X_3\}$ uma base de α . Não é difícil demonstrar que $[X_2, X_3] = Y_1$; $[X_3, X_1] = Y_2$ e $[X_1, X_2] = Y_3$ geram α' e, portanto, constituem uma base de α' . Como $\alpha = \alpha'$, temos que $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ também é uma base de α . Denotaremos por

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

A matriz mudança de base de $\{X_1, X_2, X_3\}$ para a base $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$. Sabemos que A é invertível e mostremos, através da identidade de Jacobi, que a matriz A é simétrica. Com efeito, pela identidade de Jacobi, temos que

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] + [X_2, [X_3, X_1]] = 0, \text{ mas}$$

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] + [X_2, [X_3, X_1]] = [X_1, Y_1] + [X_3, Y_3] + [X_2, Y_2]$$

$$\begin{aligned}
&= [X_1, \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3] + [X_3, \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}X_2 + \alpha_{33}X_3] + [X_2, \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \alpha_{23}X_3] \\
&= \alpha_{12}[X_1, X_2] + \alpha_{13}[X_1, X_3] + \alpha_{31}[X_3, X_1] + \alpha_{32}[X_3, X_2] + \alpha_{21}[X_2, X_1] + \alpha_{23}[X_2, X_3] \\
&= (\alpha_{12} - \alpha_{21})[X_1, X_2] + (\alpha_{31} - \alpha_{13})[X_3, X_1] + (\alpha_{23} - \alpha_{32})[X_2, X_3]
\end{aligned}$$

Como $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é linearmente independente, a identidade de Jacobi nos diz que $\alpha_{12} - \alpha_{21} = \alpha_{31} - \alpha_{13} = \alpha_{23} - \alpha_{32} = 0$, e assim, $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, $\alpha_{31} = \alpha_{13}$ e $\alpha_{23} = \alpha_{32}$, mostrando que a matriz A é simétrica.

Consideremos agora uma outra base de α que denotaremos por $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3\}$. Temos que

$$\overline{X}_1 = \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2 + \beta_{13}X_3$$

$$\overline{X}_2 = \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2 + \beta_{23}X_3$$

$$\overline{X}_3 = \beta_{31}X_1 + \beta_{32}X_2 + \beta_{33}X_3$$

e a matriz

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \text{ é invertível.}$$

$$\text{Definamos } \overline{Y}_1 = [\overline{X}_2, \overline{X}_3], \overline{Y}_2 = [\overline{X}_3, \overline{X}_1], \overline{Y}_3 = [\overline{X}_1, \overline{X}_2].$$

Para qualquer permutação cíclica (i, j, k) de $(1, 2, 3)$ temos que

$$\begin{aligned}
\overline{Y}_i &= [\overline{X}_j, \overline{X}_k] = [\beta_{j1}X_1 + \beta_{j2}X_2 + \beta_{j3}X_3, \beta_{k1}X_1 + \beta_{k2}X_2 + \beta_{k3}X_3] \\
&= (\beta_{j2}\beta_{k3} - \beta_{j3}\beta_{k2})Y_1 + (\beta_{j3}\beta_{k1} - \beta_{j1}\beta_{k3})Y_2 + (\beta_{j1}\beta_{k2} - \beta_{j2}\beta_{k1})Y_3 \\
&= \gamma_{i1}Y_1 + \gamma_{i2}Y_2 + \gamma_{i3}Y_3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = (B^T)^{-1} \det(B^T) \text{ que é a matriz adjunta de } B^T.$$

A matriz mudança de base de $\{X_1, X_2, X_3\}$ para a base $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ é A e a matriz mudança de base de $\{\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3\}$ para $\{X_1, X_2, X_3\}$ é $(B^T)^{-1}$. Portanto, se $\overline{A}$ é a matriz $(\overline{\alpha}_{ij})$ tal que $\overline{Y}_i = \overline{\alpha}_{i1}\overline{X}_1 + \overline{\alpha}_{i2}\overline{X}_2 + \overline{\alpha}_{i3}\overline{X}_3$ tem-se que

$$\overline{A} = \det(B^T) (B^T)^{-1} A B^{-1}$$

Logo A e $\overline{A}$ são matrizes simétricas e cogradients. Daí, A (ou $\overline{A}$) é cogradients a C ou a D onde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que no caso da matriz C obtemos a primeira classe de álgebras do enunciado. Analogamente, para a matriz D obtemos a segunda classe de álgebras.

Exemplo. Um exemplo de álgebra de Lie tridimensional cuja álgebra derivada $\alpha' = \alpha$ é a álgebra $sl(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) / \text{tr}(A) = 0\}$.

De fato, os elementos de $sl(2, \mathbb{R})$ são da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. Vamos analisar agora a sua álgebra derivada.

$$sl(2, \mathbb{R})' = \{[X, Y] / X, Y \in sl(2, \mathbb{R})\}$$

Seja $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$, então

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 & -2a_2 b_1 \\ 2c_1 a_2 - 2a_1 c_2 & -b_1 c_2 + b_2 c_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que $sl(2, \mathbb{R})'$ possui dimensão 3, pois a primeira e a quarta entrada da matriz acima são múltiplos. Portanto, $sl(2, \mathbb{R}) = sl(2, \mathbb{R})'$.

O objetivo deste estudo é o aprofundamento na teoria de álgebras não comutativas.

METODOLOGIA

O trabalho é resultado de uma pesquisa teórica desenvolvida nos anos de 2014 e 2015, embasada no livro “Estruturas Algébricas com ênfase em elementos da Teoria de Lie”, desenvolvido através de discussões do tema com o orientador e apresentações de seminários como parte das atividades do programa PET Conexões de Saberes Matemática – UFMS/CPTL no estudo da Teoria De Lie. O trabalho incluiu uma etapa de leitura e resoluções de exercícios, desenvolvimento das atividades propostas e a tabulação dos resultados obtidos. O estudo e as atividades desenvolvidas foram avaliados através da apresentação de seminários de discussão.

RESULTADOS

Foram obtidos resultados importantes para a classificação de Álgebras de Lie Tridimensionais, o que permitiu fazer aprofundamentos no tema que serão temas a serem apresentados no TCC do curso de graduação do aluno e em apresentações de trabalhos de pesquisas futuras.

CONCLUSÃO

Através do trabalho foram obtidos resultados que permitem um aprofundamento em estudos sobre a 'Teoria de Lie', bem como uma iniciação em conteúdos aprofundados da Álgebra não comutativa, possibilitando assim um maior conhecimento sobre áreas diversas de matemática.

BIBLIOGRAFIA

BARROS, C.J.B; SANTANA A.J. Estruturas Algébricas Com Ênfase em Elementos da Teoria de Lie. Maringá: Eduem, 2011.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. Um Curso de Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2010.

HEFEZ A.; VILLELA, M. L. T. Introdução à Álgebra Linear. 1a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.