O CÁLCULO FUNCIONAL: ABORDAGENS DO FLUXO

Luana Beatriz Cardoso, Fernando Pereira de Souza

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Campus de Três Lagoas. E-mail: luhbeatriz93@gmail.com
Bolsista do Grupo PET Matemática/CPTL/UFMS

RESUMO

Este trabalho apresenta um resultado do cálculo funcional dando ênfase na abordagem do fluxo. O fluxo é usualmente definido por meio da expansão em série de potências, o que exige o conceito de limites, convergência uniforme e Álgebra Linear. Concluímos que através de funções de matrizes, que pode ser sintetizada como uma generalização da versão em dimensão finita do cálculo funcional de Dunford-Schwarz [4] e que já era conhecida por Gantmacher [3], o tratamento funcional mostrou-se uma ferramenta de fácil compreensão das propriedades do fluxo sem a necessidade do uso de conceitos mais avançados e que geralmente não é visto pelos estudantes durante a graduação. Este trabalho foi desenvolvido ao longo das atividades do grupo PET Matemática da UFMS de Três Lagoas MS, em conjunto com o orientador Fernando Pereira de Sousa.

Palavras - chave: Função de Matrizes, Exponencial, Série de Potências.

THE FUNCTIONAL CALCULUS: FLOW APPROACHES

ABSTRACT

This paper presents a result of the functional calculus with emphasis on the flow approach. The flow is usually defined by the power series expansion, which requires the concept limits, uniform convergence and Linear Algebra. We conclude that using arrays of functions which can be synthesized as a generalized version of finite size of the functional calculus Dunford -Schwarz [4] which was known to Gantmacher [3] the functional treatment proved to be a tool easy understanding of the flow properties without requiring the use of more advanced concepts and is not usually seen by students during graduation. This work was developed over the activities of UFMS Mathematics of PET group Three Ponds MS, together with the supervisor Fernando Pereira de Sousa.

Keywords: Matrix Function, Exponential, Powers Series.

INTRODUÇÃO

Dada uma matriz quadrada A , funções $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ podem gerar funções de matrizes quadradas, conhecidas como funções de matrizes, como é o caso do fluxo e^{At} , que usualmente é definida por meio da expansão em série de potências,

$$\exp(z\tau) = e^{z\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \tau^n}{n!}.$$

Como este é um conceito visto usualmente em cursos finais da graduação este cálculo é inacessível para muitos alunos, afinal essa definição do fluxo torna inviável o cálculo explícito, nessa perspectiva o cálculo funcional facilita a obtenção de e^{At} , o propósito desse trabalho é estudar todos os conceitos necessários para compreender tal aplicação.

METODOLOGIA

O trabalho foi realizado através de uma pesquisa teórica desenvolvida no ano de 2015, foi utilizado o livro “Álgebra Linear Um segundo curso/Hamilton Prado Bueno” e apresentado seminários com o orientador. Para um melhor entendimento do conteúdo foi incluído uma etapa de resoluções de exercícios, desenvolvimento das atividades propostas e a tabulação dos resultados obtidos.

RESULTADOS

Iniciaremos com a definição usual do fluxo e^{At} , que depende da noção de norma de uma matriz quadrada.

Definição. Seja $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{K}^n$. Definimos

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Chamamos $\|A\|$ de **norma** da matriz A .

A próxima proposição nos garante que a norma de uma matriz está bem definida no espaço $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Proposição. Seja $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ a aplicação linear dada pela matriz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$. Então

- (i) A aplicação $\|\cdot\|: \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow [0, \infty)$ é uma norma;
- (ii) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ para quaisquer $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$;
- (iii) $\|A\| = \max_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle Ax, y \rangle|$.

(Demonstração conforme [1] página 175)

A partir da definição, utilizaremos a função exponencial $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, cuja representação em série de potências é dada por

$$\exp(z\tau) = e^{z\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n \tau^n}{n!},$$

que converge uniformemente em conjuntos compactos.

Se $\|A\|$ denotar a norma usual no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n)$ das transformações lineares $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, afirmamos que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n \tau^n}{n!},$$

define um operador linear. De fato, a norma em $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n)$ tem a propriedade $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, seguindo-se daí que $\|A^i\| \leq \|A\|^i$. Assim, para $k \in \mathbb{N}$, decorre que

$$\left\| 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n \tau^n}{n!} \right\| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n \tau^n}{n!}.$$

Vamos verificar que para cada valor fixo τ de fixo, a série à direita converge. Para isto aplicando o Teste da Razão onde o termo geral é $a_n = \frac{\|A\|^n}{n!}$ poderemos verificar sua convergência,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\|A\|^n}{n!} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\|A\|^n}{n!}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\|A\|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A\|^n \cdot \|A\|}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{\|A\|^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|A\|}{(n+1)} = \|A\| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)} = 0. \end{aligned}$$

Para analisarmos a convergência da série à esquerda utilizaremos o seguinte resultado da análise real:

Definição. Seja $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona decrescente, e a sucessão de funções $f_n: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \mathcal{X}_{[n, n+1]} f(x)$, designando $\mathcal{X}_{[n, n+1]}$ a função característica do intervalo $[n, n+1)$. Demonstra sucessivamente que:

(i) A série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente para $f(x), x \geq 1$, e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, então a convergência é uniforme;

(ii) Se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ é divergente, então não existe uma sucessão de termo geral $a_n \geq 0$, verificando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ e tal que $|f_n(x)| \leq a_n, n \in \mathbb{N}, x \geq 1$;

Como o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n)$ é completo, o M-teste de Weierstras implica que

$$\exp(A\tau) = e^{A\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n \tau^n}{n!},$$

esta bem definido e claramente é um operador linear. Tomando $\tau = t \in \mathbb{R}$, definimos o *fluxo* e^{At} da matriz A. O teorema a seguir fomenta o de que a convergência é uniforme, se τ pertencer a um conjunto compacto.

Teorema.(Derivação termo a termo). Se a série de potência $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência $R > 0$, então a função f definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \end{aligned}$$

é diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e

$$\begin{aligned} (i) \quad f(x) &= c_1(x-a) + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

O raio de convergência das séries de potências na equação acima também é R.

Logo a diferenciação termo a termo produz derivada.

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = \\ &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \frac{d}{dt} e^{At} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n n t^{n-1}}{n!} = \\ &= A \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1} n t^{n-1}}{(n-1)!} \right) = A \left(I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) = A e^{At}. \end{aligned}$$

Quando $t = 0$, temos

$$e^{At}|_{t=0} = e^0 = I.$$

Porém essa definição do fluxo torna inviável o cálculo explícito, por estar recorrendo a séries de potências, nessa perspectiva o cálculo funcional facilita a obtenção de e^{At} .

Tal resultado será verificado através do exemplo a seguir, onde A será uma matriz quadrada. Com isso consideraremos a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{At}$, que define a função de matriz e^{At} .

Seja, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Queremos calcular e^{At} . O polinômio característico de A e também seu polinômio mínimo. Temos que,

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det \left(x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \det \begin{pmatrix} x-2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix} = (x-2) \cdot x. \end{aligned}$$

Como os autovalores de A são 0 e 2, então, o polinômio mínimo será, $m_A(x) = (x-2) \cdot x$. Considerando o fato de que e^{At} é uma função de matriz, então podemos escrevê-la como $e^x = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$, com $\partial r < \partial m$. Contudo, por definição o polinômio $m_A(x) = 0$, logo $e^x = r(x)$ e como $\partial r < \partial m$, então, $r(x) = ax + b$. Substituiremos os autovalores do polinômio mínimo.

$$\begin{cases} e^2 = q(2) \cdot m_A(2) + r(2) = r(2) = a \cdot (2) + b, \\ e^0 = q(0) \cdot m_A(0) + r(0) = r(0) = a \cdot (0) + b. \end{cases}$$

Sistematizando,

$$\begin{aligned} \begin{cases} e^2 = a \cdot (2) + b \\ e^0 = a \cdot (0) + b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} e^2 = 2a + b \\ 1 = b \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} e^2 = 2a + 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{e^2 - 1}{2}, \\ b = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^A &= q(A) \cdot p(A) + r(A) \\ &= r(A) = \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) \cdot A + I \\ &= \left(\frac{e^2 - 1}{2} \right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(e^2 - 1)}{2} + 1 & \frac{e^2 - 1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^2 & \frac{e^2 - 1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

DISCUSSÃO

Usualmente é necessário obter a forma canônica de Jordan da matriz A bem como recorrer a séries de potências para a obtenção do fluxo, o que conforme fora evidenciado ao longo do texto é um método deveras complicado. Sendo assim apresentamos uma forma alternativa de introduzir o fluxo ao utilizar o tratamento funcional, que é um método de fácil utilização, bem como fácil compreensão considerando que o aluno esteja munido de todas as ferramentas necessárias para o cálculo funcional.

CONCLUSÃO

O cálculo do fluxo através de sua representação em séries de potências é comumente visto em diversos livros de álgebra linear, entretanto considerando a sua complexidade bem como a não aplicabilidade deste método visamos evidenciar a utilização do tratamento funcional. Para tal visualização o cálculo funcional mostra-se extremamente simples e tem consequências notáveis: $f(A)$ é sempre um polinômio na matriz A , que pode ser facilmente obtido se são conhecidos os autovalores com multiplicidade de A .

REFERÊNCIAS

Bueno, H.P. Álgebra Linear Um segundo curso/Hamilton Prado Bueno. Ed. –Rio de Janeiro: SBM, – Rio de Janeiro – RJ, 2006.

Coelho, F.U. Um curso de Álgebra Linear/ Flávio Ulhoa Coelho, Mary Lilian Lourenço-2.ed.rev. e ampl.,3 reimpr.-São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo,2003.-(Acadêmica,34).

Gantmacher,F.R.: The Theory of Matrices,vol.1 and 2,Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

N. Dunford and J. T. Schwarz: Linear operators I, Interscience, New York, 1968.

N.J.Higham: Function of Matrices –Theory and Applications, Siam, Philadelphia, 2008.

<http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898717778>