UMA INTRODUÇÃO A TOPOLOGIA

TÍTULO DO TRABALHO EM INGLES

Mário Márcio dos Santos Palhares¹, Antonio Carlos Tamarozzi²

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, Três Lagoas, MS. E-mail: e-mail: mario-palhares@live.com. ¹Bolsista do Grupo PET MATEMÁTICA – Matemática/CPTL/UFMS. ²Tutor do Grupo PET MATEMÁTICA – Matemática/CPTL/UFMS

RESUMO - A topologia está presente em diversas áreas da matemática, sendo indispensável para dar sentido à definições básicas como o estudo local, aproximações e vizinhanças. Em consequência permite a definição precisa de conceitos fundamentais da Matemática como limites e convergências, primordiais para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. No presente trabalho, estudamos uma generalização da topologia da reta real através do estudo de distâncias em conjuntos arbitrários, possibilitando obter a definição de espaços métricos. Enfatizamos o estudo da topologia nos cursos de Licenciatura em Matemática, como um conceito que agrupa as áreas matemáticas: Álgebra e Análise e que generaliza propriedades básicas da Matemática.

Palavras-chave: Vizinhanças; fronteira; aproximações; limites; ensino médio.

ABSTRACT - The topology is present in several mathematics' areas, being necessary to give meaning to the basic settings such as local study, approaches and neighborhoods. Consequently allows the precise definition of fundamental mathematics' concepts as limits and convergence, of primary importance for the development of the Differential and Integral Calculus. In this work, we study a generalization of the topology in the real line through the study of distances on arbitrary sets, allowing get the definition of metric spaces. We emphasize the study of topology courses in Mathematics, as a concept that brings together mathematical areas: algebra and analysis which generalizes the basic properties of mathematics.

Keywords: Topology; border; approaches; neighborhoods; basic education.

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho será ressaltado o estudo no espaço euclidiano, onde a topologia, permite uma melhor interpretação de conceitos matemáticos como vizinhanças, o espaço dos números em uma reta e distâncias entre elementos de um conjunto, conceitos estes, básicos para outras áreas da Matemática, como o Cálculo e a Análise. Apesar da importância do tema para os cursos de formação de professores, as diretrizes curriculares de um curso de Matemática licenciatura não exigem o tema topologia nas grades curriculares dos cursos de licenciatura.

Para uma introdução ao estudo de topologia, é necessário ter o conhecimento sobre alguns conceitos básicos de espaços métricos, tais como a definição de métrica, bolas abertas, conjuntos abertos, que será definido mais adiante.

Além do conhecimento científico do tema, o objetivo deste trabalho foi identificar conceitos amplamente utilizados no ensino, subentendidos em conceitos estudados na disciplina de espaços métricos.

2 METODOLOGIA

Este trabalho foi realizado através de estudos semanais com acompanhamento do orientador, apresentação de seminários, e resoluções de exercícios.

3 RESULTADOS

Será feito um breve estudo sobre alguns conceitos básicos de espaços métricos. Iniciamos pela ideia de métricas, que é o sentido da distância entre pontos de um conjunto.

Quando se fala na reta dos reais, e da distância entre dois pontos desta reta, existe uma métrica muito conhecida, sejam x e y estes pontos, então a distância entre eles será dada por $|x - y|$. Para o espaço euclidiano o raciocínio é análogo, então, dados dois pontos $x = (x_1, y_1)$ e $y = (x_2, y_2)$ então a distância entre estes pontos será dado por $d = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$. Assim, pode-se ter uma visão mais ampla destas “distâncias”, que a partir de agora será denotado por métrica, onde se estabelece uma definição mais geral.

Definição: Dado um conjunto $M \neq \emptyset$ seja $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^2$ e indiquemos por $d(x, y)$ a imagem de um par genérico $(x, y) \in M \times M$, através da função d . Dizemos que d é uma métrica sobre M se satisfazer as seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$(M_1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(M_2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M_3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Um espaço métrico é formado por um par (M, d) , onde M é um conjunto arbitrário e d uma métrica sobre M .

Outro ponto importante a ser acentuado são as bolas abertas, onde

possibilita formalizar “aproximações” e “vizinhanças” sem as quais as noções de limites e convergência não teriam o rigor matemático necessário.

Definição: Seja p um ponto de um espaço métrico (M, d) . Sendo $\varepsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ε , que indicaremos por $B(p, \varepsilon)$, é o seguinte subconjunto de M :

$$B(p, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, p) < \varepsilon\}$$

No espaço euclidiano, existem três métricas mais conhecidas, onde para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$ são assim definidas:

$$D(x, y) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

$$D_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$D_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|; |x_2 - y_2|\}$$

Sendo $p = (a, b)$ um ponto fixo do $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\varepsilon > 0$ segundo a métrica D , é o conjunto:

$$\begin{aligned} B(p, \varepsilon) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2} + \frac{(y-b)^2}{\varepsilon^2} < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{(x-a)}{\varepsilon} \right)^2 + \left(\frac{(y-b)}{\varepsilon} \right)^2 < 1 \right\} \end{aligned}$$

Concluindo assim que o gráfico do conjunto $B(p, \varepsilon)$ é um disco aberto, cujo centro é $p = (a, b)$ e raio ε .

Para a métrica D_1 temos o seguinte conjunto de bola aberta:

$$B(p, \varepsilon) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |a - x| + |b - y| < \varepsilon \right\}$$

Como $|a - x| + |b - y| < \varepsilon \Leftrightarrow |a - x| < \varepsilon - |b - y| \Leftrightarrow |b - y| - \varepsilon < a - x < \varepsilon - |b - y|$, obtendo assim duas situações:

Primeira:

$$|b - y| - \varepsilon < a - x \Leftrightarrow |b - y| < a - x + \varepsilon \Leftrightarrow -a + x - \varepsilon < b - y < a - x + \varepsilon$$

Assim,

$$-a+x-\varepsilon < b-y \Leftrightarrow y < b+a-x+\varepsilon \Leftrightarrow y < -(x-a)+(b+\varepsilon)$$

e

$$b-y < a-x+\varepsilon \Leftrightarrow y > x-a+b-\varepsilon \Leftrightarrow y > (x-a)+(b-\varepsilon)$$

Segunda:

$$a-x < \varepsilon - |b-y| \Leftrightarrow |b-y| < -a+x+\varepsilon \Leftrightarrow a-x-\varepsilon < b-y < -a+x+\varepsilon$$

Logo,

$$a-x-\varepsilon < b-y \Leftrightarrow y < x-a+b+\varepsilon \Leftrightarrow y < (x-a)+(b+\varepsilon)$$

e

$$b-y < -a+x+\varepsilon \Leftrightarrow y > -x+a+b-\varepsilon \Leftrightarrow y > -(x-a)+(b-\varepsilon)$$

Concluindo assim a existência de quatro retas, e, pela desigualdade, temos que o gráfico é um quadrado aberto, sem os

lados, de centro $p = (a, b)$ e com as diagonais paralelas aos eixos x e y com 2ε de comprimento.

Por último, a métrica D_2 , o conjunto de bola aberta será:

$$B(p, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|a-x|, |b-y|\} < \varepsilon\}$$

Assim, tanto $|a-x|$ e $|b-y|$ são menos que ε . Logo,

$$|a-x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a-x < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon+x < a < \varepsilon+x \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

e

$$|b-y| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < b-y < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon+y < b < \varepsilon+y \Leftrightarrow b-\varepsilon < y < b+\varepsilon.$$

Formando assim quatro retas, e, pelas desigualdades teremos um quadrado aberto, com os lados paralelos aos eixos das

coordenadas, com lado de 2ε de comprimento e centro (a, b) .

Proposição 1: Dados $B(p, \varepsilon)$ e $B(p, \delta)$, se $\varepsilon \leq \delta$, então $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta)$.

Demonstração: Seja x um ponto arbitrário de $B(p, \varepsilon)$, então $d(x, p) < \varepsilon$. Como temos que $\varepsilon \leq \delta$, logo $d(x, p) < \delta$, assim, $x \in B(p, \delta)$.

A partir destes conceitos, iremos agora definir conjuntos abertos.

Definição: Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se, para todo $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset A$.

Proposição 2: Seja A coleção dos conjuntos abertos de um espaço métrico (M, d) . Então:

- (i) $\emptyset, M \in A$;
- (ii) $A, B \in A \Rightarrow A \cap B \in A$;

(iii) Se (B_i) é uma família de conjuntos abertos de M , ou seja, se cada $B_i \in A$, então $\cup B_i \in A$.

Demonstração: Como $\emptyset$ não contém pontos e, portanto, não pode contrariar a definição dada, logo $\emptyset$ é aberto. Para mostrar que M é aberto, basta visualizar que toda bola aberta de centro $p \in M$ é um subconjunto de M , o que é dado por definição.

Seja $p \in A \cap B$, então $p \in A$ e $p \in B$, então existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que $B(p, \varepsilon) \subset A$ e $B(p, \delta) \subset B$. Supondo $\varepsilon, \delta > 0$, pela proposição 1, temos que $B(p, \varepsilon) \subset B(p, \delta) \subset B$, e assim, $B(p, \varepsilon) \subset A \cap B$.

Seja $p \in \bigcup B_i$. Então existe um índice t tal que $p \in B_t$ e, como B_t é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset B_t$, e assim, $B(p, \varepsilon) \subset B_i$.

Essas definições possibilita definirmos uma estrutura de conjunto mais geral, que forma uma topologia. Dado um conjunto $E \neq \emptyset$ e seja τ uma coleção de subconjuntos de E , então diremos que τ é uma *topologia* sobre E se:

- (i) $\emptyset, M \in \tau$;
- (ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$;
- (iii) Se (X_i) é uma família de conjuntos de τ , então $\bigcup X_i \in \tau$.

O par (E, τ) é um espaço topológico.

Assim podemos concluir que A é uma topologia sobre M , e (M, A) é um espaço topológico. Logo, todo espaço métrico é um espaço topológico.

4 DISCUSSÃO

Com este trabalho estudamos os espaços métricos como uma introdução aos espaços topológicos. Apresentamos as principais definições e conceitos que generalizam noções matemáticas básicas, como vizinhanças e aproximações. Estes assuntos representam os alicerces para o avanço em áreas da matemática importantes como a Análise, para o qual formalizam-se a noção de limites. Por outro lado, contribuem para a formação do professor de Matemática com o entendimento e segurança necessários para a abordagem de conteúdos como a

construção dos números reais e a disposição dos mesmos na reta real.

5 CONCLUSÃO

A noção de métrica estende o sentido comum de medida que temos em conjuntos euclidianos, sendo importante e interessante observar que as propriedades e técnicas inerentes a estes espaços podem ser estendidas a espaços arbitrários: noções de vizinhanças e em consequência, convergências e a descrição de conjuntos abertos. No trabalho vimos que a definição de espaços métricos é uma abstração fundamentada, quase que totalmente, na experiência com números reais e espaços euclidianos, porém é suficientemente flexível para incluir uma grande variedade de outros conjuntos, com propriedades comuns.

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages, Espaços Métricos, Ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1977.

VOMERO, Maria Fernanda, Medidas extremas. Disponível em <pre-vestibular.arteblog.com.br/54350/HISTORIA-DAS-MEDIDAS-espaco-volume-e-massa/> SILVA, Gentil Lopes da, Espaços Métricos (Comentado), Ed. UNB, 2008.