RAIZ QUADRADA DE OPERADORES AUTO-ADJUNTOS

Ester Cristina Marquezani Rocha¹; Fernando Pereira de Souza²

¹Aluna do Curso de Matemática – CPTL/UFMS, bolsista do Grupo PET – Matemática/CPTL/UFMS. ²Professor do Curso de Matemática – CPTL/UFMS. E-mail: estercmrocha@gmail.com

RESUMO

Inicialmente estudamos definições e propriedades relacionadas a Espaços Vetoriais e Operadores em espaços finitos. No estudo de operadores lineares, notamos que existem características particulares quando o operador linear é Auto-adjunto, mostramos que operadores lineares Auto-adjuntos possuem apenas autovalores reais e que os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, além disso, obtemos uma base ortogonal para o espaço vetorial finito onde este operador está definido. Outro resultado importante é o fato de existir a Raiz Quadrada Positiva Semidefinida de um Operador Auto-adjunto, tratada neste trabalho, esta Raiz Quadrada será um Operador que poderá ser encontrado através da raiz quadrada dos Autovalores.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Operadores Auto-adjuntos, Decomposição Primária, Autovalores, Raiz Quadrada.

INTRODUÇÃO

Espaços Vetoriais em geral abrangem uma enorme gama de conjuntos, finitos e infinitos, focaremos o estudo nos espaços de dimensão finita, que serão chamados de espaços vetoriais Euclidianos. Nestes espaços trabalharemos os Operadores Auto-Adjuntos, que possuem características interessantes.

Primeiro mostraremos que Operadores Auto-adjuntos possuem apenas autovalores reais, mesmo trabalhando em espaços vetoriais complexos. Outro resultado importante que estudamos é o fato que autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais, e, portanto, são linearmente independentes, este resultado nos encaminha para encontrar uma base ortogonal para o espaço vetorial.

Fizemos um estudo minucioso sobre decomposição primária e a forma canônica de Jordan, estes resultados nos auxiliam para mostrar que os autovetores de um Operador Auto-adjunto formam uma base ortogonal e, portanto a matriz da base ortogonal do operador em relação a esta é diagonal.

A base ortogonal $\mathcal{B}$, formada por autovetores nos permite definir um operador tal que $P^2 = T$, dizemos então que P é a Raiz Quadrada de T . Neste trabalho detalhamos a forma de encontrar a Raiz de um Operador Auto-adjunto.

METODOLOGIA

O trabalho foi desenvolvido com base em uma pesquisa teórica e discussão do tema com o orientador através de seminários, aprofundando conhecimentos em tópicos de álgebra linear que não foram abordados ao longo do curso. O assunto abordado faz parte das atividades do programa PET Matemática – UMFS/CPTL. O trabalho incluiu uma etapa de leitura, resoluções de exercícios, desenvolvimento das atividades propostas e a tabulação dos resultados obtidos. O estudo e as atividades desenvolvidas foram avaliados através da apresentação de seminários de discussão.

RESULTADOS

Nosso estudo se baseia em espaços vetoriais de dimensão finita e operadores lineares definidos nestes espaços, começamos aqui enunciando alguns resultados preliminares.

Definição 1: Um conjunto não vazio X é um espaço vetorial sobre (um corpo) $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas as seguintes duas operações:

(A) cada par x, y de vetores de X corresponde um vetor $x + y \in X$, chamado de soma de x e y , de modo que:

(A1) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in X$ (propriedade comutativa),

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in X$ (propriedade associativa),

(A3) exista em X um vetor, denominado vetor nulo e denotado por 0 , tal que $0 + x = x$, $\forall x \in X$,

(A4) a cada vetor $x \in X$ exista um vetor em X , denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$,

(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in X$, corresponde um vetor $\alpha \cdot x \in X$, denominado produto por escalar de α por x de modo que:

(M1) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha(\beta \cdot x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$ (propriedade associativa),

(M2) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in X$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{K}$),

Além disso, vamos impor que as operações dadas em (A) e (M) se distribuam, isto é, que valham as seguintes propriedades:

(D1) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall x, y \in X$,

(D2) $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$.

Exemplo 1: O conjunto de polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{K} \text{ e } n \geq 0\}$$

é um espaço vetorial com as operações usuais de soma de polinômios e de multiplicação por escalar.

Definição 2: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear se

- (1) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$, para todos $u_1, u_2 \in U$,
- (2) $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in U$.

Definição 3: Sejam E, F espaços com produto interno e $T : E \rightarrow F$ uma aplicação. Uma aplicação $T^* : E \rightarrow F$ é adjunta de T , se satisfizer

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \forall x \in E, y \in F.$$

No nosso trabalho, fizemos um estudo sobre um caso particular de operadores definido a seguir:

Definição 4: Sejam E um espaço euclidiano e $T : E \rightarrow E$ um operador linear. Dizemos que T é auto-adjunto se $T^* = T$.

Teorema 1 (Espectral): Sejam X um espaço vetorial complexo de dimensão n e $T : X \rightarrow X$ um operador linear com polinômio característico

$$p(z) = (z - \lambda_1)^{s_1} \cdots (z - \lambda_l)^{s_l},$$

em que os autovalores λ_i são distintos, para $i = 1, \dots, l$.

Então existem subespaços $W_1, \dots, W_l$ invariantes por T (isto é, $T(W_i) \subset W_i$) tais que

$$X = W_1 \oplus \cdots \oplus W_l.$$

Os espaços W_i estão relacionados com autovetores do operador T .

Lema 1: Sejam E um espaço euclidiano e $H : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto. Então

- (i) H possui apenas autovalores reais;
- (ii) autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração: (i) Supondo que E seja um espaço complexo. Seja x um autovetor associado ao autovalor λ de H . Então,

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Hx, x \rangle = \langle x, Hx \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$$

de modo que

$$(\lambda - \bar{\lambda})\langle x, x \rangle = 0.$$

Assim, $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ii) Sejam x, y autovetores associados aos autovalores distintos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Então

$$\lambda\langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Hx, y \rangle = \langle x, Hy \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu\langle x, y \rangle$$

de modo que

$$(\lambda - \mu)\langle x, y \rangle = 0$$

Como $\lambda \neq \mu$, temos que $\langle x, y \rangle = 0$, então $x \perp y$. ■

Teorema 2 (Espectral dos Operadores Auto-adjuntos): Sejam E um espaço euclidiano complexo e $H : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto. Então os autovetores de H formam uma base ortogonal de E .

O Teorema 2 nos diz que um operador auto-adjunto é diagonalizável.

Lema 2: Seja E um espaço euclidiano. Um operador auto-adjunto $H : E \rightarrow E$ é positivo e semidefinido se, e somente se, seus autovalores forem todos maiores do que ou iguais a zero. O operador H é positivo definido se, e somente se, todos os seus autovalores forem positivos.

Teorema 3 (Raiz Quadrada): Sejam E um espaço euclidiano e $H : E \rightarrow E$ um operador auto-adjunto e positivo semidefinido. Então H possui uma única raiz quadrada positiva semidefinida $P : E \rightarrow E$.

Demonstração: Consideremos a decomposição de E como soma direta ortogonal de autoespaços de $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$, em que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são autovalores distintos de H . Esta decomposição se deve ao Teorema 1. Se $x = x_1 + \cdots + x_k \in E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}$, então $Hx = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$. Definimos $P_x = \sqrt{\lambda_1} x_1 + \cdots + \sqrt{\lambda_k} x_k$. Temos que $P^2 x = Hx$, mostrando que P é uma raiz quadrada de H e pelo Lema 2 temos que P é positivo e semidefinido. ■

Exemplo 2: Seja o operador auto-adjunto $T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definido por $T(z, w) = (2z + (1+i)w, (1+i)z + 3w)$.

A matriz desta transformação em relação à base canônica será

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando os autovetores temos

$$[T - xI]_{can} = \begin{bmatrix} 2-x & 1+i \\ 1-i & 3-x \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \det[T - xI]_{can} = (x-1)(x-4).$$

Assim, os autovalores são $x = 1$ e $x = 4$.

Para calcular os autovetores encontramos os vetores que satisfazem as relações $T(v) = 1 \cdot v$ e $T(v) = 4 \cdot v$. Os vetores $v_1 = (1+i, 1)$ e $v_2 = (1+i, 2)$ que, respectivamente, satisfazem as relações que precisávamos, assim, todos os múltiplos de v_1 satisfazem a primeira igualdade e todos os múltiplos de v_2 satisfazem a segunda igualdade.

Temos que v_1 e v_2 são associados a autovalores distintos, então são ortogonais entre si, e formam uma base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ para o espaço $\mathbb{C}^2$. Assim, temos a seguinte matriz de T na base $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Extraindo a raiz quadrada dos autovalores, temos o operador

$$[P]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tal que $[P]_{\mathcal{B}}^2 = [T]_{\mathcal{B}}$, ou seja, o operador P é uma raiz quadrada do operador T , e é único, segundo o Teorema apresentado. ■

DISCUSSÃO

Somente operadores não-negativos possuem raiz quadrada auto-adjunta, pois resulta imediatamente que da definição de A^* que o quadrado de um operador auto-adjunto é não-negativo. Entretanto, o quadrado de um operador de outro tipo pode ser um operador (auto-adjunto) negativo. Por exemplo, a rotação de 90° no plano tem quadrado igual à rotação de 180° , que é igual a $-I$. Além disso, um operador positivo pode ter uma raiz quadrada que não é auto-adjunta. Por exemplo, o operador $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $A(x, y) = (2x - y, 3x - 2y)$ é uma raiz quadrada da identidade $I_{\mathbb{R}^2}$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, estudamos tópicos avançados de Álgebra Linear com enfoque no estudo de Operadores Auto-adjuntos. Com base na Diagonalização de Operadores Auto-Adjuntos e no Teorema Espectral pudemos notar que nos casos de Operadores Auto-adjuntos Positivos

Semidefinidos existe uma única raiz quadrada semidefinida para um operador em espaços vetoriais Euclidianos.

O desenvolvimento do trabalho possibilitou o contato com técnicas importantes necessárias para o tratamento teórico empregado em Álgebra Linear e que são importantes para a continuidade do estudo de temas na área.

REFERÊNCIAS

1. BUENO, H. Álgebra Linear, Um Segundo Curso. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
2. COELHO, F.; LOURENÇO, M. Um curso de Álgebra Linear. 2.ed. rev. e ampl. 2.reimp. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.
3. LIMA, E. Álgebra Linear. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA 2011.