DIFERENCIAÇÃO COMPLEXA E AS CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

Pâmela Catarina de Sousa Brandão¹, Fernando Pereira Sousa²

¹Aluna do Curso de Matemática – CPTL/UFMS, bolsista do Grupo PET Conexões de Saberes – Matemática/CPTL/UFMS;

²Professor do Curso de Matemática – CPTL/UFMS. E-mail: pamela_31_brandao@hotmail.com

RESUMO

Neste trabalho estudamos alguns conceitos de Funções Complexas, comparamos os resultados obtidos com o caso de funções reais e funções de várias variáveis. O principal resultado do nosso trabalho foi demonstrar quais condições são necessárias e suficientes para que uma função complexa seja diferenciável, tais condições são conhecidas como condições de Cauchy-Riemann. Para demonstrarmos esse teorema fizemos a apropriação dos conceitos de função (funções exponenciais e trigonométricas), limite e derivada no plano complexo, bem como exemplificações.

Palavras Chave: Funções Complexas, Exponencial, Cauchy-Riemann, Derivadas Parciais, Diferenciação.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda assuntos de funções de uma variável complexa, mais concretamente às funções exponenciais e trigonométricas, limite e diferenciação de funções complexas, no qual mostramos que para que uma função complexa f seja diferenciável é necessário que as partes real e imaginária de f satisfaçam um certo sistema de equações diferenciais parciais, conhecidas como *equações de Cauchy-Riemann*.

O objetivo deste trabalho é apresentar o estudo do conceito de função de uma variável complexa, dando ênfase especial ao conceito de limite e derivação. Discutimos alguns dos resultados mais importantes da teoria de funções complexas, em particular, demonstramos um resultado importante que nos dá condições necessárias para que uma função seja diferenciável, acrescentamos um teorema que com uma certa hipótese adicional sobre a função, a validade das equações de Cauchy-Riemann é uma condição suficiente para a diferenciabilidade. O trabalho é finalizado com um exemplo que envolve esses dois resultados.

METODOLOGIA

O trabalho realizado é resultado de um estudo detalhado, desenvolvido através de discussões do tema com o orientador e apresentações de seminários como parte das atividades do programa PET Conexões de Saberes Matemática – UFMS/CPTL e do Trabalho de Conclusão de

Curso. Para o desenvolvimento desse trabalho, fizemos o estudo detalhado dos conceitos, bem como de exemplos, relacionados com a teoria desenvolvida.

RESULTADOS

Sejam A e B conjuntos arbitrários. Uma aplicação f de A em B é uma regra de correspondência que associa a cada elemento a de A um único elemento $f(a)$ de B , chamado *valor de f em a* . Usaremos a notação

$$f: A \rightarrow B$$

$$a \in A \mapsto f(a) \in B$$

para indicar que f é uma tal função. O conjunto A é chamado o *domínio* de f e o conjunto B é chamado o *contradomínio* de f . O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem* de f . Quando $f(A) = B$, dizemos que f é *sobrejetiva*. Se $f(a_1) \neq f(a_2)$ sempre que $a_1 \neq a_2$, com $a_1, a_2 \in A$ dizemos que f é *injetiva*. E por fim, se f é *injetiva e sobrejetiva* dizemos que ela é *bijetiva*.

Podemos escrever uma função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ em termos de sua *parte real* e de sua *parte imaginária*, ou seja,

$$f = u + iv \text{ onde } u(z) = \operatorname{Re}[f(z)] \text{ e } v(z) = \operatorname{Im}[f(z)], \quad z \in A.$$

Além disso, u e v são funções reais em A . Se escrevermos $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, teremos que u e v são funções de duas variáveis reais: $u(z) = u(x, y)$ e $v(z) = v(x, y)$.

Dentre todas as funções complexas, estudaremos as funções exponenciais e as trigonométricas.

A função exponencial é a função $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Como $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)| = |e^x| = e^x$, para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, temos que $\exp z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso, é importante dizer que a função exponencial é uma função periódica de período $2\pi i$, ou seja, $\exp(z + 2\pi i) = \exp z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. De fato,

$$\exp(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z(1 + i0) = e^z.$$

Para $y \in \mathbb{R}$, temos que $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, adicionando os dois membros dessas equações obtemos $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$, e subtraindo os dois membros obtemos $\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$. Sendo assim, definimos a *função seno* e a *função cosseno* de uma variável complexa por

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ e } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Sejam $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ uma função e z_0 um ponto de A . Dizemos que a função f tem o número complexo w_0 como seu limite em z_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ sempre que } z \in A \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

- (i) Observe que se existe um número complexo w_0 que satisfaça a definição acima, então ele é único. Escrevemos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ou $f(z) \rightarrow w_0$ quando $z \rightarrow z_0$ para expressar que o limite de f no ponto z_0 existe e vale w_0 .

A seguir, algumas propriedades de limites de funções complexas, as demais são análogas ao caso das funções reais.

Suponhamos que a função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz $f(z) \rightarrow w_0$ quando $z \rightarrow z_0$, onde z_0 é um ponto de A . Então, quando $z \rightarrow z_0$, temos que:

$$(ii) \overline{f(z)} = \overline{w_0},$$

$$(iii) |f(z)| \rightarrow |w_0|.$$

Exemplo: $\lim_{z \rightarrow 4i} \frac{z^3 - 8iz^2 - 4z}{(z - 4i)^2} = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{z(z - 4i)^2}{(z - 4i)^2} = \lim_{z \rightarrow 4i} z = 4i$

Agora, definimos os conceitos de diferenciabilidade e derivada de funções complexas de uma variável complexa, apresentamos alguns exemplos e propriedades, dentre elas, a regra da cadeia.

A *derivada* de uma função f , complexa, no ponto z_0 , denotada por $f'(z_0)$, é definida por $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, desde que esse limite exista. Se este for o caso, f é dita diferenciável em z_0 . Se considerarmos $\Delta z = z - z_0$, temos $z = \Delta z + z_0$, sendo assim,

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

As propriedades de limites de funções complexas são demonstradas de modo análogo ao caso real.

A partir daqui deixaremos de ter a impressão que o "cálculo diferencial complexo" é completamente análogo a "cálculo diferencial real". As diferenças entre essas duas teorias são profundas, uma primeira diferença aparece numa proposição, que diz: para que uma função $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ seja diferenciável em um ponto z_0 é necessário que haja uma certa compatibilidade entre as derivadas parciais das partes real e imaginária de f nesse ponto, que é dada pelas equações de Cauchy-Riemann.

Para o estudo dessas condições dizemos que uma função f é *Holomorfa ou Analítica* num domínio D se f é definida e diferenciável em todos os pontos de D . A função f é dita analítica num ponto z_0 em D se f for analítica numa vizinhança de z_0 .

Teorema: Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função definida e contínua em alguma vizinhança do ponto $z = x + iy$ e diferenciável em z . Então, as derivadas parciais de primeira ordem de u e de v existem e satisfazem às equações

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x, y)$$

conhecidas como as condições de Cauchy-Riemann. Então, se f é analítica num domínio D , suas derivadas parciais existem e satisfazem as equações acima em todos os pontos do domínio D .

Dem: Sabendo da definição de limite que podemos usar qualquer direção para fazer z tender a z_0 vamos escolher dois caminhos, o primeiro, o paralelo ao eixo real, ou seja, com $\Delta y = 0$, e o segundo, paralelo ao eixo imaginário, de onde $\Delta x = 0$, conforme na figura abaixo.

Para função complexa $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ temos

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y} \right).$$

Como este limite deve existir e ser o mesmo por qualquer um dos caminhos, então, para $\Delta y = 0$, temos

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Esses quocientes são a definição de derivada parcial, logo

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0, y_0}.$$

Agora, para o segundo caminho, $\Delta x = 0$, temos de maneira análoga, que

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0) - v(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta y} - i \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Ou seja,

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=z_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)}.$$

Sendo assim,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{(x_0, y_0)} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0, y_0)},$$

ou seja, igualando as partes reais e as partes imaginárias, segue que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

■

Por exemplo, se considerarmos a função $f(z) = \bar{z}$, temos que

$$u(x, y) = x \text{ e } v(x, y) = -y \text{ quando } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Temos que $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} \neq -\frac{\partial v}{\partial x}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Logo, f não é diferenciável.

O fato das derivadas parciais de f satisfazerem as condições de Cauchy-Riemann é uma condição necessária para que f seja diferenciável num ponto z_0 , porém não é suficiente. O seguinte teorema nos dá condições que são suficientes para diferenciabilidade de f .

Teorema: Suponhamos que uma função $f = u + iv$ esta definida em um conjunto aberto A de $\mathbb{C}$ e que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem em todo ponto de A . Se cada uma dessas derivadas parciais é contínua em um ponto z_0 de A e se as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas por u e v em z_0 , então f é diferenciável em z_0 .

Exemplo: A função $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$ é diferenciável, pois temos $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$, onde $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y$, para todo $z \in \mathbb{C}$, como as derivadas parciais são contínuas temos que f é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$.

DISCUSSÃO

As condições de Cauchy-Riemann nos ajuda a entender a diferença entre o estudo de funções complexas e funções reais, principalmente quando estudamos a diferenciabilidade de funções complexas.

As técnicas utilizadas no trabalho permitem o desenvolvimento do estudo de integração complexa, pretendemos estudar as aplicações da integral de Cauchy, Séries de Taylor e Séries de Laurent, que constituem a continuidade natural da investigação do trabalho.

CONCLUSÕES

Neste trabalho abordamos alguns tópicos de funções de uma variável complexa com maior enfoque em diferenciação. No estudo de funções diferenciáveis vimos que uma função é analítica se satisfaz as condições de Cauchy-Riemann e suas derivadas parciais são contínuas, este fato interessante, nos deixa claro a diferença entre funções complexas e reais.

Finalizamos o trabalho enunciando e demonstrando o teorema das Condições de Cauchy-Riemann, cujo resultado fornece condições necessárias para que uma função de uma variável complexa seja diferenciável, e em seguida enunciamos um teorema que com uma certa hipótese adicional sobre a função, a validade das equações de Cauchy-Riemann é uma condição suficiente para a diferenciabilidade.

O estudo da diferenciabilidade de funções de uma variável complexa permitiu desenvolver um trabalho com conceitos matemáticos que não faz parte da grade curricular do curso de Matemática-Licenciatura da UFMS/CPTL, enriquecendo meus conhecimentos sobre o assunto abordado.

REFERÊNCIAS

1. FERNANDES, C.S.; BERNARDES Jr, N.C.; Introdução às Funções de uma Variável Complexa. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.
2. LINS NETO, A.; Funções de uma Variável Complexa. 2.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
3. OLIVEIRA, E.C.; RODRIGUES Jr, E.C.; Funções Analíticas com Aplicações. 1.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.