Научная статья

УДК 517.958

ББК 22.161.6

У 95

doi: 10.53598/2410-3225-2021-2-281-41-46

Квадратичная система, имеющая два негрубых фокуса, ациклична

(Рецензирована)

Адам Дамирович Ушхо

Адыгейский государственный университет, Майкоп, Россия, uschho76@mail.ru

Аннотация. Доказывается, что система дифференциальных уравнений, правые части которой представляют собой полиномы второй степени, не имеет предельных циклов, если в ограниченной части фазовой плоскости она имеет только два состояния равновесия и при этом они являются состояниями равновесия второй группы.

Ключевые слова: квадратичная система, фокусы, ацикличность, предельный цикл, фазовая плоскость, изоклины

Original Research Paper

On acyclicity of quadratic system with two non-rough foci

Adam D. Ushkho

Adyghe State University, Maikop, Russia, uschho76@mail.ru

Abstract. It is proved that a system of differential equations, the right-hand sides of which are second-order polynomials, has no limit cycles if it has only two equilibrium states in the bounded part of the phase plane, and they are the equilibrium states of the second group.

Keywords: quadratic system, focus, acyclicity, limit cycle, phase plane, isoclines

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij} x^i y^j \equiv P_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij} x^i y^j \equiv Q_2(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{ij}, b_{ij} \in R$, $(P_2, Q_2) = 1$.

Известно [1, 2], что прямая, проходящая через два состояния равновесия системы (1), является ее изоклиной.

В работе [2] доказано утверждение: если кривая $L: F(x, y) = 0$ на фазовой плоскости суть изоклина автономной дифференциальной системы второго порядка, то в результате применения к этой системе линейного невырожденного преобразования L переходит в изоклину $\bar{L}$. Там же доказано, что любую изоклину динамической системы второго порядка можно перевести, в частности, в одну из главных изоклин системы. Указанные сведения об изоклинах могут быть эффективно использованы для доказательства важных утверждений, касающихся свойств системы (1) (см., например, [3]).

В работе [4] доказано, что дифференциальное уравнение траектории системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + xy, \\ \frac{dy}{dt} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 \end{cases} \quad (2)$$

не имеет предельных циклов, если оно имеет два негрубых фокуса, или негрубый фокус и седло с равными по модулю характеристическими числами, или два седла, каждое из которых имеет характеристические числа, равные по модулю. Доказательство основано на применении нелинейных преобразований переменных x и y .

В данной работе доказывается, что система (1) ациклична, если в ограниченной части фазовой плоскости она имеет только два состояния равновесия, и при этом они являются состояниями равновесия второй группы.

Пусть система (1) имеет только два состояния равновесия (x_i, y_i) , $i = 1, 2$, и они удовлетворяют условию

$$P'_{2x}(x_i, y_i) + Q'_{2y}(x_i, y_i) = 0, \quad \begin{vmatrix} P'_{2x}(x_i, y_i) & P'_{2y}(x_i, y_i) \\ Q'_{2x}(x_i, y_i) & Q'_{2y}(x_i, y_i) \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Согласно [5] состояния равновесия (x_i, y_i) , $(i = 1, 2)$, по их типу принадлежат множеству $\{Ц, НФ\}$, где $Ц$ – центр, $НФ$ – негрубый фокус. Такие состояния равновесия называются состояниями равновесия второй группы [5].

По условию через два состояния равновесия (x_i, y_i) , $(i = 1, 2)$, проходит прямая изоклина

$$l: P'_{2y}(x, y) + Q'_{2x}(x, y) = 0. \quad (4)$$

Пусть на прямой l система (1) индуцирует направление m (то есть $\left(\frac{Q_2(x, y)}{P_2(x, y)} \right)_{(x, y \in l)} \equiv m$).

Тогда, следуя [2], с помощью преобразования

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \bar{y}, \\ y = m\bar{y} \end{cases} \quad (5)$$

приведем систему (1) к системе (обозначения фазовых переменных x и y оставляем неизменными):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) \equiv \bar{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = \bar{Q}_2(x, y). \end{cases} \quad (6)$$

Для определенности полагаем, что в результате преобразования (5) прямая l перешла в изоклину бесконечности $\bar{l}: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ системы (6).

Таким образом,

$$\bar{P}'_{2x}(x, y) + \bar{Q}'_{2x}(x, y) \equiv \mu(A_2x + B_2y + C_2), \quad \mu \neq 0.$$

Так как на $\bar{l}$ система (6) имеет два состояния равновесия, индекс Пуанкаре каждого из которых равен 1 [6], то по теореме 36 из [7] прямую $\bar{l}$ пересекает изоклина

бесконечности $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, то есть выполняется неравенство:

$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0. \quad (7)$$

Поскольку изоклины бесконечности системы (6) пересекаются, и эта система имеет только два состояния равновесия, то изоклина нуля $\bar{Q}_2(x, y) = 0$, если она не вырожденная кривая второго порядка, может быть только гиперболой. Рассмотрим случай, когда прямая изоклина бесконечности, пересекающая прямую $\bar{l}$, является асимптотой гиперболы $\bar{Q}_2(x, y) = 0$.

Можно показать, что рассматриваемые состояния равновесия системы (6) принадлежат разным ветвям гиперболы, а прямая $\bar{l} : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ есть одна из асимптот гиперболы. В силу изложенного существует преобразование [2], приводящее систему (6) к системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) \equiv F_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = (A_1x + B_1y + C_3)(A_1x + B_1y + C_4) \equiv G_2(x, y). \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что $A_1 \cdot B_1 \cdot B_2 \neq 0$, так как в противном случае согласно работе [8] система (8) не имеет предельных циклов.

Совершим в системе (8) преобразование

$$\begin{cases} \bar{x} = A_2x + B_2y + C_2, \\ \bar{y} = A_1x + B_1y + C_1, \end{cases}$$

которое в соответствии с неравенством (7) не вырождено.

При этом система (8) трансформируется в систему

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A_2\bar{x}\bar{y} + B_2(\bar{y} + C_3 - C_1)(\bar{y} + C_4 - C_1) \equiv \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = A_1\bar{x}\bar{y} + B_1(\bar{y} + C_3 - C_1)(\bar{y} + C_4 - C_1) \equiv \bar{G}_2(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \quad (9)$$

Состояниями равновесия системы (9) являются точки $M(0, C_1 - C_3)$, $N(0, C_1 - C_4)$. Поскольку M и N являются состояниями равновесия второй группы, то они удовлетворяют уравнению

$$\bar{F}'_{2x}(\bar{x}, \bar{y}) + \bar{G}'_{2y}(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow A_1\bar{x} + (A_2 + 2B_1)\bar{y} + B_1(C_3 + C_4 - 2C_1) = 0. \quad (10)$$

Подставляя координаты точек M и N в уравнение (10), получаем систему

$$\begin{cases} (A_2 + 2B_1)(C_1 - C_3) + B_1(C_3 + C_4 - 2C_1) = 0, \\ (A_2 + 2B_1)(C_1 - C_4) + B_1(C_3 + C_4 - 2C_1) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из (11) следует условие

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{C_3 + C_4}{2}, \\ B_1 &= -\frac{A_2}{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (12) перепишем систему (9) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A_2 \bar{x} \bar{y} + B_2 \left(\bar{y} + \frac{C_3 - C_4}{2} \right) \left(\bar{y} - \frac{C_3 - C_4}{2} \right), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = A_1 \bar{x} \bar{y} - \frac{A_2}{2} \left(\bar{y} + \frac{C_3 - C_4}{2} \right) \left(\bar{y} - \frac{C_3 - C_4}{2} \right). \end{cases} \quad (13)$$

Для удобства систему (13) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} = A_2 \bar{x} \bar{y} + B_2 (\bar{y}^2 - m^2) \equiv R_2(\bar{x}, \bar{y}), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} = A_1 \bar{x} \bar{y} - \frac{A_2}{2} (\bar{y}^2 - m^2) \equiv S_2(\bar{x}, \bar{y}), \end{cases} \quad (14)$$

где $m = \frac{C_3 - C_4}{2} \neq 0$.

Переносим начало координат в точку M в системе (14), можно убедиться в том, что ни одно из условий центра (теорема 33 [5]) не выполняется. С учетом симметрии векторного поля системы (14) относительно начала координат это означает, что точки M и N – негрубые фокусы. Поэтому естественным образом возникает вопрос о существовании или отсутствии предельных циклов.

Из (14) следует, что

$$R'_{2\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) + S'_{2\bar{y}}(\bar{x}, \bar{y}) = A_1 \bar{x}. \quad (15)$$

С учетом (15) рассмотрим функциональное уравнение [9]:

$$\alpha S_2(\bar{x}, \bar{y}) - \beta R_2(\bar{x}, \bar{y}) = A_1 \bar{x}.$$

Решением этого уравнения является пара функций

$$\alpha = \frac{2A_1 B_2}{\omega \cdot \bar{y}}, \quad \beta = -\frac{A_1 A_2}{\omega \bar{y}}, \quad \text{где } \omega = A_2^2 + 2A_1 B_2. \quad (16)$$

В силу неравенства (7) $\omega \neq 0$.

Из (16) следует равенство

$$\alpha'_x + \beta'_y = -\frac{A_1 A_2}{\omega \bar{y}^2}. \quad (17)$$

Так как $\bar{y} = 0$ – прямая без контакта системы (14), то выражение (17) знакопостоянно в строгом смысле в областях предполагаемого расположения предельных циклов и выполняются условия теоремы 4.4 [9]. Следовательно, система либо не имеет предельных циклов, либо, если они существуют, то простые и одной и той же устойчивости.

В силу характера симметрии векторного поля системы (14) относительно начала координат предельные циклы, окружающие M и N , если они существуют, имеют противоположную устойчивость, что противоречит упомянутой теореме 4.4 [8].

Далее рассмотрим случай, когда изоклина бесконечности $\bar{l}$ не является асимптотой гиперболы $\bar{Q}_2(x, y) = 0$. Тогда, не уменьшая общности, рассмотрим вместо системы (6) систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) \equiv \bar{P}_2(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = 1 + xy = \bar{Q}_2(x, y). \end{cases} \quad (18)$$

Из (18) видно, что $A_2B_2 > 0$.

Покажем, что состояния равновесия системы (18), расположенные на прямой $\bar{l} : A_2x + B_2y + C_2 = 0$, являются седлами.

$$W_1 \left(\frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2A_2}, \frac{-C_2 - \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2B_2} \right), \quad -$$

$$W_2 \left(\frac{-C_2 - \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2A_2}, \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2B_2} \right)$$

состояния равновесия системы (18).

Перенесем начало координат системы (18) в точку W_i ($i=1,2$) по формулам:

$$\begin{cases} x \rightarrow x + x_i, \\ y \rightarrow y + y_i, \end{cases} \quad (i=1,2).$$

$$\text{Здесь } x_{1,2} = \frac{-C_2 \pm \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2A_2},$$

$$y_{1,2} = \frac{\mp C_2 \mp \sqrt{C_2^2 + 4A_2B_2}}{2B_2}.$$

Система (18) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x_i x - \frac{B_2 x_i}{A_2} y + (A_1 x + B_1 y)(A_2 x + B_2 y), \\ \frac{dy}{dt} = y_i x + x_i y + xy, \end{cases} \quad (i=1,2). \quad (19)$$

Начало координат системы (19) есть состояние равновесия типа «седло» [6], то есть не может быть окружено предельным циклом.

Таким образом, доказана

Теорема. Система (1) ациклична, если она имеет в ограниченной части фазовой плоскости только два состояния равновесия, и они являются негрубыми фокусами.

В заключение отметим, что приведенное доказательство теоремы является новым доказательством ранее доказанной в работе [4] теоремы в части, касающейся утверждения о двух негрубых фокусах.

Список литературы:

1. Тун-Цзинь-чжу. Расположение предельных циклов системы $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$ // Периодический сборник переводов иностранных статей: Математика. 1962. Т. 6, № 6. С. 150–168.
2. Ушко Д.С. Прямые изоклины и канонические формы полиномиальных дифференциальных систем на плоскости. Майкоп, 2007. 93 с.

3. Тлячев В.Б., Ушко А.Д., Ушко Д.С. К вопросу о прямых изоклинах дифференциальных систем на плоскости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2010. № 1. С. 156–162.

4. Черкас Л.А., Жилевич Л.И. Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8, № 12. С. 2271–2273.

5. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск: Изд-во БГУ, 1982. 208 с.

6. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

7. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

8. Черкас Л.А. Об отсутствии предельных циклов у одного дифференциального уравнения, имеющего негрубый фокус // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 5. С. 779–783.

9. Отроков Н.Ф. Аналитические интегралы и предельные циклы. Горький: Волго-Вятское книжное изд-во, 1972. 216 с.

References:

1. Tung Chin-Chu. Positions of limit-cycles of the system $dx/dt = X_2(x, y)$, $dy/dt = Y_2(x, y)$ // The periodic collection of transfers of foreign articles: Mathematics. 1962. Vol. 6, No. 2. P. 150–168; Sci. Sinica, 1959. Vol. 8, No. 2. P. 151–171.

2. Ushkho D.S. Straight isoclines and canonical forms of polynomial differential systems on the plane. Maikop, 2007. 93 p.

3. Tlyachev V.B., Ushkho A.D., Ushkho D.S. On the question of straight isoclines of polynomial differential systems on the plane // The Bulletin of Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2010. No. 1. P. 156–162.

4. Cherkas L.A., Zhilevich L.I. The absence of limit cycles of a certain differential equation // Differential Equations. 1972. Vol. 8, No. 12. P. 2271–2273.

5. Amelkin V.V., Lukashevich N.A., Sadovsky A.P. Nonlinear oscillations in second-order systems. Minsk: BSU Publishing House, 1982. 208 p.

6. Qualitative theory of second-order dynamical systems / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon and A.G. Maier. New York: John Wiley and Sons, 1973. 568 p.

7. Bifurcation theory of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

8. Cherkas L.A. On the lack of limit cycles of one equation having non-rough focus // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 5. P. 779–783.

9. Otrokov N.F. Analytical integrals and limit cycles. Gorky: Volgo-Vyatka Book Publishing House, 1972. 216 p.

Статья поступила в редакцию 14.04.2021; одобрена после рецензирования 16.05.2021; принята к публикации 18.05.2021.

The article was submitted 14.04.2021; approved after reviewing 16.05.2021; accepted for publication 18.05.2021.

© А.Д. Ушко, 2021