Научная статья

УДК 517.925

ББК 22.161.6

P 65

doi: 10.53598/2410-3225-2021-2-281-27-40

**Векторные поля на плоскости с центральной симметрией:
грубость и первая степень негрубости**
(Рецензирована)

Владимир Шлеймович Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия,
vroitenberg@mail.ru

Аннотация. Рассматривается пространство гладких векторных полей, заданных в замкнутой области D на плоскости, инвариантных относительно центральной симметрии и трансверсальных границе D . Описано множество векторных полей, грубых относительно этого пространства; показано, что оно открыто и всюду плотно. Во множестве всех негрубых векторных полей выделено открытое всюду плотное подмножество, состоящее из векторных полей первой степени негрубости.

Ключевые слова: векторное поле на плоскости, центральная симметрия, инвариантность, грубость, первая степень негрубости, бифуркация

Original Research Paper

**Planar vector fields with central symmetry: roughness
and first degree of non-roughness**

Vladimir Sh. Roytenberg

Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia, vroitenberg@mail.ru

Abstract. We consider the space of smooth vector fields defined in a closed domain D on the plane, invariant under the central symmetry and transversal to the boundary D . The set of vector fields that are rough with respect to this space is described; it is shown that it is open and everywhere dense. In the set of all non-rough vector fields, an open everywhere dense subset consisting of vector fields of the first degree of non-roughness is distinguished.

Keywords: planar vector field, central symmetry, invariance, roughness, first degree of non-roughness, bifurcation

Введение

Изучение грубости и бифуркаций в пространствах векторных полей с симметрией представляет несомненный интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Локальным бифуркациям векторных полей на плоскости и в пространствах большей размерности, инвариантных относительно разных групп преобразований, посвящено довольно много работ, например [1–5]. Было также получено описание грубых векторных полей в пространстве плоских C^∞ -векторных полей, инвариантных относительно групп вращений [6, 7], а также грубых векторных полей и векторных полей первой степени негрубости в пространстве однородных полиномиальных векторных полей фиксированной степени n (они инвариантны относительно группы растяжений плоскости) [8, 9].

Здесь мы исследуем грубость и первую степень негрубости относительно пространства плоских C^r -векторных полей ($r \geq 3$) с центральной симметрией.

1. Основные результаты

Пусть

D – замкнутая область на плоскости $\mathbf{R}^2$ с гладкой границей ∂D , симметричная относительно преобразования центральной симметрии $S: z = (z_1, z_2) \mapsto -z = (-z_1, -z_2)$;

$X^r(D)$ – банахово пространство C^r -векторных полей на D с C^r -нормой $\|\cdot\|_r$, $r \geq 1$ [10];

$X^r(D, S)$ – его замкнутое подпространство, состоящее из векторных полей X , инвариантных относительно преобразования симметрии $S: \forall x \in D \ X(-z) = -X(z)$;

$X_+^r(D)$ ($X_+^r(D, S)$) – открытое подмножество в $X^r(D)$ (в $X^r(D, S)$), состоящее из векторных полей, трансверсальных ∂D .

Векторные поля X_0 и X из $X^r(D)$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: D \rightarrow D$, переводящий траектории поля X в траектории поля X_0 с сохранением ориентации на них.

Пусть $\Lambda \subset X^r(D)$. Векторное поле $X_0 \in \Lambda$ назовем *грубым относительно Λ* , если существует такая его окрестность $U(X_0)$ в $X^r(D)$, что векторное поле X_0 и любое векторное поле $X \in U(X_0) \cap \Lambda$ топологически эквивалентны. Множество таких векторных полей обозначим $\Sigma^0 \Lambda$. Векторное поле $X_0 \in \Lambda \setminus \Sigma^0 \Lambda$ назовем *векторным полем первой степени негрубости* относительно Λ , если оно грубое относительно $\Lambda \setminus \Sigma^0 \Lambda$. Для поля $X_0 \in X_+^r(D, S)$, грубого относительно $X_+^r(D, S)$, и поля $X_0 \in X_+^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X_+^r(D, S)$, первой степени негрубости относительно $X_+^r(D, S)$, слова «относительно $X_+^r(D, S)$ » будем далее опускать.

Как известно [11], множество $\Sigma^0 X_+^r(D)$ векторных полей, грубых относительно $X_+^r(D)$, состоит из векторных полей, для которых все особые точки и замкнутые траектории грубые (= гиперболические) и не существует траекторий, идущих из седла в седло.

Теорема 1. 1. $\Sigma^0 X_+^r(D, S) = \Sigma^0 X_+^r(D) \cap X_+^r(D, S)$.

2. Множество $\Sigma^0 X_+^r(D, S)$ – открыто и всюду плотно в $X_+^r(D, S)$.

Доказательство теоремы 1 приведено в разделе 2.

Будем теперь считать, что $r \geq 3$. Пусть z^0 – особая точка поля $X_0 \in X^r(D)$, для которой линейный оператор $dX_0(z^0)$ имеет собственные значения $\lambda_0 \neq 0$ и 0 . Выберем координаты x, y в окрестности точки z^0 , в которых поле имеет вид

$$X_0(x, y) = r(x, y)\partial/\partial x + (\lambda_0 y + s(x, y))\partial/\partial y, \quad (1)$$

где r и s – C^r -функции, обращающиеся при $x = y = 0$ в нуль вместе с производными первого порядка.

Особая точка z^0 называется *простым седло-узлом*, если $r_{xx}''(0, 0) \neq 0$. Она имеет два гиперболических сектора и один параболический, устойчивый при $\lambda_0 < 0$ и неустойчивый при $\lambda_0 > 0$ [12, п. 21.1]. Граничные траектории гиперболических секторов называются *сепаратрисами* седло-узла z^0 .

Пусть теперь $X_0 \in X^r(D, S)$, а особая точка z^0 совпадает с началом координат $O = (0, 0)$. Мы можем считать, что координаты x, y выбраны так, что в (1)

$r(-x, -y) \equiv -r(x, y)$, $s(-x, -y) \equiv -s(x, y)$. Поэтому $r(x, y)$ и $s(x, y)$ обращаются при $x = y = 0$ в нуль вместе с производными первого и второго порядка. Если $\lambda_0 r'''_{xxx}(0, 0) < 0$, то особая точка O – топологическое седло. Будем называть ее *простым негрубым седлом*. Граничные траектории гиперболических секторов точки O называются ее *сепаратрисами*. Если $\lambda_0 < 0$, $r'''_{xxx}(0, 0) < 0$ (соответственно, $\lambda_0 > 0$, $r'''_{xxx}(0, 0) > 0$), то особая точка O – устойчивый (соответственно, неустойчивый) топологический узел [12, п. 21.1]. Будем называть ее *простым негрубым узлом*. Существуют ровно две траектории, входящие в точку O при $t \rightarrow +\infty$ (соответственно, при $t \rightarrow -\infty$) по направлению $x = 0$. Назовем их входящими (соответственно, выходящими) *сепаратрисами* особой точки O .

Определим следующие подмножества B_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) в $X^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X^r(D, S)$:

B_1 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением точки O , являющейся простым негрубым седлом, и не существует выходящей сепаратрисы какого-нибудь седла, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этого или другого седла;

B_2 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением точки O , являющейся простым негрубым узлом, и не существует выходящей сепаратрисы какой-нибудь особой точки, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этой или другой особой точки;

B_3 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением точки O , являющейся сложным фокусом кратности 1 или пары z_+^0 и $z_-^0 = S(z_+^0)$ сложных фокусов кратности 1, и не существует выходящей сепаратрисы какой-нибудь особой точки, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этой или другой особой точки;

B_4 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением двух симметричных простых седло-узлов z_+^0 и $z_-^0 = S(z_+^0)$, и не существует выходящей сепаратрисы особой точки, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этой или другой особой точки;

B_5 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением двойного цикла $\Gamma^0 = S\Gamma^0$; не существует выходящей сепаратрисы седла, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этого или другого седла; не существует сепаратрис двух седел, предельных к двойному циклу при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$;

B_6 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые, за исключением двух двойных циклов Γ_+^0 и $\Gamma_-^0 = S\Gamma_+^0$; не существует выходящей сепаратрисы седла, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этого или другого седла; не существует сепаратрис двух седел, предельных к Γ_+^0 (Γ_-^0) при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$;

B_7 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые; не существует выходящей (входящей) сепаратрисы седла, являющейся одновременно и входящей (выходящей) сепаратрисой этого или другого седла, за исключением двух сепаратрис седла O , являющихся и входящими (выходящими) сепаратрисами двух седел z_+^0 и $z_-^0 = S(z_+^0)$. Если при этом $z_-^0 = z_+^0 = O$, то седловая величина $\sigma_0 = \text{tr} dX_0(O) \neq 0$ и не существует сепаратрис, предельных к петлям сепаратрис

седла O и к контуру, образованному этими петлями;

B_8 состоит из векторных полей, у которых все замкнутые траектории и особые точки грубые; не существует выходящей (входящей) сепаратрисы седла, являющейся и входящей (выходящей) сепаратрисой этого или другого седла, за исключением выходящих сепаратрис L_1 и SL_1 седел $z_1^0 \neq O$ и Sz_1^0 , являющихся и входящими сепаратрисами соответственно седел $z_2^0 \neq O$ и Sz_2^0 . При этом, если $z_1^0 = z_2^0$, то седловая величина $\text{tr} dX_0(z_1^0) \neq 0$ и не существует сепаратрис, предельных к петлям сепаратрис седел z_1^0 и Sz_1^0 , если $Sz_1^0 = z_2^0$, то седловая величина $\text{tr} dX_0(z_1^0) \neq 0$ и не существует сепаратрис, предельных к контуру $\bar{L}_1 \cup \overline{SL_1}$.

Пусть $B := \bigcup_{i=1}^8 B_i$.

Теорема 2. 1. Векторные поля, принадлежащие множеству B , имеют первую степень негрубости.

2. Множество B открыто и всюду плотно в $X_+^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X_+^r(D, S)$.

3. Множество B – вложенное C^{r-1} -подмногообразие $X_+^r(D, S)$ коразмерности один.

Доказательство теоремы 2 дано в разделах 3–4.

2. Грубость векторных полей

Докажем плотность множества $\Sigma^0 X_+^r(D) \cap X_+^r(D, S)$ в $X_+^r(D, S)$. Пусть $V(X_0)$ – произвольная окрестность поля $X_0 \in X_+^r(D, S)$ в $X_+^r(D, S)$. Из доказательства теоремы Вейерштрасса о приближении [13, с. 37] следует, что в $V(X_0)$ существует полиномиальное векторное поле $Y_0 \in X_+^r(D, S)$. Изменив только его линейную часть в точке O , можно получить векторное поле $Y_1 \in V(X_0)$, для которого особая точка O грубая. Покажем, что в $V(X_0)$ имеется полиномиальное векторное поле Z , все особые точки которого грубые.

Пусть $Y_1 = Y_{11}(z_1, z_2)\partial/\partial z_1 + Y_{12}(z_1, z_2)\partial/\partial z_2$, а степень полиномов $Y_{11}(z_1, z_2)$ и $Y_{12}(z_1, z_2)$ не превосходит числа $n \geq 3$. Пусть a – негрубая особая точка. Выберем базис в $\mathbf{R}^2$ так, чтобы в координатах z_1, z_2 в этом базисе точка a имела координаты (a_1, a_2) , где $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$. Тогда симметричная особая точка $S(a)$ имеет координаты $(-a_1, -a_2)$. Векторное поле

$H(z_1, z_2) = z_1(c_{11}(z_1^2 - a_1^2) + c_{12}(z_2^2 - a_2^2))\partial/\partial z_1 + z_2(c_{21}(z_1^2 - a_1^2) + c_{22}(z_2^2 - a_2^2))\partial/\partial z_2 \in X^r(D, S)$ и имеет особыми точками a и $S(a)$. Матрица линейной части поля в точке a имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2a_1^2 c_{11} & 2a_1 a_2 c_{12} \\ 2a_1 a_2 c_{21} & 2a_2^2 c_{22} \end{pmatrix}.$$

За счет выбора чисел c_{ij} она может быть сделана произвольной. Поэтому числа c_{ij} можно подобрать так, чтобы при достаточно малых $\mu > 0$ векторное поле $Y_1 + \mu H$ принадлежало окрестности $V(X_0)$ и имело a и $S(a)$ своими грубыми особыми точками. При достаточно малом μ поле $Y_2 = Y_1 + \mu H$ имеет, по меньшей мере, на две грубые особые точки (a и $S(a)$) больше, чем поле Y_1 . Повторяя эту процедуру, получим по индукции векторное поле $Y_N = Y_{1N}\partial/\partial z_1 + Y_{2N}\partial/\partial z_2 \in V(X_0)$,

где $Y_{1N}(z_1, z_2)$ и $Y_{1N}(z_1, z_2)$ полиномы степени $\leq n$, для которого либо а) все особые точки грубые, либо б) имеется $> 4n^2$ грубых особых точек. Покажем, что случай б) невозможен. Если полиномы $Y_{kN}(z_1, z_2)$ ($k=1, 2$) взаимно просты, то по теореме Безу [17, п. 3.1] поле Y_N имеет не более n^2 особых точек в противоречие с б). Если эти полиномы не взаимно просты, то их можно разложить на неприводимые множители: $Y_{kN}(z_1, z_2) = L_1^{n_{k1}}(z_1, z_2) L_2^{n_{k2}}(z_1, z_2) \cdots L_m^{n_{km}}(z_1, z_2)$, где $1 \leq m \leq 2n$, $n_{kj} \geq 0$, $n_{1j} + n_{2j} \geq 1$, неприводимый множитель $L_j(z_1, z_2)$ имеет степень $q_j \geq 1$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $n_{k1}q_1 + \dots + n_{km}q_m \leq n$. Особые точки, в которых $L_j^{n_{1j}}(z_1, z_2) = L_j^{n_{2j}}(z_1, z_2) = 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, m\}$, являются негрубыми. Поэтому любая грубая особая точка является решением одной из систем уравнений $L_i(z_1, z_2) = L_j(z_1, z_2) = 0$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$. Используя теорему Безу, получаем, что общее число решений этих систем $\leq \sum_{i,j=1}^m q_i q_j \leq \sum_{i=1}^m q_i \sum_{j=1}^m q_j \leq 4n^2$. Поэтому число грубых особых точек $\leq 4n^2$, что противоречит б).

Таким образом, в $V(X_0)$ имеется полиномиальное векторное поле $Z = Y_N$, все особые точки которого грубые. Рассмотрим векторное поле Z_μ , полученное поворотом поля Z на угол $\arctg \mu$. Как и в [14], получаем, что при некотором $\mu > 0$ поле $Z_\mu \in V(X_0) \cap \Sigma^0 X_+^r(D)$. Тем самым доказана плотность $\Sigma^0 X_+^r(D) \cap X_+^r(D, S)$ в $X_+^r(D, S)$. Открытость $\Sigma^0 X_+^r(D) \cap X_+^r(D, S)$ в $X_+^r(D, S)$ следует из открытости $\Sigma^0 X_+^r(D)$ в $X_+^r(D)$. Равенство $\Sigma^0 X_+^r(D, S) = \Sigma^0 X_+^r(D) \cap X_+^r(D, S)$ доказывается аналогично [6].

Замечание. В работе [6] в доказательстве теоремы при приближении векторного поля X_S^* полиномиальным полем, имеющим только грубые особые точки, пропущено рассмотрение ситуации, когда X_S^* имеет бесконечное число особых точек. В этом случае следует, как и выше, построить по индукции последовательность векторных полей Y_N , где $Y_1 = X_S^*$, $Y_N = Y_{N-1} + \mu_N H_N$, а H_N – полиномиальное векторное поле, со следующими свойствами: Если O_p ($p=0, 1, \dots, q-1$, $O_{(p+1) \bmod q} = R_{2\pi p/q}(O_p)$) – негрубые особые точки поля Y_{N-1} , то они и грубые особые точки поля H_N , причем $\text{tr } dH(O_p) \neq 0$. Существование такого поля H_N при любом $q \geq 2$ следует из [1, с. 267–280].

3. Плотность множества В во множестве негрубых векторных полей

Пусть $X_0 \in X_+^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X_+^r(D, S)$, но $X_0 \notin B$. Зададим окрестность $V(X_0)$ поля X_0 в $X_+^r(D, S)$ и найдем в ней векторное поле из B . Возможен один из следующих случаев:

- 1) X_0 имеет двойной цикл;
- 2) X_0 имеет негрубую замкнутую траекторию, не являющуюся двойным циклом;
- 3) X_0 имеет сложный фокус кратности один;
- 4) X_0 имеет негрубую особую точку с чисто мнимыми собственными значениями, не являющуюся сложным фокусом кратности один;
- 5) X_0 имеет негрубую особую точку O , для которой $\det dX_0(O) = 0$;

6) X_0 имеет негрубую особую точку $z_+^0 \neq O$, для которой $\det dX_0(z^0) = 0$;

7) X_0 имеет только грубые особые точки и замкнутые траектории.

В случае 1) либо а) двойной цикл Γ_0 симметричен: $S\Gamma_0 = \Gamma_0$, либо б) имеется два двойных цикла Γ_+ и $\Gamma_- = S\Gamma_+$.

В варианте 1а) существует окрестность $U(\Gamma_0)$ цикла, ограниченная двумя гладкими простыми замкнутыми кривыми: $\gamma_+ = S\gamma_+$ и $\gamma_- = S\gamma_-$, в точках которых поле X_0 направлено соответственно в $U(\Gamma_0)$ и из $U(\Gamma_0)$, причем все траектории, начинающиеся в кольце между Γ_0 и γ_+ (Γ_0 и γ_-), ω -предельны (α -предельны) к Γ_0 . Пусть Γ_0 задается уравнениями $z_k = \zeta_k(t)$, $k=1,2$, где $\zeta_k(t)$ – T -периодическая C^{r+1} -функция. Следуя [11, п. 26.1], введем в некоторой окрестности $U_\delta(\Gamma_0)$ цикла Γ_0 , содержащейся в $U(\Gamma_0)$, цилиндрические координаты $(n, s \bmod T)$ формулами $z_1 = \zeta_1(s) + n \cdot \zeta_2'(s)$, $z_2 = \zeta_2(s) - n \cdot \zeta_1'(s)$, $|n| < \delta$, $s \in \mathbf{R}$, и определим в ней C^r -функцию $F(z)$, поставив в соответствие точке $z = (z_1, z_2)$ ее координату n . Тогда $F(z)$ инвариантна при преобразовании S , то есть $F(S(z)) = F(z)$. В кольце, задаваемом в координатах $(n, s \bmod T)$ неравенством $0 < n < \delta/3$ ($-\delta/3 < n < 0$), построим замкнутую трансверсаль γ'_+ (γ'_-) к полю X_0 . По теореме 1 для любого $\varepsilon > 0$ существует векторное поле $X_\varepsilon \in \Sigma^0 X_+^r(D, S)$, $\|X_\varepsilon - X_0\|_r < \varepsilon$. Пусть $\chi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ – такая C^∞ -функция, что $\chi(n) = 0$ при $|n| \leq \delta/3$ и $\chi(n) = 1$ при $|n| \geq 2\delta/3$. Рассмотрим векторное поле

$$Y_\varepsilon(z) = X_0(z) + \chi(F(z))(X_\varepsilon(z) - X_0(z)) \quad \text{при } z \in U_\delta(\Gamma_0) \quad \text{и} \\ Y_\varepsilon(z) = X_\varepsilon(z) \quad \text{при } z \in D \setminus U_\delta(\Gamma_0). \quad (2)$$

Поле $Y_\varepsilon \in X^r(D, S)$. Если ε достаточно мало, то $Y_\varepsilon \in V(X_0)$. Так как положительные (отрицательные) полутраектории поля X_0 , начинающиеся в точках γ_+ (γ_-), трансверсальны γ_+ (γ_-) и трансверсально пересекают γ'_+ (γ'_-), то такое же утверждение верно и для всех векторных полей из некоторой окрестности $V_*(X_0)$ поля X_0 в $X_+^r(D, S)$. Если ε достаточно мало, то $Y_\varepsilon \in V(X_0) \cap V_*(X_0)$. Но тогда векторное поле Y_ε имеет все свойства векторного поля из B_5 , возможно за исключением отсутствия сепаратрис двух седел, предельных к Γ_0 при $t \rightarrow +\infty$ и при $t \rightarrow -\infty$. Если таковые отсутствуют, то $Y_\varepsilon \in B_5$, что требовалось доказать. Пусть поле Y_ε имеет выходящую сепаратрису, ω -предельную к Γ_0 , и входящую сепаратрису, α -предельную к Γ_0 . Пусть Z_μ – векторное поле, полученное поворотом поля Y_ε на угол $\arctg \mu$. Согласно [11, п. 31.7] существует μ , при котором поле $Q_0 := Z_\mu \in V(X_0)$ имеет только грубые особые точки и замкнутые траектории, $2m \geq 2$ сепаратрис L_k , $k=1, \dots, 2m$ ($L_{i+m} = SL_i$ при $i=1, \dots, m$), соединяющие седла, лежащие в разных компонентах $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma_0$, все остальные выходящие (входящие) сепаратрисы седел ω -предельны (α -предельны) к узлам, фокусам или циклам. Если $m=1$, то $Q_0 \in B_7$ или $Q_0 \in B_8$. Если $m \geq 2$ на сепаратрисах L_k , $k=2, \dots, m$, отметим по точке a_k . Рассмотрим векторное поле Q_v , полученное поворотом поля Q_0 на угол $\arctg v g(z)$, где $g: D \rightarrow [0, 1]$ та-

кая C^∞ -функция, что $g(-z) \equiv g(z)$, $g(a_k) = 1$, $k = 2, \dots, m$, и $g(z) = 0$ в точках сепаратрис L_1 и L_{m+1} . При достаточно малом $\nu > 0$ поле $Q_\nu \in V(X_0)$, имеет сепаратрисы L_1 и L_{m+1} , идущие из седла в седло, а все остальные сепаратрисы, либо ω -предельны либо α -предельны к узлам, фокусам или циклам. Тем самым, Q_ν принадлежит либо B_7 , либо B_8 .

В варианте 1б) выберем окрестность $U(\Gamma_+)$ цикла Γ_+ , ограниченную двумя гладкими простыми замкнутыми кривыми: γ_+ и γ_- , в точках которых поле X_0 направлено соответственно в $U(\Gamma_+)$ и из $U(\Gamma_+)$, причем все траектории, начинающиеся в кольце между Γ_0 и γ_+ (Γ_0 и γ_-), ω -предельны (α -предельны) к Γ_0 . Тогда $U(\Gamma_-) = SU(\Gamma_+)$ – окрестность цикла Γ_- , не пересекающаяся с $U(\Gamma_+)$. Векторное поле $Y_\varepsilon \in X^r(D, S)$ в точках $U(\Gamma_+)$ зададим аналогично тому, как оно было определено в $U(\Gamma_0)$ в варианте 1а); в точках $U(\Gamma_-)$ положим $Y_\varepsilon(z) := -Y_\varepsilon(-z)$, а в точках $D \setminus U(\Gamma_+) \setminus U(\Gamma_-)$ пусть $Y_\varepsilon(z) := X_0(z)$. Далее, как и в варианте 1а), получаем, что в окрестности $V(X_0)$ существует векторное поле, принадлежащее $V(X_0) \cap B$.

В случае 2) из [11, п. 27.1] следует, что в $V(X_0)$ существует векторное поле, имеющее двойной цикл. Поэтому в окрестности $V(X_0)$ есть и векторное поле из B .

Рассмотрим случай 3). Если фокус кратности 1 находится в точке O , то векторное поле, принадлежащее $V(X_0) \cap B$, строится аналогично случаю 1а). Выберем окрестность $U(O)$ точки O , ограниченную гладкой простой замкнутой кривой $\gamma_+ = S\gamma_+$, такой, что траектории поля X_0 , начинающиеся в точках γ_+ , трансверсальны γ_+ и либо ω -предельны, либо α -предельны к O . При определении функции $F(z)$ вместо координаты n возьмем полярную координату ρ . Тогда векторное поле Y_ε , определенное равенствами (2), при достаточно малом ε принадлежит $V(X_0) \cap B$. Если имеются два симметричных фокуса кратности один, то поле $Y_\varepsilon \in V(X_0) \cap B$ строится аналогично случаю 1б).

В случае 4) из [11, п. 24.3] следует, что в окрестности $V(X_0)$ существует векторное поле, имеющее сложный фокус кратности один. Но тогда в $V(X_0)$ имеется и поле из B .

Рассмотрим случай 5). Пусть сначала точка O является простым негрубым седлом или простым негрубым узлом. Выберем базис в $\mathbf{R}^2$ так, чтобы в координатах (x, y) в этом базисе поле X_0 имело вид (1). Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем поле $X_\varepsilon \in \Sigma^0 X_+^r(D, S)$ такое, что $\|X_\varepsilon - X_0\|_r < \varepsilon$. Пусть $U_\delta(O)$ – окрестность точки O , заданная в координатах (x, y) неравенством $x^2 + y^2 < \delta$, где $\delta > 0$ выбрано так, чтобы в $\overline{U_\delta(O)}$ не было особых точек поля X_0 , отличных от O . Определим векторное поле $Y_\varepsilon \in X_+^r(D, S)$, положив

$$Y_\varepsilon(z) = X_0(z) + \chi(x^2 + y^2)(X_\varepsilon(z) - X_0(z)) \quad \text{при } z \in U_\delta(O) \text{ и}$$

$$Y_\varepsilon(z) = X_\varepsilon(z) \quad \text{при } z \in D \setminus U_\delta(O),$$

где χ – функция, уже определенная выше. Вследствие компактности кольца $\delta/3 \leq x^2 + y^2 \leq \delta$ мы можем взять ε столь малым, что все особые точки поля

$Z_0 := Y_\varepsilon$, отличные от O , принадлежат $D \setminus \overline{U_\delta(O)}$. При достаточно малых $\mu > 0$ векторное поле $Z_\mu \in V(X_0)$, полученное поворотом векторного поля Z_0 на угол $\arctg \mu \chi(x^2 + y^2)$, принадлежит $V(X_0)$. Если существуют сколь угодно малые $\mu > 0$ при которых Z_μ имеет негрубые циклы, то, как доказано выше, в $V(X_0)$ имеется векторное поле из B . Пусть при всех $\mu > 0$, достаточно близких к нулю, все замкнутые траектории у Z_μ грубые. Аналогично [14] доказывается, что найдется сколь угодно малое $\mu > 0$, при котором Z_μ не имеет выходящей сепаратрисы какой-нибудь особой точки, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этой или другой особой точки. Пусть L – сепаратрисный контур, определенный в [14]. В достаточно малой положительной полуокрестности контура либо нет замкнутых траекторий, либо имеется неустойчивый грубый предельный цикл. Тогда, как в [14], получаем, что продолжения по параметру $\mu > 0$ выходящих сепаратрис, принадлежащих L , не могут быть входящими сепаратрисами седел из этого контура. Отсюда, согласно [14], следует, что при некотором $\mu > 0$ Z_μ вообще не имеет выходящей сепаратрисы особой точки, являющейся одновременно и входящей сепаратрисой этой или другой особой точки, то есть $Z_\mu \in B_1 \cup B_3$.

Пусть теперь в случае 5) точка O не является простым негрубым седлом или простым негрубым узлом. Если $dX_0(O)$ имеет ненулевое собственное значение, то можно считать, что поле X_0 имеет вид (1). Тогда поле $X_\mu(x, y) = (r(x, y) + \mu x^3)\partial/\partial x + (\lambda_0 y + s(x, y))\partial/\partial y$ при достаточно малом $\mu > 0$ принадлежит $V(X_0)$, а точка O является для него простым негрубым седлом или простым негрубым узлом. Но, как показано выше, для такого векторного поля есть сколь угодно близкое поле, принадлежащее B_1 или B_3 . Если оба собственных значения $dX_0(O)$ нулевые, то существует линейное векторное поле H такое, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор $d(X_0 + \varepsilon H)(O)$ имеет ровно одно ненулевое собственное значение, а поле $X_0 + \varepsilon H$ принадлежит $V(X_0)$. Но тогда в $V(X_0)$ есть и поле из B_1 или B_3 .

Случай 6) рассматривается аналогично случаю 5).

Рассмотрим случай 7). Пусть L_1 – сепаратриса, идущая из седла $z^1 = (z_1^1, z_2^1)$ в седло z^2 . В каждом из возможных вариантов: а) $z^1 \neq z^2$, $S(z^1) \neq z^2$; б) $z^1 = z^2$, $Sz^1 \neq z^2$; в) $z^1 \neq z^2$, $S(z^1) = z^2$ и г) $S(z^1) = z^1 = z^2 = O$ – можно построить окрестность $W = SW$ множества $\bar{L}_1 \cup S\bar{L}_1$ в $\text{int } D$, граница которой состоит из одной или нескольких гладких простых замкнутых кривых, такую, что $\bar{W}$ не содержит особых точек, отличных от z^1 и z^2 . Тогда существует такая C^∞ -функция $g: D \rightarrow [0, 1]$, что $g(S(z)) \equiv g(z)$ и $g(z) = 0$ в точках множества $\bar{L}_1 \cup S\bar{L}_1$ и $g(z) = 1$ в точках множества $D \setminus W$. Рассмотрим векторное поле X_μ , полученное поворотом поля X_0 на угол $\arctg \mu g(z)$. Как и выше, можно считать, что найдется $\mu > 0$, при котором поле $Y_0 := X_\mu$ принадлежит $V(X_0)$, имеет только грубые особые точки и замкнутые траектории и не имеет траекторий, идущих из седла, кроме L_1 и SL_1 .

В варианте 7а) поле $Y_0 \in V(X_0) \cap B_8$. В вариантах 7б), 7в) и 7г) существует векторное поле $Z_0 \in V(X_0)$, или принадлежащее B , или имеющее только грубые особые точки и замкнутые траектории, не имеющее траекторий, идущих из седла в седло, кро-

ме L_1 и SL_1 , при этом $\text{tr} dZ_0(z^1) \neq 0$. Докажем это для варианта 7б). Для вариантов 7в) и 7г) доказательство аналогично. Если $\text{tr} dY_0(z^1) \neq 0$, то возьмем $Z_0 := Y_0$. Рассмотрим случай $\text{tr} dY_0(z^1) = 0$. Пусть $\eta: (-1, 1) \rightarrow D$ такое C^∞ -отображение, что точка $a = \eta(0)$ принадлежит сепаратрисе L_1 , $\eta'(0) \neq 0$ и репер $(Y_0(a), \eta'(0))$ положительно ориентирован. Пусть $U_\delta(a) = \{z \in D : |z - a| < \delta\}$, $U_\delta(z^1) = \{z \in D : |z - z^1| < \delta\}$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестности $U_\delta(a)$, $SU_\delta(a)$, $U_\delta(z^1)$, $SU_\delta(z^1)$ не пересекались между собой. Пусть $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ – такая C^∞ -функция, что $\varphi(s) = 1$ при $|s| \leq \delta/3$ и $\varphi(s) = 0$ при $|s| \geq 2\delta/3$. Рассмотрим векторное поле $Y_{\varepsilon, v} \in X_+^r(D, S)$ такое, что в точках $U_\delta(z^1)$ $Y_{\varepsilon, v}(z) = Y_0(z) + \varepsilon \varphi(|z - z^1|)(z_1 - z_1^1) \partial / \partial z_1$, в точках $SU_\delta(z^1)$ $Y_{\varepsilon, v}(z) = -Y_{\varepsilon, v}(-z)$, в точках $U_\delta(a)$ и $SU_\delta(a)$ вектор $Y_{\varepsilon, v}(z)$ получается поворотом вектора $Y_0(z)$ соответственно на угол $\arctg v \varphi(|z - a|)$ и $\arctg v \varphi(|S(z) - S(a)|)$, $Y_{\varepsilon, v}(z) = Y_0(z)$ во всех остальных точках D . Если $\rho > 0$ достаточно мало, то векторное поле $Y_{\varepsilon, v}$, $0 \leq \varepsilon \leq \rho$, $0 < |v| \leq \rho$, принадлежит $V(X_0)$ и имеет следующие свойства: у него только грубые особые точки, совпадающие с особыми точками поля X_0 ; $\text{tr} dY_{\varepsilon, v}(z^1) = \varepsilon$; выходящая (входящая) сепаратриса седла z^1 этого поля пересекает дугу $\eta(-1, 1)$ в точке $\eta(u_+(\varepsilon, v))$ ($\eta(u_-(\varepsilon, v))$), где $u_\pm(\varepsilon, v)$ – непрерывные функции, $u_+(0, 0) = u_-(0, 0) = 0$, $u_+(0, \rho) > u_-(0, \rho)$, $u_+(0, -\rho) < u_-(0, -\rho)$; все остальные выходящие сепаратрисы седел не совпадают с входящими сепаратрисами. При достаточно малом $\varepsilon_0 \in (0, \rho)$ имеем $u_+(\varepsilon_0, \rho) > u_-(\varepsilon_0, \rho)$, $u_+(\varepsilon_0, -\rho) < u_-(\varepsilon_0, -\rho)$. Но тогда найдется такое $v_0 \in (-\rho, \rho)$, что $u_+(\varepsilon_0, v_0) = u_-(\varepsilon_0, v_0)$. Следовательно, поле Y_{ε_0, v_0} имеет петли сепаратрис седел z^1 и $z^2 = S(z^1)$, а $\text{tr} dY_{\varepsilon_0, v_0}(z^1) = \varepsilon_0 \neq 0$. Если Y_{ε_0, v_0} имеет негрубую замкнутую траекторию, то, как показано выше, в любой окрестности поля Y_{ε_0, v_0} , содержащейся в $V(X_0)$, есть поле $Z_0 \in B_7 \cup B_8$, если все замкнутые траектории у Y_{ε_0, v_0} грубые, то возьмем $Z_0 := Y_{\varepsilon_0, v_0}$.

Если в варианте 7б) векторное поле Z_0 не имеет сепаратрис, предельных к петлям $\bar{L}_1$ и $S\bar{L}_1$, то оно принадлежит $V(X_0) \cap B_8$. Пусть такие сепаратрисы существуют. Для определенности, пусть $\text{tr} dZ_0(z^1) < 0$ и к петле $\bar{L}_1$ ω -предельна выходящая сепаратриса седла z^0 . Рассмотрим векторное поле Z_μ , полученное поворотом поля Z_0 на угол $\arctg \mu$. Из [11, п. 31.7] следует, что найдется такое μ_* , что поле $Z_{\mu_*} \in V(X_0)$, имеет только грубые особые точки и замкнутые траектории и ровно две траектории, идущие из седла в седло: выходящие сепаратрисы седел z^0 и $S(z^0)$, идущие, соответственно, в седла z^1 и $S(z^1)$. Поэтому $Z_{\mu_*} \in V(X_0) \cap B$. Для случаев 7в) и 7г) доказательство аналогично.

4. Первая степень негрубости полей из B . Бифуркационные многообразия

Открытость множеств B_i ($i = 3, 4, \dots, 8$) в $X_+^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X_+^r(D, S)$ и то, что поля из B_i имеют первую степень негрубости, доказывается аналогично соответствующим

утверждениям из [15]. То, что $\bigcup_{i=3}^8 B_i$ – вложенное C^{r-1} -подмногообразие, доказывается так же, как в [16].

Докажем эти утверждения для B_1 и B_2 . Если $V(X_0)$ – достаточно малая окрестность поля $X_0 \in B_k$ ($k=1,2$), то для поля $X \in V(X_0)$ собственные значения $\lambda_1(X)$ и $\lambda_2(X)$ матрицы $dX(O)$ являются C^{r-1} -функциями от X , причем $\lambda_1(X_0)=0$, а $\lambda_2(X) \neq 0$. Для определенности, пусть $\forall X \in V(X_0)$ $\lambda_2(X) < 0$. В собственном базисе векторное поле X имеет вид:

$$X(x, y) = P_1(x, y, X) \partial / \partial x + P_2(x, y, X) \partial / \partial y = (\lambda_1(X)x + R_1(x, y, X) \partial / \partial x + (\lambda_2(X)y + R_2(x, y, X)) \partial / \partial y,$$

где R_k ($k=1,2$) – C^{r-1} -функции своих аргументов, $R_k(-x, -y, X) \equiv -R_k(x, y, X)$. Уравнение $\lambda_2(X)y + R_2(x, y, X) = 0$ имеет в окрестности точки $(0, 0, X_0)$ решение $y = \tilde{y}(x, X)$ такое, что $\tilde{y}(\cdot, \cdot) \in C^{r-1}$, $\tilde{y}(-x, X) \equiv -\tilde{y}(x, X)$, $\tilde{y}'_x(0, X) = 0$. Подставляя $y = \tilde{y}(x, X)$ в уравнение $\lambda_1(X)x + R_1(x, y, X) = 0$, получаем уравнение $\lambda_1(X)x + R(x, X) = 0$, где $R(-x, X) = -R(x, X)$, $R(0, X) = R'_x(0, X) = R''_{xx}(0, X) = 0$ и $\text{sgn } R'''_{xxx}(0, X) = \text{sgn } R'''_{xxx}(0, X_0) \neq 0$. Мы можем выбрать число $d > 0$ и окрестность $V_1(X_0) \subset V(X_0)$ поля X_0 так, что это уравнение $\forall X \in V_1(X_0)$ имеет на $[-d, d]$ единственное решение $x = 0$ при $\lambda_1(X) \text{sgn } R'''_{xxx}(0, X_0) \geq 0$ и три решения $x = 0$, $x = \xi(X) \in (0, d)$ и $x = -\xi(X) \in (-d, 0)$ при $\lambda_1(X) \text{sgn } R'''_{xxx}(0, X_0) < 0$. Соответственно, поле X имеет в замкнутой области Π , заданной неравенствами $-d \leq x \leq d$, $-d \leq y \leq d$, особую точку O и три особых точки O и $O_{\pm} = (\pm \xi(X), \pm \tilde{y}(\xi(X), X))$. Из [11, п. 23.2] следует, что в случае, когда имеется три особых точки, они обязательно грубые. Точки из Π будем отождествлять с их координатными строками (x, y) . Так как $\partial P_1(0, 0, X_0) / \partial x + \partial P_2(0, 0, X_0) / \partial y = \lambda_0 < 0$, то можно считать, что для поля $X \in V_1(X_0)$ в точках Π $\partial P_1(x, y, X) / \partial x + \partial P_2(x, y, X) / \partial y < 0$. Из критерия Бендиксона [12, с. 221] получаем, что в Π нет замкнутых траекторий.

Если $X_0 \in B_1$ ($X_0 \in B_2$), то есть $R'''_{xxx}(0, X_0) > 0$ ($R'''_{xxx}(0, X_0) < 0$), то у поля X в Π при $\lambda_1(X) > 0$ ($\lambda_1(X) < 0$) – единственная особая точка O – грубое седло (устойчивый грубый узел), при $\lambda_1(X) = 0$ – единственная особая точка O – простое негрубое седло (простой устойчивый грубый узел), при $\lambda_1(X) < 0$ ($\lambda_1(X) > 0$) – три особых точки: O – устойчивый грубый узел (грубое седло) и $O_{\pm}$ – грубые седла (устойчивые грубые узлы).

Будем считать окрестность $V_1(X_0)$ столь малой, что у любого поля $X \in V_1(X_0)$ все замкнутые траектории и все особые точки, не принадлежащие Π , являются грубыми.

Пусть $X_0 \in B_1$. Можно считать, что d выбрано так, что выходящие сепаратрисы седла O поля X_0 трансверсально пересекают дуги $x = \pm d$, $-d < y < d$ в точках $(\pm d, \pm y^0)$, а входящие – дуги $y = \pm d$, $-d < x < d$ в точках $(\pm x^0, \pm d)$. Тогда найдутся числа x_-, x_+ , $-d < x_- < x_0 < x_+ < d$ и y_-, y_+ , $-d < y_- < y_0 < y_+ < d$ такие, что в точках дуг $h_+: y = d$, $x_- \leq x \leq x_+$ и $h_-: y = -d$, $-x_+ \leq x \leq -x_-$ поле направлено внутрь Π , точках дуг $v_+: x = d$, $y_- \leq y \leq y_+$ и $v_-: x = -d$, $-y_+ \leq y \leq -y_-$ направлено из Π , положительная полутраектория, начинающаяся в точке (x_+, d) (соответственно (x_-, d)), пересекает v_+ (соответственно v_-) во внутренней точке. Если окрестность

$V_1(X_0)$ достаточно мала, то эти свойства сохраняются и для любого поля $X \in V_1(X_0)$. Пусть в точке $(d, x) \in h_+$ начинается его положительная полутраектория, пересекающая дугу v_+ (соответственно v_-) в точке $(d, \varphi_+(x))$ (соответственно $(-d, \varphi_-(x))$). Пусть D_X – замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой, составленной из дуг h_+ , h_- , $v'_+ : x = d, -\varphi_-(x_-) \leq y \leq \varphi_+(x_+)$, $v'_- : x = -d, -\varphi_+(x_+) \leq y \leq \varphi_-(x_-)$ и соединяющих их концы дуг траекторий поля X (см. рис. 1). Точка $O \in D_{X_0}$, поэтому можно считать, что окрестность $V_1(X_0)$ была выбрана столь малой, что $O \in D_X$.

Рис. 1. Области D_X и C_X

Фиксируем поле $X \in V_1(X_0)$, для которого $\lambda_1(X) < 0$. Обозначим x_r (x_l) – точную нижнюю (верхнюю) грань чисел $x \in [x_-, x_+]$, для которых определено $\varphi_+(x)$ ($\varphi_-(x)$), а y_r (y_l) – точную нижнюю (верхнюю) грань чисел $y \in [\varphi_+(x), \varphi_-(x)]$. Через точку (x_r, d) ((x_l, d)) проходит входящая сепаратриса одного из седел O_+ , через точку (d, y_r) ($(-d, y_l)$) – выходящая сепаратриса этого же седла. Покажем, что $x_l < x_r$. Пусть это не так, то есть $x_l = x_r$. В этом случае бесконечное множество траекторий ω -предельных к узлу O , должно при убывании времени выходить из D_X в точках одной из дуг $y = d$, $x_- < x < x_l$, $y = d$, $x_r < x < x_+$, $y = -d$, $-x_r < x < -x_+$ и $y = -d$, $-x_l < x < -x_-$. Но траектории, пересекающие эти дуги, выходят из D_X и при возрастании времени. Получаем противоречие. Таким образом, $x_l < x_r$. Поэтому через точки (x_r, d) и (x_l, d) проходят входящие сепаратрисы разных седел, для определенности, пусть соответственно седел O_+ и O_- . Тогда через точку $(-x_l, -d)$ (соответственно $(-x_r, -d)$) также проходит входящая сепаратриса седла O_+ (соответственно O_-). Одна из выходящих сепаратрис седла O_+ (соответственно O_-) выходит из D_X через точку (d, y_r) (с соответствием $(-d, y_l)$). Пусть C_X – область в D_X , ограниченная кусочно-гладкой кривой, составленной из дуги $y = d$, $x_l \leq x \leq x_r$, дуги $y = -d$, $-x_r \leq x \leq -x_l$, дуги устойчивого инвариантного многообразия седла O_+ между точками (x_r, d) и $(-x_l, -d)$ и дуги устойчивого инвариантного многообразия седла O_- между точками (x_l, d) и $(-x_r, -d)$. Положительные полутраектории, начинающиеся в C_X , не выхо-

дят из C_X . Все они ω -предельны к единственной особой точке в C_X – точке O . Области C_X принадлежит и по выходящей сепаратрисе каждого седла $O_{\pm}$.

Мы можем считать, что $V_1(X_0)$ и d выбраны так, что любое поле $X \in V_1(X_0)$ не имеет пересекающихся с Π замкнутых траекторий и сепаратрис седел, отличных от $O_{\pm}$.

Пусть теперь $X_0 \in B_2$. Число d можно выбрать так, чтобы все траектории векторного поля X_0 , проходящие через точки дуг $x=d$, $-d \leq y \leq d$ и $y=\pm x$, $0 < x \leq d$, были трансверсальны этим дугам и входили внутрь области $\Delta: -x < y < x$, $0 < x \leq d$, а все выходящие сепаратрисы, предельные к узлу O , пересекали дуги $x=\pm d$, $-d \leq y \leq d$. Тогда окрестность $V_1(X_0)$ можно считать выбранной так, что при $\lambda_1(X) \leq 0$ поле X имеет в Π единственную особую точку – устойчивый узел O , а все остальные траектории ω -предельны к узлу и выходят из Π при убывании времени; при $\lambda_1(X) > 0$ поле X имеет в Π седло O и два узла $O_+ \in \Delta$, $O_- \in S\Delta$, все остальные траектории выходят из Π при убывании времени и, за исключением двух входящих сепаратрис седла, ω -предельны к одному из узлов; все выходящие сепаратрисы, пересекающиеся с Π , ω -предельны к одному из узлов.

Пусть $X_0 \in B_k$ ($k=1,2$). Учитывая выбор числа d и окрестности $V_1(X_0)$, аналогично доказательствам достаточных условий грубости и первой степени негрубости [11, 15] получаем, что существует окрестность $V_0(X_0) \subset V_1(X_0)$ поля X_0 такая, что поле $X \in V_0(X_0)$ при $\lambda_1(X) \neq 0$ грубое, а при $\lambda_1(X) = 0$ принадлежит B_k и топологически эквивалентно полю X_0 . Потому оно имеет первую степень негрубости. Так как $\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \lambda_1(X_0 + \tau \partial / \partial x) = 1$, то $d\lambda_1(X_0) \neq 0$. Поскольку $V_0(X_0) \cap B = \{X \in V_0(X_0) : \lambda_1(X) = 0\}$, $\bigcup_{i=3}^8 B_i$ – вложенное C^{r-1} -подмногообразие в $X_+^r(D, S)$, а в достаточно малой окрестности любого поля из $\bigcup_{i=3}^8 B_i$ нет векторных полей из $B_1 \cup B_2$, то $B = \bigcup_{i=1}^8 B_i$ – открытое подмножество в $X^r(D, S) \setminus \Sigma^0 X^r(D, S)$ и вложенное C^{r-1} -подмногообразие в $X_+^r(D, S)$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы:

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1978. 304 с.
2. Жолондек Х. О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Математический сборник. 1983. Т. 120, № 4. С. 473–499.
3. Golubitsky M., Schaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Vol. 2. Springer Verlag, 1988. 546 p.
4. Шноль Э.Э. Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 8. С. 141–157.
5. Лерман Л.М., Тураев Д.В. О бифуркациях потери симметрии в обратимых системах // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 2. С. 323–343.
6. Ройтенберг В.Ш. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относительно конечной группы вращений // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2018. Вып. 3 (226). С. 13–19. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
7. Ройтенберг В.Ш. Грубость векторных полей на плоскости, инвариантных относи-

тельно группы вращений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2018. Т. 50, № 4. С. 398–404.

8. Ройтенберг В.Ш. О типичных однородных векторных полях на плоскости // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 2. С. 15–26.

9. Ройтенберг В.Ш. О бифуркациях однородных полиномиальных векторных полей на плоскости // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. 2019. Т. 51, № 2. С. 34–43.

10. Палис Ж., Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. Москва: Мир, 1986. 301 с.

11. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1967. 488 с.

12. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Москва: Наука, 1966. 568 с.

13. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. Москва: Мир, 1971. 232 с.

14. Ройтенберг В.Ш. О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер.: Естественно-математические и технические науки. 2014. Вып. 4 (147). С. 13–21. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>

15. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Достаточные условия для негрубости первой степени динамической системы на плоскости // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 12. С. 2121–2134.

16. Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. Vol. 43. P. 5–46.

17. Уокер Р. Алгебраические кривые. Москва: ИЛ, 1952. 236 с.

References:

1. Arnold V.I. Additional chapters of the theory of ordinary differential equations. Moscow: Nauka, 1978. 304 p.

2. Zholondek Kh. On versality of one family of symmetric vector fields on the plane // Mathematical Collection. 1983. Vol. 120, No. 4. P. 473–499.

3. Golubitsky M., Schaeffer D., Stewart I. Singularities and Groups in Bifurcation Theory. Vol. 2. Springer Verlag, 1988. 546 p.

4. Shnol E.E. Regular polyhedra and bifurcations of symmetric equilibria of ordinary differential equations // Mathematical Collection. 2000. Vol. 191, No. 8. P. 141–157.

5. Lerman L.M., Turaev D.V. On symmetry breaking bifurcations in reversible systems // Nonlinear Dynamics. 2012. Vol. 8, No. 2. P. 323–343.

6. Roytenberg V.Sh. Structural stability of vector fields on the plane that are invariant under a finite rotation group // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2018. Iss. 3 (226). P. 13–19. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>

7. Roytenberg V.Sh. Structural stability of planar vector fields those are invariant under the rotation group // Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser.: Mathematics. Physics. 2018. Vol. 50, No. 4. P. 398–404.

8. Roytenberg V.Sh. On generic homogeneous vector fields on the plane // University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. 2018. No. 2. P. 15–26.

9. Roytenberg V.Sh. On bifurcations of homogeneous polynomial vector fields on the plane // Belgorod State University Scientific Bulletin. Ser.: Mathematics. Physics. 2019. Vol. 51, No. 2. P. 34–43.

10. Palis J., Melo W. Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Springer-Verlag, 1982. P. 1–38.

11. The theory of bifurcations of dynamical systems on the plane / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1967. 488 p.

12. Qualitative theory of dynamical systems of the second order / A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon, A.G. Mayer. Moscow: Nauka, 1966. 568 p.

13. Narasimhan R. Analysis on real and complex manifolds. Paris: Masson & Cie, 1968. 232 p.
14. Roytenberg V.Sh. On generic polynomial vector fields on a plane // The Bulletin of the Adyghe State University. Ser.: Natural-Mathematical and Technical Sciences. 2014. Iss. 4 (147). P. 13–21. URL: <http://vestnik.adygnet.ru>
15. Andronov A.A., Leontovich E.A. Sufficient conditions for first degree non-roughness of a dynamical system on the plane // Differential Equations. 1970. Vol. 6, No. 12. P. 2121–2134.
16. Sotomayor J. Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. Vol. 43. P. 5–46.
17. Walker R.J. Algebraic curves. Moscow: IL, 1952. 236 p.

Статья поступила в редакцию 15.05.2021; одобрена после рецензирования 17.06.2021; принята к публикации 19.06.2021.

The article was submitted 15.05.2021; approved after reviewing 17.06.2021; accepted for publication 19.06.2021.

© В.Ш. Ройтенберг, 2021