<https://doi.org/10.53278/2306-9139-2021-2-17-38-44>
УДК 624.131.1

ПРОБЛЕМАТИКА И ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ГРУНТОВЕДЕНИЯ

PROBLEMS AND TASKS OF THEORETICAL SOIL SCIENCE

© 2021 В.А. Королев

© 2021 V. A. Korolev

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, геологический факультет,
г. Москва, 119991, Россия*

Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Moscow, 119991, Russia

va-korolev@bk.ru

Аннотация: В статье рассматриваются проблематика и задачи нового раздела грунтоведения — теоретического грунтоведения. Отмечается, что теоретическое грунтоведение — раздел грунтоведения о наиболее общих законах, математически описывающих состав, строение, свойства грунтов и их формирование, процессы в них, а также изменения грунтов под влиянием внутренних и внешних факторов. Показано, что основной целью теоретического грунтоведения является изучение и математическое описание наиболее общих законов формирования состава, строения и свойств грунтов, законов их изменения под влиянием внутренних факторов и внешних воздействий, а также взаимодействия между грунтами, представляемых в математической форме. В качестве основного способа познания теоретического грунтоведения выступают не эмпирические методы исследований, как в классическом грунтоведении, а использование создаваемых теоретических, в первую очередь математических, моделей явлений в грунтах и их сопоставление с реальностью.

Abstract: The article deals with the problems and tasks of a new section of Soil Science — Theoretical soil science. It is noted that Theoretical soil science is a section of soil science about the most general laws that mathematically describe the composition, structure, properties of soils and their formation, processes in them, as well as changes in soils under the influence of internal and external factors. It is shown that the main goal of Theoretical soil science is the study and mathematical description of the most general laws of the formation of the composition, structure and properties of soils, the laws of their change under the influence of internal factors and external influences, as well as the interaction between soils, represented in mathematical form. The main method of understanding Theoretical soil science is not empirical research methods, as in classical soil science, but the use of theoretical (primarily mathematical) models of phenomena in soil and their comparison with reality.

Ключевые слова: теоретическое грунтоведение, теория грунтоведения, математическое моделирование, модель грунта, искусственный интеллект, цифровизация грунтоведения

Keywords: Theoretical soil science, theory of soil science, mathematical modeling, soil model, artificial intelligence, digitalization of soil science

Грунтоведение, как основной научный раздел инженерной геологии, постоянно развивается. Возникнув из недр почвоведения в связи с запросами строительства, оно сначала, в 1920-1930-е годы, развивалось в основном как «дорожное грунтоведение» [2,6]. Затем в 1940-1960-е годы грунты стали изучаться в связи с расширяющимися запросами строительства различных инженерных сооружений. При этом основной его целью являлось определение различных показателей грунтов, необходимых для практических расчетов и проектирования инженерных сооружений.

Однако на протяжении первых трех четвертей XX века грунтоведение во многом оставалось описательной наукой, в которой преобладали эмпирические методы исследований. И это естественно — начальный этап развития любой геологической науки всегда был описательным, эмпирическим. При этом уже на этапе своего становления грунтоведение развивалось на базе историко-геологического подхода как теоретической основы системы изучения грунтов [12-14].

Далее, по мере накопления фактов, новых данных и увеличения объема собранной информации,

наука, как правило, переходила в стадию теоретических обобщений: устанавливаются закономерности, вырабатываются законы, объединяемые в теории, происходит её математизация. Это произошло и в грунтоведении — начиная с последней четверти XX века стали выявляться наиболее общие закономерности формирования состава, строения и свойств различных грунтов, были сформулированы законы грунтоведения, началась его цифровизация [4,6].

Последнее обстоятельство является наиболее важным, так как перевод на язык математики не только накопленной грунтоведческой информации, но и установленных закономерностей и законов грунтоведения, разработка математических моделей, описывающих грунты, их инженерно-геологические особенности и процессы в них, позволяют прогнозировать свойства и поведение грунтов в различных условиях, что является актуальнейшей задачей современного грунтоведения.

Решение этой задачи, на наш взгляд, возможно в рамках самостоятельного нового раздела грунтоведения — **теоретического грунтоведения**.

Теоретическое грунтоведение — раздел грунтоведения о наиболее общих законах, математически описывающих состав, строение, свойства грунтов и их формирование, процессы в них, а также изменения грунтов под влиянием внутренних и внешних факторов. При этом теоретическое грунтоведение соотносится с общим грунтоведением примерно так же, как механика соотносится с теоретической механикой и прикладной механикой, или физика с теоретической физикой и т.п. В грунтоведении, как и, например, в механике, можно выделить теоретический раздел (теоретическое грунтоведение), а также раздел прикладного характера, включающий дорожное и аэродромное грунтоведение, строительное грунтоведение, морское грунтоведение и т.п. Именно теоретический раздел грунтоведения и является рассматриваемым новым разделом — теоретическим грунтоведением.

Объекты теоретического грунтоведения — это грунты и грунтовые толщи.

Предмет исследования теоретического грунтоведения — наиболее общие математические модели состава, строения и свойств грунтов, процессов в них, математические модели формирования свойств грунтов.

Напомним, что, согласно К.Э. Плохотникову [9], под (математическим) моделированием понимается специфическая человеческая деятельность, развертывающаяся поэтапно (онтологизм, гносеологизм, методологизм) в конкретной познавательной ситуации и приводящая к созданию сверхмодели, которая является системной сборкой отдельных элементарных актов моделирования.

В этом отношении теоретическое грунтоведение опирается на всю накопленную базу современного (классического) грунтоведения, как основного научного направления инженерной геологии, включая такие его смежные направления как динамическое грунтоведение и региональное грунтоведение, и развивается поэтапно.

Основная цель теоретического грунтоведения — изучение и математическое описание наиболее общих законов формирования состава, строения и свойств грунтов, законов их изменения под влиянием внутренних факторов и внешних воздействий, а также взаимодействия между грунтами, представляемых в математической форме. В качестве основного способа познания теоретического грунтоведения выступают не эмпирические методы исследований, как в классическом грунтоведении, а использование создаваемых теоретических, в первую очередь математических, моделей явлений в грунтах и их сопоставление с реальностью.

В такой трактовке теоретическое грунтоведение становится самостоятельным методом изучения грунтов, несмотря на то что его содержание формируется, естественно, с учетом результатов инженерно-геологических изысканий, включая экспериментальные лабораторные и полевые исследования грунтов. Подчеркнём, что основной целью теоретического грунтоведения является открытие и понимание (объяснение) наиболее общих законов формирования состава, строения и свойств грунтов и возможное предсказание еще неизвестных явлений в грунтах. Таким образом, теоретическое грунтоведение может выполнять и объяснительную, и прогностическую функции.

Продуктом теоретического грунтоведения являются грунтоведческие теории. Разрабатываемые в теоретическом грунтоведении математические модели грунтов должны завершаться обоснованием научных теорий.

Проблематика теоретического грунтоведения включает в себя ряд нерешенных и актуальных крупных теоретических вопросов, ждущих своего решения. Напомним, что научная проблема — это осознание и формулирование концепции о незнании некоторого явления, предмета, процесса и т.п. Совокупность ряда таких проблем составляет проблематику данной области знания [5,6]. В области теоретического грунтоведения его проблематика, по нашему мнению, выглядит следующим образом:

1. *Проблема цифровизации грунтоведения. Как обосновать, обеспечить и реализовать цифровизацию грунтоведческой информации?* К настоящему времени накоплен большой объем фактических данных о грунтах разных типов в различных реги-

онах страны. Подавляющая часть этой информации хранится на бумажных носителях, в отчетах, фондах и т.п. и не доступна для широкого круга исследователей. Необходима унификация всей этой информации, перевод ее на электронные носители, создание на этой основе больших грунтоведческих баз данных (Big data) [4]. При этом они должны сопровождаться созданием систем управления на основе искусственного интеллекта и выступать как экспертные грунтоведческие системы.

2. *Проблема формирования модели грунтов. Как (на какой основе, на какой базе) создать математическую модель формирования состава, строения и свойств грунта?* Проблема, связанная с закономерностями формирования инженерно-геологических особенностей грунтов под влиянием природных процессов и техногенных воздействий, остается извечной проблемой грунтоведения, которой занимались и занимаются многие видные инженеры-геологи. В итоге её разработки был сформулирован основной закон грунтоведения [2,14]. При этом, как подчеркивалось в [13,14], необходимо различать понятия «генезис грунтов» и «генезис свойств грунтов».

На современном этапе развития грунтоведения выявлены многочисленные частные закономерности формирования состава, строения и свойств грунтов разных типов. Назрела необходимость их обобщения в виде теории, анализа на математической основе и создания математической модели (моделей), описывающей эти закономерности и позволяющей с её помощью прогнозировать изменение свойств грунтов в различных условиях. При этом под моделью формирования свойства (состава, состояния) грунта понимается «абстрактная модель, описывающая тем или иным способом с той или иной степенью схематизации способ (процесс, механизм) становления данного показателя грунта» [14]. Способ представления модели может быть различным. В рамках теоретического грунтоведения рассматриваются логико (теоретико)-графическая и математическая модели.

3. *Проблема иерархии грунтов. Какова математическая модель, описывающая иерархию грунта от образца до массива и учитывающая эмерджентность системы?* Эта проблема также была обозначена довольно давно. В разной форме, как необходимость изучения грунтов от уровня образца до массива, она высказывалась Е.М. Сергеевым [12]. В настоящее время её решение предполагается осуществить на базе теории системного анализа с последующим математическим представлением.

Задачи теоретического грунтоведения вытекают из выше сформулированных цели и проблематики. В наиболее общем виде их можно представить в следующем виде:

1) Разработать методологические основы теоретического грунтоведения, опирающиеся на его онтологию и существующую номологическую базу общего грунтоведения [6]. Это вспомогательная задача, решение которой, тем не менее, является необходимой основой развития всего направления;

2) Осуществить цифровизацию грунтоведческой информации и математическое описание (представление) состава, строения и свойств грунтов разных классов как фактологической основы теоретического грунтоведения. Данную задачу также можно рассматривать как вспомогательную, но её решение является обязательным и необходимым условием для всего теоретического грунтоведения;

3) Создать математические модели, описывающие протекание в грунтах наиболее общих химических, физико-химических, физических, биотических и физико-механических процессов на основе фундаментальных закономерностей и теоретических представлений общего грунтоведения. Это наиболее ёмкая по содержанию и объёму задача, которая разбивается на целый ряд конкретных задач, связанных с принадлежностью грунтов к разным классам, а также с многообразием процессов в них и проявлением различных свойств;

4) Разработать логико-графические и математические модели формирования состава, строения и свойств грунтов;

5) Осуществить перевод вербальных законов и теорий общего грунтоведения в математическую форму. Сформулированные к настоящему времени собственные законы грунтоведения, а также большинство теорий, описывающих различные процессы в грунтах, представлены в вербальной (словесной) форме, что затрудняет их применение [5,6]. Представление их в математической форме позволит более эффективное их использование;

6) Разработать математическую модель грунта как иерархической системы от микро- до макро-уровня. Это важнейшая задача теоретического грунтоведения, решение которой позволит учитывать проявление масштабного эффекта в грунтах для разных свойств, а также будет способствовать повышению точности инженерно-геологических прогнозов и качества проектирования инженерных сооружений.

Методологической основой достижения вышеуказанной цели и задач теоретического грунтоведения являются выработка и обоснование соответствующих математических моделей, а само *математическое моделирование*, в том числе вычислительные эксперименты, при этом становится основным теоретическим методом обобщения грунтоведческой информации и её представления. Одновременно тео-

ретическое грунтоведение опирается и на все прочие методы исследования теоретического уровня: логический и системный анализ, дедукцию и индукцию, аналогию, формализацию, типизацию и классифицирование, теоретико-гипотетический метод и др., а также законы грунтоведения [5,6,8].

Таким образом, теоретическое грунтоведение, строго говоря, изучает не сами грунты и их свойства, а свойства создаваемых теоретических моделей в их сопоставлении с реальным поведением грунтов.

Современное состояние теоретического грунтоведения можно охарактеризовать как начальную стадию его развития. Отдельные его разделы формируются неравномерно, однако некоторые основные тенденции уже можно сформулировать. Они являются следующими:

1) Происходит активное развитие цифровизации грунтоведческой информации, создаются базы грунтоведческих данных, экспертные системы, как элементы баз больших данных (Big data). Процесс цифровизации грунтоведения будет нарастать в ближайшие годы и одновременно будет увеличиваться доля применения технологий искусственного интеллекта в грунтоведении [4].

2) Во всем мире отмечается увеличение числа прикладных компьютерных программ, моделирующих различные свойства грунтов, особенно физико-механические, и процессы в них.

3) Среди них наиболее широко разрабатываются и внедряются прикладные программы моделирующие физико-механические свойства грунтов. Начиная с 1960-х годов прошлого столетия, в механику грунтов стали внедряться расчетные (численные) методы. Появились прикладные программы, применяемые для расчета деформаций, осадок сооружений и т.п., из которых на первое место вышли основанные на методе конечных элементов (МКЭ) [11,15-17];

Например, программа **Plaxis** (Нидерланды) получила наиболее широкое распространение в последнее время. Она дает решения различных геотехнических задач методом конечных элементов. В программе реализованы современные модели грунта, которые отображают нелинейное, зависимое от напряжения и от времени, поведение различных грунтов и позволяют адаптировать изучаемый объект под конкретную задачу. В то же время эта программа основана преимущественно на физико-механических моделях тел (теории сплошной среды) и не учитывает множество физико-химических явлений, которые реально присутствуют в грунтах. Дальнейшее развитие этого программного продукта осуществляется именно в этом направлении с целью ликвидации данного недостатка.

4) Наряду с моделированием физико-механических свойств грунтов, широкое распространение получают программы моделирования тепловых полей в мерзлых и промерзающих грунтах. Например, программа **Frost 3D** позволяет получать научно-обоснованные прогнозы тепловых режимов многолетнемерзлых грунтов в условиях теплового влияния трубопроводов, добывающих скважин, гидротехнических и других сооружений с учетом термостабилизации грунта и т.п. Программный комплекс **Борея 3D** предназначен для расчета динамики изменений температурного поля многолетнемерзлых грунтов оснований зданий и сооружений с учетом теплового влияния сезоннодействующих охлаждающих устройств (термостабилизаторов), а также инженерных зданий и сооружений. Он реализует математический аппарат численного моделирования распространения температурных полей в грунтовом массиве с учетом фазового перехода незамерзшей воды в спектре отрицательных температур.

5) Важной особенностью современного этапа развития теоретического грунтоведения является рассмотрение и моделирование грунтов не только на основе *теории сплошной среды* (как это реализуется в большинстве прикладных программ на базе МКЭ), но и на основе *теории дискретной среды*, что особенно актуально для моделирования дисперсных грунтов и процессов в них. Так, например, А.Б. Фадеев [15] обобщил работы в области решения нелинейных задач механики сыпучих тел, в том числе дисперсных грунтов методом конечных элементов. В.В. Ревенко [11] рассмотрел применение МГЭ к дискретно-континуальной модели грунта. В этой модели для областей сдвигов используется дискретная среда, получаемая с помощью разрезов скольжения континуальной среды. Для областей вне сдвигов используется континуальная среда.

6) Другим важным примером реализации методологии теоретического грунтоведения на базе модели дискретной среды является численное моделирование деформирования и прочности дисперсных грунтов с помощью программы **PFC** (Particle Flow Code) [7,18]. Возможности этой программы позволяют учесть влияние различного (задаваемого) гранулометрического состава дисперсных грунтов на распределение контактных напряжений в местах соприкосновения частиц, наглядно изучить картину затухания (релаксации) напряжений в объеме грунта при его деформировании (например, при уплотнении, рис. 1) и плоскостном сдвиге, а также моделировать сам плоскостной сдвиг (рис. 2).

В качестве примера возможностей этой программы на рис.1 приведены результаты математи-

ческого моделирования перераспределения контактных напряжений от вертикальной равномерно распределенной нагрузки 400 кПа в грунтовой бидисперсной смеси. При этом ширина ленты отражает величину контактного напряжения: чем оно больше, тем шире лента.

Из рисунка 1 видно, что основная доля наибольших напряжений возникает на контактах более крупных частиц, а на контактах крупных частиц с мелкими происходит постепенное рассеивание напряжений. Моделирование показывает, что с уменьшением в смесях доли частиц крупных фракций уменьшается и доля больших контактных напряжений и одновременно растет доля меньших напряжений, а их общее распределение в объеме грунта становится более равномерным.

Программа позволяет аналогично наглядным образом оценить перераспределение контактных напряжений между частицами в грунтах разного гранулометрического состава и при иных видах деформирования, а также при сдвиге.

Этот пример показывает, что математическое моделирование на основе теории дискретной среды дает возможность наглядно представить невидимое глазу перераспределение контактных напряжений между частицами грунтовых смесей и лучше понять характерные особенности и закономерности этого процесса.

Другой, не менее важный и интересный пример, показанный на рис.2, иллюстрирует возможности программы PFC для математического моделирования экспериментов по оценке прочности грунтов

заданного гранулометрического состава и формы частиц на сдвиг.

В этом случае программа PFC позволяет произвести имитацию сдвига с получением диаграмм сдвига в координатах «касательные напряжения (τ) — деформация сдвига» (рис. 2а) при разных нормальных напряжениях (σ), а по ним построить диаграмму сдвига в координатах закона Кулона «касательные напряжения (τ) — нормальные напряжения (σ)» (рис. 2б), по которой можно определить угол внутреннего трения грунта (φ).

Обращает на себя внимание получаемый при этом «пилообразный» характер зависимостей касательного напряжения от деформации сдвига (рис.2а), который обычно не фиксируется в экспериментах даже в автоматизированных приборах для испытаний грунтов на сдвиг. Но при математическом моделировании эта особенность сдвига, обусловленная неоднородностью структуры испытываемого грунта и морфологией его структурных элементов, четко проявляется и объясняется механическим зацеплением между частицами разной формы, которое то увеличивается, то снижается в процессе сдвига и качения частиц. Более того, из результатов этого моделирования следует, что чем больше нормальная нагрузка на грунт, тем в большей мере проявляется скачкообразный характер изменения касательных напряжений. Следовательно, задавая в модели различную морфологию частиц и гранулометрический состав грунта, можно выяснить закономерности влияния этих факторов на параметры сопротивления сдвигу на базе этой

Рис. 1. Распределение контактных напряжений (ленты) внутри бидисперсной грунтовой смеси, состоящей из фракций 4-2 мм (светлые шарики) и 1-0,5 мм (тёмные шарики) при вертикальной равномерно-распределенной нагрузке $P=400$ кПа. Смесь фракций: 4-2 мм (80%) + 0,5-1 мм (20%)

модели. В этом, в том числе, и состоит методологический смысл реализации возможностей теоретического грунтоведения.

В самом общем случае в рамках теоретического грунтоведения программу PFC можно рассматривать как применение метода вычислительных экспериментов, рассматриваемых ниже.

Весьма перспективным направлением теоретического грунтоведения, развивающимся в настоящее время, является исследование различных свойств грунтов на основе численных или *вычислительных экспериментов*, широко применяемых в механике композитных материалов [3]. Суть метода вычислительных экспериментов состоит в том, что исследования ведутся не на материальных объектах (грунтах), а на имитационной математической модели: вслед за построением математической модели проводится ее численное исследование с помощью вычислительных и логических процедур, позволяющее «проиграть» поведение исследуемого объекта (в данном случае грунта) в различных условиях или в различных модификациях и получить таким образом новую информацию.

Наибольшее число решаемых этим методом задач связано с оценкой физико-механических свойств грунтов. В этой области можно назвать работы по математическому моделированию процесса нелинейной консолидации грунтов с помощью численного моделирования упругопластического деформирования водонасыщенного грунта под нагрузкой при оттоке жидкости [1], а также исследования по изучению физико-механических свойств

грунтов по известным параметрам структуры их порового пространства [10].

Такие исследования проводятся в МГУ на основе параметров структуры порового пространства по плоским РЭМ-изображениям (2D-модель), а также по трехмерному изображению структуры, получаемому с помощью рентгеновского томографа (3D-модель). При известном минеральном составе грунта упругие константы его твердого минерального матрикса задаются по справочным данным, а деформационные или прочностные характеристики получаются вычислительным методом. В частности, определение вычислительным методом модуля упругости известняка по данным 2D и 3D моделирования показало наилучшую сходимость с экспериментом (при разнице всего в 5-7%) для трехмерного моделирования (рис.3).

Подобные исследования свойств грунтов на основе вычислительных методов позволяют выявить наиболее общие закономерности их изменения и прогнозировать их параметры в различных условиях или в зависимости от различных факторов.

7) Другим важным направлением теоретического грунтоведения является *применение искусственного интеллекта* для решения грунтоведческих задач [4]. В области грунтоведения применение искусственного интеллекта пока ограничено, но в ближайшем будущем может дать наибольший эффект при разработке инженерно-геологических (грунтоведческих) экспертных (интеллектуальных) систем для решения различных инженерно-геологических задач, классифицирования и систематизации

Рис.2. Диаграмма сдвига монодисперсного песка (фракция размером 0,25-0,5 мм), построенная по результатам моделирования в программе PFC

грунтов, оценке инженерно-геологических условий и т.п. [4].

Таким образом, теоретическое грунтоведение является актуальным и перспективным разделом для развития на современном этапе, которое отве-

чает общей тенденции цифровизации инженерной геологии. Именно с его развитием будет связана дальнейшая эволюция грунтоведения как основного научного направления инженерной геологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. Математическое моделирование процесса нелинейной консолидации грунта // Новые идеи и теоретические аспекты инженерной геологии / Труды Международной научной конференции (Москва, МГУ, 4 февраля 2021 г.). Под ред. В.Т. Трофимова и В.А. Королёва — М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. — С. 228-233.
2. Грунтоведение // Под ред. В.Т. Трофимова — 6-е изд., перераб. и дополн. (серия Классический университетский учебник) / Авт.: В.Т. Трофимов, В.А. Королёв, Е.А. Вознесенский и др. — М.: Изд-во МГУ и Наука, 2005. — 1024 с.
3. Исследование упругих и упругопластических свойств дисперсного композита на основе численных экспериментов / С. В. Шешенин, Н. Б. Артамонова, П. Д. Клементьев и др. - Механика композитных материалов. 2021. Т. 57, № 1. — С. 27–44
4. Королёв В. А. О задачах цифровизации и искусственного интеллекта в инженерной геологии // Инженерная геология. 2021. Т. 16, № 1. — С. 10–23.
5. Королев В.А. Методология научных исследований в инженерной геологии / Уч. пособие. — М.: ООО «СамПолиграфист», 2020. — 353 с.
6. Королев В.А., Трофимов В.Т. Инженерная геология: история, методология и номологические основы. — М.: Изд-во КДУ, 2016. — 292 с.
7. Королёв В.А., Шэнжун Ч. Моделирование физико-механических свойств песчано-гравийных грунтовых смесей с помощью программы PFC. — Инженерная геология. 2018. Т. 13, № 1-2. — С. 6–20.
8. Новик И.Б., Мамедов Н.М., Давтян Н.А. Логика научного познания и метод моделирования / Философско-методологические основания системных исследований. — М.: Наука, 1983. С. 156–179
9. Плохотников К.Э. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент: методология и практика. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
10. Применение асимптотического метода осреднения для оценки деформационных свойств грунтов / Орлов Е. А., Артамонова Н. Б., Шешенин С. В., Фролова Ю. В., Кузнецов Р. А. // Новые идеи и теоретические аспекты инженерной геологии / Труды Международной научной конференции (Москва, МГУ, 4 февраля 2021 г.). Под ред. В. Т. Трофимова и В.А. Королёва — М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. — С. 233-238.
11. Ревенко В. В., Савин А. П. Метод конечных элементов в геомеханике: современный взгляд // Численные методы расчетов в практической геотехнике: сборник статей межд. научно-техн. конференции; СПбГАСУ. — СПб., 2012. С. 197-203
12. Сергеев Е.М. Методологические основы грунтоведения // Вопросы инж. геологии и грунтоведения. Вып. 3. — М.: Изд-во Млск. ун-та, 1968. — С. 5-16.
13. Трофимов В.Т. Теоретические аспекты грунтоведения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2003. — 113 с.
14. Трофимов В. Т. Теоретические аспекты инженерной геологии. — М.: Изд-во «Академическая наука» ООО Геомаркетинг, 2019. — 280 с.
15. Фадеев А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике. — М.: Изд-во «Недра», 1987. — 224 с.
16. Шашкин А. Г. Методология численных расчетов и проектирования подземных сооружений в условиях городской застройки на слабых грунтах. // Численные методы расчетов в практической геотехнике: сборник статей межд. научно-техн. конференции; СПбГАСУ. — СПб., 2012. С. 63-70.
17. Шашкин А. Г. Метод конечных элементов в геомеханике: современный взгляд // Там же, с. 76-86.
18. Chong Shi, De-jie Li, Kai-hua Chen, Jia-wen Zhou. Failure mechanism and stability analysis of the Zhenggang Landslide at the Yunnan Province of China using 3D particle flow code simulation. — Journal of Mountain Science, 2016, vol. 13, issue 5, pp. 891-905. DOI:10.1007/s11629-014-3399-0.