ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОКРЫТИЯ ШАРА В ВОЛНОВОДЕ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ТРЕБУЕМОЕ ЗВУКООТРАЖЕНИЕ

Пешков Никита Юрьевич

аспирант,

Россия, Тула,

Тульский государственный университет,

Скобельцын Сергей Алексеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент,

Россия, Тула,

Тульский государственный университет.

DETERMINATION OF THE INHOMOGENEITY PARAMETERS OF A SPHERE'S COVER ENSURING REQUIRED SOUND REFLECTION IN A WAVEGUIDE

Peshkov Nikita Yurievich,

postgraduate,

Russia, Tula,

Tula State University,

Skobel'syn Sergey Alekseevich,

candidate of physico-mathematical sciences, docent,

Russia, Tula,

Tula State University.

Аннотация. Разработан численно-аналитический метод идентификации параметров неоднородности материала упругого покрытия шара, находящегося в цилиндрическом волноводе, позволяющих обеспечить минимальное (максимальное) среднее давление в рассеянном поле сферической звуковой волны, излучаемой точечным источником, в дисковой области наблюдения. Шар предполагается либо абсолютно жестким (неподвижным), либо заполненным однородным упругим материалом. Проведена проверка схемы определения экстремальных характеристик неоднородности покрытия и оценено влияние параметров запуска алгоритма решения на точность их идентификации в ходе численного эксперимента. В решении задачи применяются метод конечных элементов (МКЭ) и алгоритм Хука – Дживса.

Abstract. The numerical-analytical method of identifying the inhomogeneity parameters of a material of a sphere's elastic cover, which allow to ensure minimal (maximal) average pressure in the scattered field of a spherical sound wave, which is radiated by a monopole source, within the disk observation domain in a cylindrical waveguide, has been developed. The sphere is assumed to be either absolutely rigid (moveless) or filled with an homogeneous elastic material. Verification of the scheme for determining the cover's extremal inhomogeneity characteristics has been carried out and influence of the solution algorithm's launch parameters on their identification accuracy during the numerical experiment has been evaluated. The finite element method (FEM) and the Hooke-Jeeves algorithm are used in the problem solving.

Ключевые слова: однородный упругий (абсолютно жесткий неподвижный) шар, параметры неоднородности упругого покрытия, цилиндрический волновод, рассеянное поле, потенциал смещений, экстремальное среднее давление, алгоритм Хука – Дживса, метод конечных элементов, функция формы, излучающая граница

Key words: homogeneous elastic (absolutely rigid and moveless) sphere, elastic cover's inhomogeneity parameters, cylindrical waveguide, scattered field, displacement potential, extremal average pressure, Hooke-Jeeves algorithm, finite element method, shape function, radiation boundary

Введение

Математическому моделированию неоднородных упругих покрытий однородных упругих тел различной формы, позволяющих обеспечить требуемое звукоотражение, посвящен ряд работ. В работе [1] решена задача поиска параметров неоднородности внешнего слоя упругого эллипсоида, находящегося в полупространстве вблизи его идеальной поверхности, способствующих минимизации рассеяния плоской звуковой волны. В [2] проведено моделирование неоднородного покрытия упругого шара со сферической полостью, обеспечивающего оптимальные звукоотражающие свойства. В [3] определены законы неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, способствующие минимизации отражения плоской звуковой волны. В [4]

осуществлено моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра в плоских волноводах с идеальными границами, обеспечивающего наименьшее звукоотражение в заданном сечении волновода.

В данной работе представлено решение задачи определения параметров материала упругого радиально-неоднородного покрытия шара в цилиндрическом волноводе, обеспечивающих минимальное (максимальное) среднее давление в рассеянном поле сферической звуковой волны, создаваемой точечным источником, по дисковой области наблюдения, расположенной в нормальном сечении волновода.

Математическая постановка

В трехмерном пространстве рассматривается цилиндрический волновод бесконечной длины T радиуса R_0 с центром O и осью Q_1Q_2 , заполненный идеальной жидкостью с плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . Боковые стенки волновода являются абсолютно жесткими.

В волноводе находится упругий объект E , внутренняя часть которого – шар радиуса R_1 с центром O_1 , лежащим на оси Q_1Q_2 и смещенным от точки O на расстояние d_1 . Предполагается, что шар может быть как абсолютно жестким (неподвижным), так и заполненным однородным упругим материалом с известными физическими характеристиками: плотностью ρ_1 , модулем Юнга E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 .

На поверхность шара нанесен радиально-неоднородный изотропный упругий слой толщины h . Материал слоя характеризуется коэффициентом Пуассона ν_1 , а также плотностью ρ_2 и модулем Юнга E_2 , которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями расстояния r_2 от центра шара

$$\rho_2(r_2) = \rho_1 \cdot [1 + a \cdot w(r_2)], E_2(r_2) = E_1 \cdot [1 + b \cdot w(r_2)],$$

где a и b – константные коэффициенты; $w(r_2) = \frac{(r_2 - R_1)}{h} - \frac{1}{2}$.

Из акустического пространства волновода на тело падает сферическая монохроматическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, расположенным на оси Q_1Q_2 . Полагается, что потенциал смещений частиц жидкости в ней имеет вид

$$\Psi_p = \frac{e^{i(k_0 r_s - \omega t)}}{r_s}, \quad (1)$$

где k_0 – волновое число падающей волны ($k_0 = \frac{\omega}{c_0}$); ω – круговая частота; t – время; $r_s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{s_0}|$ – расстояние от источника до текущей точки ($\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки пространства, $\mathbf{r}_{s_0}$ – центр источника).

В результате взаимодействия с препятствием волна искажается и образуется рассеянная волна, в которой потенциал смещений частиц жидкой среды обозначим через Ψ_s .

Требуется определить величины a и b из интервалов $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$, обеспечивающие минимальное (максимальное) среднее давление в рассеянном поле в области наблюдения V . V представляет собой плоский диск, размещенный в нормальном сечении волновода, радиуса R_2 с центром O_2 , смещенным от точки O на расстояние d_2 .

Поставленная задача является нелинейной задачей оптимизации и формально ее можно записать в следующем виде

$$\overline{\Psi_s}(\xi) \xrightarrow{N \in V; \xi \in [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]} \text{EXTR}, \quad (2)$$

где N – произвольная точка трехмерного пространства; $\xi = \langle a, b \rangle$ – некоторый набор значений параметров неоднородности.

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1.

упругой средой ($x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R_1^2$); Ω_2 – неоднородный слой упругого препятствия $((x'_1, y'_1, z'_1) = (1 + \frac{q}{R_1})(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \in \Gamma_1, 0 \leq q \leq h)$.

Рис. 2. Введение систем координат

Поскольку излучаемая точечным источником сферическая волна является гармонической, то в установившейся фазе колебаний рассматриваемые далее характеристики движения будут иметь зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$ как и в падающей волне (см. 1). Поэтому, для удобства записи эту зависимость будем опускать.

В области Ω_0 движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей Ψ_p и рассеянной Ψ_s волнах. Смещение $\mathbf{u}_0$ и давление p_0 в области Ω_0 определяются через эти потенциалы так [5]

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad}(\Psi_0), p_0 = \rho_0 \omega^2 \Psi_0, \quad (4)$$

где $\Psi_0 = \Psi_p + \Psi_s$ – потенциал смещений в суммарном акустическом поле в области Ω_0 . При этом потенциал Ψ_s должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [5]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0 \quad (5)$$

и условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi_s = o\left(\frac{1}{r}\right), \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right) \right] = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (6)$$

где $r = |\mathbf{r}|$.

Предполагается, что движение частиц в однородной (в случае деформируемости) и неоднородной составляющих препятствия подчиняется законам линейной теории упругости [6]. Обозначим вектор смещений и тензор напряжений в области Ω_1 через $\mathbf{u}_1$ и σ_1 соответственно. Тогда гармонические колебания частиц в однородной части тела E описываются уравнениями движения

$$\text{div}(\sigma_1) = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_1, \quad (7)$$

где $\text{div}(\sigma_1)$ – первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений σ_1 .

Если же внутреннюю составляющую препятствия рассматривать как неподвижный абсолютно жесткий шар, то имеем $\mathbf{u}_1 \equiv 0$.

Аналогично (7), в неоднородном слое препятствия уравнения движения будут иметь вид

$$\text{div}(\sigma_2) = -\rho_2 \omega^2 \mathbf{u}_2, \quad (8)$$

где $\mathbf{u}_2$ и σ_2 – вектор смещений и тензор напряжений в Ω_2 .

Тензор напряжений выражается через компоненты вектора смещений посредством закона Гука, так что уравнения (7), (8) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

На поверхности Γ_1 соединения неоднородной и однородной частей тела E в зависимости от учета деформируемости последней должны выполняться условия

$$\mathbf{u}_1|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_2, \sigma_{1nn}|_{\Gamma_1} = \sigma_{2nn}, \sigma_{1n\tau}|_{\Gamma_1} = \sigma_{2n\tau} \quad (9.A)$$

или

$$\mathbf{u}_2|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}, \quad (9.B)$$

где σ_{knl} – компоненты скалярных произведений $\mathbf{n} \cdot \sigma_k$ ($k = 1, 2, l = n, \tau$); $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Γ_1 ; τ – индекс, определяющий два касательных к Γ_1 направления. Случай а) соответствует варианту упругого шара, а б) – абсолютно жесткого.

На внешней поверхности тела – Γ_2 – поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещений и тензора напряжений

$$\mathbf{u}_{1n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_{0n}, \sigma_{1nn}|_{\Gamma_2} = -p_0, \sigma_{1n\tau}|_{\Gamma_2} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

где n – индекс, соответствующий проекции на нормаль (индекс τ на касательные) уже к поверхности Γ_2 . Величины u_{0n} и p_0 выражаются через потенциал Ψ_0 в соответствии с (4).

Наконец, на границе области $\Omega_0 - \tilde{\Gamma}_0$ – боковых стенках волновода должно выполняться условие

$$\mathbf{u}_{0n}|_{\tilde{\Gamma}_0} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Описание алгоритма решения

Для решения задачи (2) идентификации параметров неоднородности ξ_{extr} внешнего упругого покрытия шара, при которых среднее значение потенциала смещений в рассеянном поле сферической звуковой волны Ψ_s в дисковой области наблюдения V достигает экстремального значения (обратной задачи дифракции), применим метод Хука – Дживса [7]. Этот метод был разработан в 1961 году, но до сих пор является весьма эффективным и оригинальным. Процесс состоит из последовательности шагов **исследующего поиска** вокруг опорного вектора, за которым в случае успеха следует **поиск по образцу**. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 3.1.

Рис. 3.1. Блок-схема алгоритма Хука – Дживса

Для получения сведений о локальном поведении функции $\overline{\Psi}_s(\xi)$ в окрестности некоторого опорного вектора ξ_{origin} проводится исследующий поиск. Эти сведения будут использоваться для нахождения подходящего направления поиска по образцу, с помощью которого можно надеяться достичь большего убывания (возрастания) функции $\overline{\Psi}_s(\xi)$. Блок-схема этой процедуры представлена на рис. 3.2.

Рис. 3.2. Блок-схема исследующего поиска

При поиске по образцу используется информация, полученная в процессе исследующего поиска, и минимизация (максимизация) функции $\overline{\Psi_s}(\xi)$ завершается поиском в направлении, заданном образцом. Блок-схема этой процедуры представлена на рис. 3.3.

Процедура вычисления значения функции $\overline{\Psi_s}(\xi)$ в некотором векторе ξ_{custom} состоит из следующих шагов:

1) Численное решение прямой задачи дифракции (системы уравнений (5), (7), (8) с граничными условиями (9), (10), (11) и условиями излучения (6)) для параметров ξ_{custom} , используя МКЭ. В итоге получаем значения потенциала Ψ_s в узлах КЭ сетки области $\Omega_0 - \psi_{sj}$.

2) Аналитическое вычисление $\overline{\Psi_s}$ по области Ω'_0 через узловые значения ψ_{sj} .

Рис. 3.3. Блок-схема поиска по образцу

Получение аналитической части решения

Для аналитического вычисления $\overline{\Psi_s}$ по области Ω'_0 , используя результат численного решения прямой задачи дифракции, осуществим следующее преобразование геометрической схемы задачи (2): введем квадратную область $\hat{\Omega}_0''$ ($x_2 = 0, -R_2 \leq y_2, z_2 \leq R_2$) в нормальном сечении волновода T так, что Ω'_0 окажется вписанной в $\hat{\Omega}_0''$. В итоге при формировании тетраэдральной конечно-элементной сетки в процессе решения задачи (5), (7), (8) области Ω'_0 и $\Omega_0'' = \hat{\Omega}_0'' \setminus \Omega'_0$ будут триангулированы. КЭ сетка совокупности областей $\Omega'_0 \cup \Omega_0''$ представлена на рис. 4.1.

Рис. 4.1. Схема разбиения $\Omega'_0 \cup \Omega''_0$ на конечные элементы

До конца раздела условимся перенести обозначения с не дискретизированных областей на дискретизированные, а для не триангулированной области наблюдения использовать обозначение V .

Выражение для среднего значения функции $\Psi_s(\mathbf{r})$ в области V имеет вид

$$\overline{\Psi_s} = \frac{|\int_V \Psi_s(\mathbf{r}) dV|}{S_V} = \frac{|\int_{\Omega'_0} \Psi_s(\mathbf{r}) d\Omega'_0 + \int_{\Omega''_0 \cap V} \Psi_s(\mathbf{r}) d[\Omega''_0 \cap V]|}{S_V}, \quad (12)$$

где $S_V = \pi R_2^2$ – площадь V .

Согласно технологии МКЭ [8] в каждом из элементов Ω'_{0i} и Ω''_{0j} областей Ω'_0 и Ω''_0 соответственно ($i = 1, I$ и $j = 1, J$, где I и J – количество элементов в областях Ω'_0, Ω''_0) потенциал смещений Ψ_s будет представлен так

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^3 N_l^m(\mathbf{r}) \cdot \psi_{s_l}^m, \\ N_l^m(\mathbf{r}) = \alpha_{m,l}^1 + \alpha_{m,l}^2 \cdot y_2 + \alpha_{m,l}^3 \cdot z_2, \\ \begin{pmatrix} \alpha_{m,1}^1 & \alpha_{m,1}^2 & \alpha_{m,1}^3 \\ \alpha_{m,2}^1 & \alpha_{m,2}^2 & \alpha_{m,2}^3 \\ \alpha_{m,3}^1 & \alpha_{m,3}^2 & \alpha_{m,3}^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2S_{\Omega'_0 \cup \Omega''_0}} \begin{pmatrix} [\hat{\alpha}_{2,3}^m] \\ [\hat{\alpha}_{3,1}^m] \\ [\hat{\alpha}_{1,2}^m] \end{pmatrix}, S_{\Omega'_0 \cup \Omega''_0}^m = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & y_2^{m,1} & z_2^{m,1} \\ 1 & y_2^{m,2} & z_2^{m,2} \\ 1 & y_2^{m,3} & z_2^{m,3} \end{vmatrix}, \\ [\hat{\alpha}_{l_1, l_2}^m] = \begin{pmatrix} y_2^{m, l_1} & y_2^{m, l_2} \\ z_2^{m, l_1} & z_2^{m, l_2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} z_2^{m, l_1} - z_2^{m, l_2} & y_2^{m, l_2} - y_2^{m, l_1} \end{vmatrix}, \end{array} \right. \quad (13)$$

где m и $S_{\Omega'_0 \cup \Omega''_0}^m$ – глобальный номер элемента в $\Omega'_0 \cup \Omega''_0$ и его площадь; l – локальный номер узла в m -м элементе; $N_l^m, \psi_{s_l}^m$ и $(y_2^{m, l}, z_2^{m, l})$ – функция формы, значение потенциала Ψ_s и пара координат (y_2, z_2) для l -го узла m -го элемента;

Подставляя выражение (13) в формулу (12), приведем ее к следующему виду

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\Psi_s} = \frac{|\sum_{i=1}^3 [\sum_{l=1}^I (N_l^{m_i} \cdot \psi_{s_l}^{m_i}) + \sum_{k=1}^K (N_l^{m_{jk}} \cdot \psi_{s_l}^{m_{jk}})]|}{S_V}, \\ N_l^{m_i} = \int_{\Omega'_{0i}} N_l^{m_i}(\mathbf{r}) d\Omega'_{0i}, \\ N_l^{m_{jk}} = \int_{\Omega''_{0jk} \cap V} N_l^{m_{jk}}(\mathbf{r}) d[\Omega''_{0jk} \cap V], \end{array} \right. \quad (14)$$

где K – количество отрезков ломаной границы Γ_0 области Ω'_0 ; m_i и m_{jk} – глобальные номера i -го элемента из Ω'_0 и j -го элемента из Ω''_0 , смежного с k -м участком границы Γ_0 (Γ_{0k}).

Для вычисления $N_l^{m_i}$ из (14) осуществим биективное отображение области интегрирования Ω'_{0i} в область интегрирования θ , изображенную на рис. 4.2, путем введения следующего преобразования координат y_2, z_2

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{y_2}] \\ [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{z_2}] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_\Theta \\ z_\Theta \end{pmatrix} = [\varepsilon_{m_i}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y_\Theta \\ z_\Theta \end{pmatrix}, \\ [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{axis}] = (axis^{m_i,1} \quad axis^{m_i,2} - axis^{m_i,1} \quad axis^{m_i,3} - axis^{m_i,1}), \end{cases} \quad (15)$$

где $axis$ – обозначение оси для подстановки соответствующих координат.

Рис. 4.2. Образ области интегрирования Ω'_{0_i}

Используя тождество (15) и правило замены переменных в кратном интеграле, получим следующее значение интеграла $H_l^{m_i}$

$$H_l^{m_i} = \left| \frac{\partial(y_2, z_2)}{\partial(y_\Theta, z_\Theta)} \right| \cdot (\alpha_{m_i, l}^1 \quad \alpha_{m_i, l}^2 \quad \alpha_{m_i, l}^3) \cdot [\varepsilon_{m_i}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T,$$

где $\left| \frac{\partial(y_2, z_2)}{\partial(y_\Theta, z_\Theta)} \right| = [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{y_2}]_2 \cdot [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{z_2}]_3 - [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{y_2}]_3 \cdot [\hat{\varepsilon}_{m_i}^{z_2}]_2$ – определитель матрицы Якоби отображения $(y_2, z_2) \rightarrow (y_\Theta, z_\Theta)$.

Для вычисления $H_l^{m_{j_k}}$ из (14) запишем выражение интеграла в полярных координатах (r, φ) (рис. 4.3), связанных с декартовыми (y_2, z_2) :

$$H_l^{m_{j_k}} = \begin{pmatrix} \alpha_{m_{j_k}, l}^1 \\ \alpha_{m_{j_k}, l}^2 \\ \alpha_{m_{j_k}, l}^3 \end{pmatrix}^T \cdot \int_{\varphi_{0,k,1}}^{\varphi_{0,k,2}} \int_{\frac{\beta_2^k}{\sin \varphi - \beta_1^k \cos \varphi}}^{R_2} \left| \frac{\partial(y_2, z_2)}{\partial(r, \varphi)} \right| \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} dr d\varphi, \quad (16)$$

где $\langle \beta_1^k, \beta_2^k \rangle = \frac{\begin{vmatrix} m_{j_k, l_{k,1}}^{z_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{z_2} & m_{j_k, l_{k,1}}^{y_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{y_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{z_2} & m_{j_k, l_{k,1}}^{z_2} \\ m_{j_k, l_{k,1}}^{y_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{y_2} & m_{j_k, l_{k,1}}^{z_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{z_2} & m_{j_k, l_{k,2}}^{y_2} & m_{j_k, l_{k,1}}^{y_2} \end{vmatrix}}{m_{j_k, l_{k,1}}^{y_2} - m_{j_k, l_{k,2}}^{y_2}}$ – коэффициенты в уравнении

$z_2 = \beta_1^k y_2 + \beta_2^k$ k -го участка границы $\tilde{\Gamma}_0$ ($l_{k,1}$ и $l_{k,2}$ – локальные номера узлов m_{j_k} -го элемента с полярными координатами $(R_2, \varphi_{0,k,1})$ и $(R_2, \varphi_{0,k,2})$ соответственно); $\left| \frac{\partial(y_2, z_2)}{\partial(r, \varphi)} \right| = r$ – определитель матрицы Якоби отображения $(y_2, z_2) \rightarrow (r, \varphi)$.

Рис. 4.3 Введение полярных координат (r, φ)

Преобразуя (16), получим следующее значение интеграла $H_l^{m_{jk}}$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{H}_l^{m_{j_k}} = \left[\gamma_7^k \right] \cdot \left(\tilde{\mathbf{H}}_l^{m_{j_k}}(\varphi) \right) \Big|_{\varphi_{0k,1}}^{\varphi_{0k,2}}, \\
\tilde{\mathbf{H}}_l^{m_{j_k}}(\varphi) = \gamma_3^k \cdot \left(\left[\gamma_6^k \right] \circ \left[\delta_{2\varphi}^k \right] \right) + \delta_{4\varphi}^k \cdot \delta_{5\varphi}^k \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{3\varphi}^k \\ \gamma_1^k \end{pmatrix} + \gamma_2^k \cdot \delta_{1\varphi}^k \begin{pmatrix} \delta_{4\varphi}^k \\ 0 \\ \delta_{5\varphi}^k \end{pmatrix}, \\
\left\langle \gamma_1^k, \gamma_2^k, \gamma_3^k, \gamma_4^k \right\rangle = \left\langle \frac{\beta_1^k}{2}, \frac{\beta_2^k}{\beta_1^k}, R_2^2, \frac{\beta_2^k}{1 + (\beta_1^k)^2} \right\rangle, \\
\left\langle \left[\gamma_5^k \right], \left[\gamma_6^k \right], \left[\gamma_7^k \right] \right\rangle = \left\langle \left(1 \quad \beta_1^k \right), R_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{6} \left(3\alpha_{m_{j_k}, l}^1 \quad \alpha_{m_{j_k}, l}^2 \quad 2\alpha_{m_{j_k}, l}^3 \right) \right\rangle, \\
\left\langle \delta_{1\varphi}^k, \delta_{3\varphi}^k, \delta_{4\varphi}^k, \delta_{5\varphi}^k \right\rangle = \left\langle \sin \varphi, \left[\gamma_5^k \right] \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}, \frac{\beta_2^k}{\left[\gamma_5^k \right] \cdot \left[\delta_{2\varphi}^k \right]}, \gamma_4^k \cdot \delta_{4\varphi}^k \right\rangle, \\
\left[\delta_{2\varphi}^k \right] = \begin{pmatrix} \delta_{1\varphi}^k & -\cos \varphi \end{pmatrix}^T,
\end{array} \right.$$

где $\circ$ – оператор поэлементного умножения матриц.

Построение КЭ модели участка цилиндрического волновода

Численное решение прямой задачи дифракции с использованием МКЭ основано на подходе [9, 10], подразумевающим искусственное ограничение бесконечной области цилиндрического волновода с помощью условия, моделирующего излучающие границы. Это условие позволяет моделировать излучение вводимой границей области Ω_0 сферической волны в окружающую среду. Участки границы с таким условием характеризуются минимальным, направленным внутрь области волновода T , отражением звукового поля Ψ_0 . Граничное условие, имитирующее излучающую границу, имеет вид

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial n} + \left(ik_0 + \frac{1}{r_s} \right) \Psi_s - \frac{r_s \Delta_{||} \Psi_s}{2(1 + ik_0 r_s)} = 0, \quad (17)$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе; $\Delta_{||}$ – оператор Лапласа в касательной плоскости для текущей точки границы.

Усечем бесконечную область Ω_0 , вводя в рассмотрение две торцевые излучающие границы $\tilde{\Gamma}_0$, расположенные перпендикулярно оси цилиндрического волновода $Q_1 Q_2$ на расстояниях OT_1 и OT_2 от начала системы координат $Oxyz$, так, чтобы внутри поверхности $\Gamma_0 = \tilde{\Gamma}_0 \cup \hat{\Gamma}_0$ оказалось препятствие E и источник звуковых колебаний. При этом минимальное расстояние от упругого тела до границ $\tilde{\Gamma}_0$ усеченной области жидкости Ω_0 должно иметь порядок характерного размера упругого тела $R = R_1 + h$.

Геометрическая схема задачи (5), (7), (8), модифицированная добавлением излучающих границ, представлена на рис. 5.1.

Рис. 5.1. Добавление излучающих границ $\hat{\Gamma}_0$

В скорректированной постановке прямой задачи дифракции условия излучения (6) заменяются граничным условием (17).

Произведем дискретизацию совокупности областей жидкой и упругих сред $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ посредством разбиения их на конечные элементы в форме тетраэдров. Иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 5.2.

Рис. 5.2. Схема разбиения Ω на конечные элементы

Все неизвестные функции в Ω представляются в виде линейных комбинаций функций формы узлов [11]. В частности для потенциала Ψ_s можно записать

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\tilde{L}} N_l(\mathbf{r}) \psi_{s_l}, \quad (18)$$

где ψ_{s_l} – узловые значения потенциала в области Ω ; $N_l(\mathbf{r})$ – функции формы конечно-элементной модели; $\tilde{L}$ – количество узлов. Будем считать, что множество значений $\tilde{l} = \overline{1, \tilde{L}}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области Ω , а в узлах, не относящихся к $\underline{\Omega}_0$, положим $\psi_{s_l} \equiv 0$.

В форме, аналогичной (18), выразим и смещение в упругом препятствии (в областях Ω_1 и Ω_2)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{l=1}^{\tilde{L}} N_l(\mathbf{r}) \mathbf{U}_l,$$

где $\mathbf{U}_l$ – узловые значения вектора смещений в упругом препятствии. Здесь $\mathbf{u}$ рассматривается как общее обозначение для смещений $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

В результате граничные условия (9), (10), (11) и (17) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций Ψ_s , $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ из ограниченной области Ω . После этого можно решать краевую задачу для уравнений (5), (7), (8) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [11]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций ψ_{s_l} , $\mathbf{U}_l$.

Проведение численного моделирования

Представленная модель решения задачи была использована для численных исследований определения параметров неоднородности ξ_{extr} , при которых $\overline{\Psi}_s$ в области V достигает экстремального значения, в математическом пакете **MATLAB R2018b** [12].

Предполагалось, что цилиндрический волновод T имеет радиус $R_0 = \left(\frac{4}{3}\right)$ м, а излучающие границы $\hat{\Gamma}_0$ расположены на расстояниях $OT_1 = OT_2 = \left(\frac{17}{6}\right)$ м от его центра O . В качестве идеальной среды, заполняющей область $\underline{\Omega}_0$, использовалась жидкость с плотностью $\rho_0 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ и скоростью звука $c_0 = 1485 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Подразумевалось, что область наблюдения V имеет радиус $R_2 = \left(\frac{1}{3}\right)$ м, а ее центр O_2 смещен от центра системы координат $Oxuz$ на вектор $\mathbf{d}_2$, имеющий координаты $\mathbf{d}_2^1 = \left(-\left(\frac{1}{3}\right), 0, 0\right)$ м или $\mathbf{d}_2^2 = \left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$ м.

Рассматривалось упругое препятствие E , имеющее следующие фиксированные геометрические характеристики: $R_1 = 0,5\text{м}$, $h = \left(\frac{1}{6}\right)\text{м}$, смещение $\mathbf{d}_1 = \left\langle \left(\frac{7}{6}\right), 0, 0 \right\rangle\text{м}$ центра O_1 от точки O . Для деформируемого шара плотность и модули упругости в области Ω_1 задавались так: $\rho_1 = 1760 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $E_1 = 2,9 \cdot 10^9 \text{Па}$ и $\nu_1 = \frac{77}{200}$.

Величины a и b принимали значения из интервала $\left[-\left(\frac{3}{4}\right), \frac{3}{4}\right]$.

Частота падающей волны выбиралась такой, что $k_0 R = 4,4$, а радиус-вектор центра волнового источника $\mathbf{r}_{s_0}$ имел глобальные декартовы координаты $\left(-\left(\frac{11}{6}\right), 0, 0\right)\text{м}$.

Параметры запуска алгоритма Хука – Дживса предполагались следующими:

$$\begin{cases} \zeta = \frac{3}{32}, \delta = \frac{1}{1000}, \eta = \frac{13}{8}; \\ v = 2. \end{cases}$$

Визуализации исполнения алгоритма решения представлены на рис. 6.1, 6.2.

а) Обеспечение минимальности $\overline{\Psi_s}$

б) Обеспечение максимальности $\overline{\Psi}_s$

Рис. 6.1. Визуализация итераций решения при упругом шаре и $d_2 = d_2^1$

а) Обеспечение минимальности $\overline{\Psi}_s$

б) Обеспечение максимальности $\overline{\Psi}_s$

Рис. 6.2. Визуализация итераций решения при абсолютно жестком шаре и $d_2 = d_2^2$

На рис. 6.1, 6.2 крестовыми маркерами отмечены экстремальные параметры неоднородности $(a_{\text{extr}_j}, b_{\text{extr}_j})$ внешнего упругого покрытия шара, полученные на промежуточных итерациях алгоритма Хука – Дживса. По мере приближения к окончанию решения обратной задачи дифракции сферической звуковой волны (2) маркеры пропорционально увеличиваются в размерах.

Также построены дискретные зависимости промежуточного экстремального значения $\overline{\Psi}_s$ в области $V - \overline{\Psi}_s^{\text{extr}}(j)$ от номера j итерации алгоритма Хука – Дживса (рис. 7.1, 7.2).

а) Обеспечение минимальности среднего давления

б) Обеспечение максимальности среднего давления

Рис. 7.1. Зависимости $\bar{\Psi}_s^{extr}(j)$ при упругом шаре и $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2^1$

а) Обеспечение минимальности среднего давления

б) Обеспечение максимальности среднего давления

Рис. 7.2. Зависимости $\Psi_s^{extr}(j)$ при абсолютно жестком шаре и $d_2 = d_2^2$

Рис. 6.1, 6.2, 7.1, 7.2 наглядно демонстрируют, как учет деформируемости шара, а также положение области наблюдения V влияют на скорость и характер сходимости алгоритма Хука – Дживса.

Стоит отметить, что во всех случаях проведения численного моделирования точка с координатами (a_{extr}, b_{extr}) находится вблизи границы квадратной области $[a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$. Было установлено, что положение точки (a_{extr}, b_{extr}) по отношению к этой границе варьируется в зависимости от значений механических характеристик материала шара.

Заключение

Анализ результатов показывает, что предложенный алгоритм решения может быть использован для идентификации экстремальных параметров неоднородности $\langle a_{extr}, b_{extr} \rangle$ упругого препятствия E с удовлетворительной точностью.

Необходимо подчеркнуть, что для повышения эффективности работы алгоритма Хука – Дживса следует особое внимание уделить подбору параметров запуска ζ, δ, η, ν . В процессе численного решения задачи (2) существенное влияние на точность определения конечного экстремального набора величин $\langle a_{extr}, b_{extr} \rangle$ оказывало изменение шага ζ по параметру неоднородности и его делителя η .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

Список литературы

1. Скобельцын С.А. Минимизация рассеяния звука сфероидом вблизи идеальной поверхности выбором параметров внешнего слоя // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 421 – 437.
2. Толоконников Л.А. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого шара со сферической полостью и оптимальными звукоотражающими свойствами // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 3. С. 137 – 153.
3. Толоконников Л.А. Определение законов неоднородности покрытия упругого цилиндра с цилиндрической полостью, обеспечивающих минимальное звукоотражение // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. Вып. 4. С. 67 – 81.
4. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. Математическое моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра, находящегося в плоском волноводе // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. Вып. 9. С. 315 – 323.
5. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Хук Р., Дживс Т.А. Прямой поиск решения для числовых и статических проблем. 1961. 212 – 219 с.
8. Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.

9. Скобелъцын С.А. Решение задач акустики с использованием метода конечных элементов: монография. Тула: ТулГУ, 2018. 224 с.
10. Acoustics Module User's Guide. Stockholm: COMSOL AB, 2018. 698 p.
11. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.
12. MATLAB Programming Fundamentals. MA.: The MathWorks, Inc., 2018. 1418 p.

References

1. Skobel'tsyn S.A. Minimizing the scattering of sound by a spheroid near an ideal surface by selecting parameters of the outer layer. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. 2018. No. 9, pp. 421 – 437.
2. Tolokonnikov L.A. Mathematical modelling of the inhomogeneous covering of an elastic sphere with the spherical cavity and optimum sound reflexion. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. 2017. No. 3, pp. 137 – 153.
3. Tolokonnikov L.A. Determination of the inhomogeneity laws for an covering of an elastic cylinder with cylindrical cavity, providing minimum sound reflexion. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. 2017. No. 4, pp. 67 – 81.
4. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. Mathematical modelling of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder in a plane waveguide. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*. 2018. No. 9, pp. 315 – 323.
5. Isakov M.A. *Obshchaya akustika*. M.: Nauka, 1973. 496 P.
6. Novackij V. *Teoriya uprugosti*. M.: Mir, 1975. 872 P.
7. Hooke R., Jeeves T.A. "Direct search" solution of numerical and statistical problems. 1961. 212 – 219 P.
8. Segerlind L.J. *Applied finite element analysis*. M.: Mir, 1979. 392 P.
9. Skobel'tsyn S.A. Solving of acoustic problems by means finite element analysis: monography. Tula: TSU, 2018. 224 P.
10. Acoustics Module User's Guide. Stockholm: COMSOL AB, 2018. 698 p.
11. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.
12. MATLAB Programming Fundamentals. MA.: The MathWorks, Inc., 2018. 1418 p.