ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА СОДЕРЖАЩАЯ ВТОРЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Садыгов Мисрадин Аллахверди оглы
доктор физико-математических наук, профессор
Бакинский Государственный Университет

VARIATION PROBLEM CONTAINING SECOND DERIVATIVES OF UNKNOWN FUNCTIONS

Sadigov Misraddin Allahverdi oglu
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Baku State University

Аннотация. В работе изучены свойства субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве типа абсолютно непрерывных функций. В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций. С помощью введенного автором субдифференциала рассмотрена невыпуклая обобщенная вариационная задача, содержащая вторые производные неизвестных функций, и получено необходимое условие экстремума.

Abstract. The property subdifferential of an integral and terminal functional in a space of the type of absolutely continuous functions is studied. Necessary and sufficient conditions for an extremum for a variational problem containing the second derivatives of unknown functions are obtained. With the help of the subdifferential introduced by the author, a nonconvex generalized variational problem containing the second derivatives of unknown functions is considered, and the necessary condition for an extremum is obtained.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицева функция, субдифференциал.

Key words: necessary condition, Lipschitz function, subdifferential.

Введение

Используя вид субдифференциала интегрального и терминального функционала в пространстве типа абсолютно непрерывных функций, (см. также [1, с.263-340], [2, с.82-106]) и теорию двойственности в задачах выпуклой оптимизации, в работе исследуется обобщенная выпуклая вариационная задача, которая содержит вторую производную неизвестной функции. Хотя выпуклые вариационные задачи изучены разными авторами, но такие задачи не применимы к выпуклым экстремальным задачам для включений.

Результаты работы развивают некоторые результаты в [3], где получены необходимые и достаточные условия минимума для вариационной задачи, содержащей m -производные неизвестные функции.

В данной работе получено необходимое и достаточное условие экстремума для обобщенной вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций. Используя субдифференциал, введенный автором (см.[1],[2]), для невыпуклой вариационной задачи, содержащей вторые производные неизвестных функций получено необходимое условие экстремума.

1. О субдифференцируемости интегрального функционала

Всякая функция (со значениями из $[-\infty, +\infty]$), определенная на $S \times R^n$, где S произвольное пространство с конечной положительной мерой, называется интегрантом. Интегрант $f(s, x)$ определенный на $S \times R^n$ называется (см.[4, с.344]) измеримым (соответственно нормальным, выпуклым и т.д.), если многозначное отображение $s \rightarrow \text{epf}_s = \{(x, \alpha) \in R^n \times R : \alpha \geq f(s, x)\}$ измеримо ($s \rightarrow \text{epf}_s$ измеримо и epf_s замкнутое множество, epf_s выпукло и т.д.). Если f нормальный интегрант на $S \times R^n$, то для всякого измеримого отображения $x(s)$ из S в R^n функция $f(s, x(s))$ измерима (см.[4], предложение 8.1.8). Если f измеримый интегрант на $S \times R^n$ и почти при каждом s функция f_s^* собственная, то f^* нормальный выпуклый интегрант на $S \times R^n$. Если f нормальный интегрант на $S \times R^n$ и F многозначное

нормальное (т.е. измеримое и замкнутозначное) отображение из S в R^n , то

$$h(s, x) = \begin{cases} f(s, x), & \text{если } x \in F(s), \\ \infty, & \text{если } x \notin F(s), \end{cases}$$

нормальный интеграл на $S \times R^n$ (см.[4]). Обозначим $R_\infty = R \cup \{+\infty\}$.

Символом $W_{p,2}^n[t_0, T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных вместе со своими производными первого порядка функций из $[t_0, T]$ в R^n вторая производная, которых принадлежит $L_p^n[t_0, T]$, где $1 \leq p < \infty$. Норма в $W_{p,2}^n[t_0, T]$ может быть задана разными эквивалентными способами. Например

$$\|x(\cdot)\|_{W_{p,2}^n} = |x(t_0)| + |\dot{x}(t_0)| \left(\int_{t_0}^T |\ddot{x}(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \text{или} \quad \|x(\cdot)\|_2 = \max_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)| + \max_{t_0 \leq t \leq T} |\dot{x}(t)| + \left(\int_{t_0}^T |\ddot{x}(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Всякий линейный непрерывный функционал z^* на пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$, $1 \leq p < \infty$, можно единственным образом представить в виде

$$z^*(x) = (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|v(t))dt,$$

где $a_0, a_1 \in R^n$, $v(\cdot) \in L_{p'}^n[t_0, T]$, $pp' = p + p'$. Функционал $z^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ в дальнейшем обозначается символом $(a_0, a_1, v(\cdot))$ (см.[4, с.32]).

Пусть g - нормальный интеграл на $[t_0, T] \times R^n \times R^n$. Рассмотрим функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), \dot{x}(t))dt, \quad x \in W_{p,2}^n[t_0, T].$$

Субградиентами J в точке $\bar{x} \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ являются по определению элементы $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ для которых

$$J(x) - J(\bar{x}) \geq x^*(x - \bar{x})$$

при всех $x \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ или, что равносильно,

$$J^*(x^*) + J(\bar{x}) = x^*(\bar{x}).$$

Множество всех таких субградиентов обозначается через $\partial J(\bar{x})$ и называется субдифференциалом функционала J в точке $\bar{x}$.

В этом пункте устанавливается связь между $\partial J(\bar{x})$ и $\partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$.

Лемма 1.1. Пусть $g: [t_0, T] \times R^n \times R^n \rightarrow R_\infty$ нормальный выпуклый интеграл,

существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$

при $(x, y) \in R^n \times R^n$, $|(x, y)| \leq \varepsilon$. Тогда функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ относительно нормированной топологии пространства $W_{p,2}^n[t_0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$ функционал $I(x, y) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), y(t))dt$.

Из предложения 8.3.4[4] следует, что функционал $I(x, y)$ непрерывен в пространстве $C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$ в точке $(x_0(t), \dot{x}_0(t))$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|I(x, y) - I(x_0, \dot{x}_0)| \leq \varepsilon$ при $(x, y) \in C^n[t_0, T] \times C^n[t_0, T]$, $\|(x, y) - (x_0, \dot{x}_0)\|_C = \|x - x_0\|_C + \|y - \dot{x}_0\|_C \leq \delta$. Обозначим $\|x\|_C = \max\{\|x(t)\| : t \in [t_0, T]\}$

и $\bar{T} = \max\{1, \sqrt[p]{T - t_0}\}$. Так как

$$\begin{aligned} \|x - x_0\|_C + \|\dot{x} - \dot{x}_0\|_C &\leq \|x(t_0) - x_0(t_0)\| + \int_{t_0}^T \|\dot{x}(t) - \dot{x}_0(t)\|dt + \\ &+ \|\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)\| + \int_{t_0}^T \|\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)\|dt \leq \|x(t_0) - x_0(t_0)\| + (T - t_0)\|\dot{x} - \dot{x}_0\|_C + \\ &+ \|\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)\| + \int_{t_0}^T \|\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)\|dt \leq \|x(t_0) - x_0(t_0)\| + (1 + T - t_0)(\|\dot{x}(t_0) - \dot{x}_0(t_0)\| + \\ &+ \sqrt[p]{T - t_0} \int_{t_0}^T \|\ddot{x}(t) - \ddot{x}_0(t)\|^p dt)^{1/p} \leq (1 + T - t_0)\bar{T}\|x - x_0\|_{W_{p,2}^n}, \end{aligned}$$

то $|J(x) - J(x_0)| \leq \varepsilon$ при $\|x - x_0\|_{W_{p,2}^n} \leq \frac{\delta}{T(1+T-t_0)}$. Лемма доказана.

Лемма 1.2. Пусть $g: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ нормальный выпуклый интегрант, выпуклый функционал J конечен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) функционал J непрерывен в точке $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ относительно нормированной топологии пространства $W_{p,2}^n[t_0, T]$.

б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|x| \leq \varepsilon$.

Доказательство. По лемме 1.1 имеем, что из б) следует а).

Обратно если выполнено а), то положив $x(t) = x_0(t) + x$ и $x(t) = x_0(t) + x + ty$ получим, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t))$ и $g(t, x_0(t) + x + ty, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируемы в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|x| \leq \varepsilon$. Из суммируемости функции $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t))$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \leq \varepsilon$ следует, что

функционал $x(\cdot) \rightarrow \int_{t_0}^T g(t, x(t), \dot{x}_0(t)) dt$ непрерывен в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$ в точке $x_0(\cdot)$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что

функция $g(t, x_0(t) + x - ty, \dot{x}_0(t))$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|x| \leq \delta$.

Положив $v = \min\{\varepsilon, \delta\}$ получим, что

$$g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + 0.5y) \leq 0.5g(t, x_0(t) + x + ty, \dot{x}_0(t) + y) + 0.5g(t, x_0(t) + x - ty, \dot{x}_0(t))$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|x| \leq v$. Поэтому функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема в $[t_0, T]$ при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|x| \leq 0.5v$. Отсюда следует б). Лемма доказана.

Рассмотрим в пространстве $L_\infty[t_0, T] \times L_\infty[t_0, T]$ функционал $\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^T g(t, x(t), y(t)) dt$.

Лемма 1.3. Если $(x, y) \rightarrow g(t, x, y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция $g(t, x, y)$ суммируема, то

$$J^*(x^*) = \begin{cases} 0: a_0 = \int_{t_0}^T x^*(s) ds, a_1 = - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T y^*(s) ds, v(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^t y^*(s) ds + \int_{t_0}^T y^*(s) ds; (x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0); \\ + \infty: \text{в противном случае.} \end{cases}$$

где $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot))$.

Доказательство. Ясно, что $\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot))$ выпуклый положительно однородный и по следствию 2 A[5] непрерывный функционал на $L_\infty[t_0, T] \times L_\infty[t_0, T]$. Поэтому по предложению 3 ([4], с. 210) и по теореме 3 ([4], с.

362) $\partial \bar{J}(0)$ непусто, слабо* компактно и $\partial \bar{J}(0) \subset L_1[t_0, T] \times L_1[t_0, T]$. Известно [4, с.203], что

$$\bar{J}(x(\cdot), y(\cdot)) = \max_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|y(t))) dt.$$

Поэтому, используя теорему о минимаксе (см. например, [6, с.288]) имеем

$$J^*(x^*) = \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ \langle x^*, x \rangle - J(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t)|v(t)) dt - \\ - \max_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \int_{t_0}^T ((x^*(t)|x(t)) + (y^*(t)|\ddot{x}(t))) dt \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n} \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0, 0)} \{ (x(t_0)|a_0) + (\dot{x}(t_0)|a_1) +$$

$$+ \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - \int_{t_0}^T ((x^*(t) | x(t)) + (y^*(t) | \dot{x}(t))) dt = \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)} \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ (x(t_0) | a_0) + \\ + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - \int_{t_0}^T ((x^*(t) | x(t)) + (y^*(t) | \dot{x}(t))) dt \}.$$

Очевидно, что

$$\int_{t_0}^T (x^*(t) | x(t)) dt = \int_{t_0}^T (x(t) | d(\int_{t_0}^t x^*(s) ds - \int_{t_0}^T x^*(s) ds)) = (x(t_0) | \int_{t_0}^T x^*(s) ds) - \\ - \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) | (\int_{t_0}^t x^*(s) ds - \int_{t_0}^T x^*(s) ds)) dt = (x(t_0) | \int_{t_0}^T x^*(s) ds) - \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) | (d \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv)) = (x(t_0) | \int_{t_0}^T x^*(s) ds) + \\ + (\dot{x}(t_0) | \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | (\int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv) dt.$$

Также имеем, что

$$\int_{t_0}^T (y^*(t) | \dot{x}(t)) dt = \int_{t_0}^T (\dot{x}(t) | d(\int_{t_0}^t y^*(s) ds - \int_{t_0}^T y^*(s) ds)) = (\dot{x}(t_0) | \int_{t_0}^T y^*(s) ds) - \\ - \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | \int_{t_0}^t y^*(s) ds - \int_{t_0}^T y^*(s) ds) dt.$$

Поэтому получим, что

$$J^*(x^*) = \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)} \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - (x(t_0) | \int_{t_0}^T x^*(s) ds) - \\ - (\dot{x}(t_0) | \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv) - \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | (\int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \\ + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv) dt - (\dot{x}(t_0) | \int_{t_0}^T y^*(s) ds) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | (\int_{t_0}^t y^*(s) ds - \int_{t_0}^T y^*(s) ds) dt) \} = \\ = \min_{(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0)} \sup_{x \in W_{1,1}^n} \{ (x(t_0) | a_0 - \int_{t_0}^T x^*(s) ds) + (\dot{x}(t_0) | a_1 - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T y^*(s) ds) + \\ + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^t y^*(s) ds - \int_{t_0}^T y^*(s) ds) dt = \\ = \begin{cases} 0: a_0 = \int_{t_0}^T x^*(s) ds, a_1 = -\int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T y^*(s) ds, v(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \\ - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^t y^*(s) ds + \int_{t_0}^T y^*(s) ds; (x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0); \\ + \infty: \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма доказана.

$$\text{Обозначив } \psi_0(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv - \int_{t_0}^T \int_{t_0}^v x^*(s) ds dv + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T x^*(s) ds dv,$$

$$\psi_1(t) = -\int_{t_0}^t y^*(s) ds + \int_{t_0}^T y^*(s) ds \quad \text{получим, что } v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad \ddot{\psi}_0(t) = x^*(t),$$

$$\dot{\psi}_1(t) = -y^*(t), \quad a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), \quad a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), \quad \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \quad \psi_1(T) = 0.$$

Известно, что (см. [5]) если выполняются условия леммы 1.3, то

$$(x^*, y^*) \in \partial \bar{J}(0,0) \quad \text{тогда и только тогда когда} \quad (x^*(t), y^*(t)) \in \partial g(t, 0, 0).$$

Следствие 1.1. Если выполняются условия леммы 1.3, то

$$J^*(x^*) = \begin{cases} 0: \text{ если } a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \ddot{\psi}_0(t) = x^*(t), \dot{\psi}_1(t) = -y^*(t), \\ \psi_1(T) = 0, \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, 0, 0); \\ + \infty: \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Следствие 1.2. Если $(x, y) \rightarrow g(t, x, y)$ положительно однородная выпуклая функция и для всякого $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ функция $g(t, x, y)$ суммируема, то $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in \partial J(0)$ в том и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ и $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ такие, что

$$a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), \quad a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), \quad v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad \ddot{\psi}_0(t) = x^*(t), \quad \dot{\psi}_1(t) = -y^*(t), \quad \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \quad (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, 0, 0).$$

Теорема 1.1. Пусть $g: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ нормальный выпуклый интегрант и существует $\delta > 0$ такое, что функция $g(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + y)$ суммируема при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, |(x, y)| < \delta$.

Тогда $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ и $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ такие, что

$$a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0), \quad a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0), \quad v(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad \ddot{\psi}_0(t) = x^*(t), \quad \dot{\psi}_1(t) = -y^*(t), \quad \psi_1(T) = 0, \\ \dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0 \quad (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)).$$

Доказательство. Непустота $\partial J(\bar{x})$ вытекает из леммы 1.1 и предложения 3([4], с.210). Докажем второе утверждение теоремы. Так как (см.[9,с.63])

$$g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) - g(t, \bar{x}(t) - y(t), \dot{\bar{x}}(t) - \dot{y}(t)) \leq \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} \leq \\ \leq g(t, \bar{x}(t) + y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$$

при $0 < \lambda \leq 1$, то используя лемму 1.2 и теорему Лебега (см. [11]) получим, что

$$J'(\bar{x}; y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(\bar{x} + \lambda y) - J(\bar{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{t_0}^T \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} dt = \\ = \int_{t_0}^T \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(t, \bar{x}(t) + \lambda y(t), \dot{\bar{x}}(t) + \lambda \dot{y}(t)) - g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))}{\lambda} dt = \int_{t_0}^T g'(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); y(t), \dot{y}(t)) dt.$$

Из предложения 4([4], с. 206) вытекает, что $J'(\bar{x}; y)$ конечен и непрерывен на $W_{p,2}^n[t_0, T]$. Поэтому $g'(t, \bar{x}(t); x, y)$ суммируема при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Если учесть, что $\partial J(\bar{x}) = \partial J'(\bar{x}, 0)$, $\partial g(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \partial \bar{g}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); 0, 0)$, то утверждение теоремы вытекает из следствия 1. 2. Теорема доказана.

2. О двойственности терминального функционала

Пусть $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}_\infty$. Рассмотрим в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$ функционал вида $I(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и определим условия при которых $I^*(x^*)$ конечен.

Лемма 2.1. Если $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $q(\cdot) \in L_p[t_0, T]$ и $\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0)=a_1, x(T)=a_2, \\ \dot{x}(t_0)=b_1, \dot{x}(T)=b_2}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt < +\infty$, то $q(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$ в $[t_0, T]$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $z(t)$ произвольный многочлен, такой что $z(t_0) = a_2, z(T) = b_2$. Положим

$$\bar{z}(t) = a_1 + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau + (3(\frac{t-t_0}{T-t_0})^2 - 2(\frac{t-t_0}{T-t_0})^3)(b_1 - a_1 - \int_{t_0}^T z(\tau) d\tau)$$

Ясно, что $\bar{z}(t_0) = a_1, \bar{z}(T) = b_1, \dot{\bar{z}}(t_0) = a_2, \dot{\bar{z}}(T) = b_2$. Тогда получим, что

$$\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0)=a_1, x(T)=a_2, \\ \dot{x}(t_0)=b_1, \dot{x}(T)=b_2}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = \sup_{\substack{z(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ z(t_0)=0, z(T)=0, \\ \dot{z}(t_0)=0, \dot{z}(T)=0}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt + \int_{t_0}^T q(t) \ddot{\bar{z}}(t) dt < +\infty.$$

Отсюда следует, что $\sup_{\substack{z(\cdot) \in W_{p,2}[t_0, T] \\ z(t_0)=0, z(T)=0, \\ \dot{z}(t_0)=0, \dot{z}(T)=0}} \int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt < +\infty$. Поэтому $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{z}(t) dt = 0$ при $z(\cdot) \in \dot{W}_{p,2}[t_0, T]$.
 $= \{W_{p,2}[t_0, T], x(t_0)=0, x(T)=0, \dot{x}(t_0)=0, \dot{x}(T)=0\}$. Так как $C_0^\infty(t_0, T) \subset \dot{W}_{p,2}[t_0, T]$, то получим, что $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = 0$ при $x(\cdot) \in C_0^\infty(t_0, T)$. Ясно, что $\int_{t_0}^T q(t) \ddot{x}(t) dt = \int_{t_0}^T \ddot{q}(t) x(t) dt = 0$ при $x(\cdot) \in C_0^\infty(t_0, T)$. Поэтому $\ddot{q}(t) = 0$.
 Отсюда следует, что $q(t) = \alpha_1 t + \alpha_2$ (см. [7, с.244]). Лемма доказана.

Лемма 2.2. Если $I(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и в точке $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$ функционал $I^*(x^*)$ конечен, то $v(t) = c_1 t + c_2$ при $t \in [t_0, T]$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть точка $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$, такая, что $J(\bar{x})$ конечен, т.е.

$(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \in \mathbb{R}^{4n}$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) < +\infty$. По определению

$$\begin{aligned} I^*(x^*) &= \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ \langle x^*, x \rangle - I(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} \geq \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0)=\bar{x}(t_0), x(T)=\bar{x}(T), \\ \dot{x}(t_0)=\dot{\bar{x}}(t_0), \dot{x}(T)=\dot{\bar{x}}(T)}} (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt - \\ &- \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)). \end{aligned}$$

Так как $I^*(x^*)$ конечен, то отсюда вытекает, что $\sup_{\substack{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ x(t_0)=\bar{x}(t_0), x(T)=\bar{x}(T), \\ \dot{x}(t_0)=\dot{\bar{x}}(t_0), \dot{x}(T)=\dot{\bar{x}}(T)}} \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | v(t)) dt < +\infty$. Поэтому из леммы 2.1 получим, что $v(t) = c_1 t + c_2 = (c_1^1, \dots, c_1^n)t + (c_2^1, \dots, c_2^n)$ постоянная вектор-функция. Лемма доказана.

Теорема 2.1. Если $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty$ собственная выпуклая функция и $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot)) \in \partial I(\bar{x})$, где $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, то существуют векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $v(t) = c_1 t + c_2$ и $(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$.

Доказательство. По определению субдифференциала $x^* \in \partial J(\bar{x})$ в том и только в том случае, когда $I^*(x^*) + I(\bar{x}) = x^*(\bar{x})$. Так как $I^*(x^*)$ конечен, где $x^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, $x^* = (a_0, a_1, v(\cdot))$, то $v(t) = c_1 t + c_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$. Поэтому

$$\begin{aligned} I^*(x^*) &= \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ \langle x^*, x \rangle - I(x) \} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | c_1 t + c_2) dt - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + (\dot{x}(t) | c_1 t + c_2) \Big|_{t_0}^T - \\ &- \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) | c_1) dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0) + (\dot{x}(t_0) | a_1) + \\ &+ (\dot{x}(T) | c_1 T + c_2) - (\dot{x}(t_0) | c_1 t_0 + c_2) - (x(T) | c_1) + (x(t_0) | c_1) - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \\ &= \sup_{x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \{ (x(t_0) | a_0 + c_1) + (\dot{x}(t_0) | a_1 - c_1 t_0 - c_2) - (x(T) | c_1) + (\dot{x}(T) | c_1 T + c_2) - \\ &- \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \} = \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2). \end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) + \varphi^*(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) = \\ = (\bar{x}(t_0) | a_0 + c_1) + (\dot{\bar{x}}(t_0) | a_1 - c_1 t_0 - c_2) + (\bar{x}(T) | -c_1) + (\dot{\bar{x}}(T) | c_1 T + c_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(a_0 + c_1, a_1 - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$.

Теорема доказана.

3. Об обобщенной задаче Больца

Пусть $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ нормальный выпуклый интегрант, $\varphi : \mathbb{R}^{4n} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ выпуклая функция. Рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi_0(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt \quad (3.1)$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$.

Будем говорить, что функция $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$, является решением обобщенной задачи (3.1), если $|\Phi_0(\bar{x})| < +\infty$ и справедливо неравенство $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(\bar{x})$ при любой функции $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x, y) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t)) dt,$$

где $y(\cdot) \in L_p^n[t_0, T]$. Положим $h(y) = \inf_x \Phi(x, y)$. Из предложения 2.5 [8] вытекает, что h выпуклая функция.

Лемма 3.1. Допустим, что $\inf_x \Phi_0(x)$ конечен и существует такая точка $x_0(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$, что функция $f(t, x_0(t) + x, \dot{x}_0(t) + \dot{x}, \ddot{x}_0(t) + \ddot{x})$ суммируема в $[t_0, T]$ для некоего $r > 0$ и $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|(x, z)| \leq r$, а функция $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), \cdot)$ непрерывна в точке $(x_0(T), \dot{x}_0(T))$. Тогда функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (3.1) стабильна (см. [8]).

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^T f(t, x_0(t) + x(t), \dot{x}_0(t) + \dot{x}(t), \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}(t)) dt$$

непрерывен в точке нуль в пространстве $W_{p,2}^n[t_0, T]$. Тогда существуют $\alpha_1 > 0$ и L_1 такие, что $J(x) \leq L_1$

при $x \in \{z(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T] : |z(t_0)| + |\dot{z}(t_0)| + (\int_{t_0}^T |\dot{z}(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \leq \alpha_1\}$. Так как функция $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), \cdot)$ непрерывна в точке $(x_0(T), \dot{x}_0(T))$, то существуют $\alpha_2 > 0$ и L_2 , что $\varphi(x_0(t_0), \dot{x}_0(t_0), b) \leq L_2$ при $|b - (x_0(T), \dot{x}_0(T))| < \alpha_2$, $b \in \mathbb{R}^{2n}$.

Обозначив $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $x_y(t) = x_0(t) - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s y(v) dv$ получим

$$h(y) = \inf \Phi(x_y, y) \leq \Phi(x_y, y) \leq L_1 + L_2$$

при $y(\cdot) \in L_p^n[t_0, T]$, $\|y\|_p \leq \alpha$. Тогда из предложения 1.5.2 [8] вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Лемма доказана.

Пусть $v, w \in \mathbb{R}^n$. Положим $f^0(t, z, v) = \inf_w \{(w|v) + f(t, z, w)\}$, где $z \in \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ среди всех функций $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ минимизировала функционал (1) достаточно, чтобы нашлись функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$, $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ и числа $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что

- 1) $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t))$, 2) $f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t)) = (\bar{z}(t)|\ddot{\bar{x}}(t)) + f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$
- 3) $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$,
- 4) $\bar{z}(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t) + c_2 + c_1 t$, 5) $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0, \psi_1(T) = 0$,

а если выполнено условие леммы 3.1 при $x_0(t) = \bar{x}(t)$, то условия 1)-5) и являются необходимыми.

Доказательство. Достаточность. Из 1) следует, что

$$f^0(t, x, y, \bar{z}(t)) - f^0(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \bar{z}(t)) \geq (\ddot{\psi}_0(t)|x - \bar{x}(t)) - (\dot{\psi}_1(t)|y - \dot{\bar{x}}(t))$$

при $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Отсюда, используя 2) имеем, что

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T (\bar{z}(t) |\ddot{x}(t)|) dt + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T (\bar{z}(t) |\ddot{\bar{x}}(t)|) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt \geq \\ & \geq \int_{t_0}^T (\ddot{\psi}_0(t) |x(t) - \bar{x}(t)|) - (\dot{\psi}_1(t) |\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)|) dt \end{aligned}$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt \geq \\ & \geq \int_{t_0}^T (\ddot{\psi}_0(t) |x(t) - \bar{x}(t)|) - (\dot{\psi}_1(t) |\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)|) dt + \int_{t_0}^T (\bar{z}(t) |\ddot{\bar{x}}(t) - \ddot{x}(t)|) dt \end{aligned}$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$. Из 3) следует, что

$$\begin{aligned} & \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) - \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \geq (x(t_0) - \bar{x}(t_0)) |\dot{\psi}_0(t_0) + c_1| + \\ & + (\dot{x}(t_0) - \dot{\bar{x}}(t_0)) |-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2| + (x(T) - \bar{x}(T)) |c_1| + (\dot{x}(T) - \dot{\bar{x}}(T)) |c_1 T + c_2| \end{aligned}$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$.

Интегрируя по частям и применяя формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T (\ddot{\psi}_0(t) |x(t) - \bar{x}(t)|) - (\dot{\psi}_1(t) |\dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}(t)|) dt + \int_{t_0}^T (\bar{z}(t) |\ddot{\bar{x}}(t) - \ddot{x}(t)|) dt = -[(x(t_0) - \bar{x}(t_0)) |\dot{\psi}_0(t_0) + c_1| + \\ & + (\dot{x}(t_0) - \dot{\bar{x}}(t_0)) |-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2| + (x(T) - \bar{x}(T)) |c_1| + (\dot{x}(T) - \dot{\bar{x}}(T)) |c_1 T + c_2|]. \end{aligned}$$

Поэтому получим, что

$$\int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) dt + \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) - \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \geq 0$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n([t_0, T])$. Достаточность теоремы 2.1 доказана.

Необходимость. Из леммы 3.1 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль.

Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [8] вытекает, что решения $\bar{x}(\cdot)$ задачи

$$\inf\{\Phi_0(x) : x \in W_{p,2}^n[t_0, T]\} \text{ и решения } \sup_{z \in L_p^n[t_0, T]} \{-\Phi^*(0, z)\} \text{ связаны экстремальным соотношением}$$

$$\Phi(\bar{x}, 0) + \Phi^*(0, -\bar{z}) = 0 \quad (3.2)$$

По определению

$$\begin{aligned} \Phi^*(0, -\bar{z}) &= \sup_{\substack{x \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ y \in L_p^n[t_0, T]}} \left\{ -\int_{t_0}^T (y(t) |\bar{z}(t)|) dt - \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t)) dt - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\} = \\ &= \sup_{\substack{x \in W_{p,2}^n[t_0, T] \\ y \in L_p^n[t_0, T]}} \left\{ -\int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) + y(t) |\bar{z}(t)|) dt + \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) |\bar{z}(t)|) dt - \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t) + y(t)) dt - \right. \\ &\quad \left. - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\} = \sup_{x \in W_{p,2}^n[t_0, T]} \left\{ \int_{t_0}^T (\ddot{x}(t) |\bar{z}(t)|) dt - \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t)) dt - \right. \\ &\quad \left. - \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обозначим $J_1(x) = \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t)) dt$, $J_2(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$. Из (3.2), (3.3) вытекает, что J_1 и

J_2 собственные функционалы. Из предложения 2.5 [9, с.28] следует, что $(x, y) \rightarrow f^0(t, x, y, \bar{z}(t))$ выпуклая

функция и аналогично теореме 8.1.4 или предложению 8.1.10 [4, с.345, 348] проверяется, что $f^0(t, x, y, \bar{z}(t))$ $L \times B$ -измерима. Так как

$$f^0(t, \bar{x}(t) + x, \dot{\bar{x}}(t) + y, \bar{z}(t)) \leq \langle \bar{z}(t), \ddot{\bar{x}}(t) \rangle + f(t, \bar{x}(t) + x, \dot{\bar{x}}(t) + y, \ddot{\bar{x}}(t))$$

при $(x, y) \in R^n \times R^n$, $\|(x, y)\| \leq r$ в $[t_0, T]$, то при условии теоремы 2.1 имеем, что функционал J_1

непрерывен в точке $\bar{x}(\cdot)$. По условию $J_2(\bar{x}(\cdot))$ конечен.

Положив $S(x(\cdot)) = \int_{t_0}^T f^0(t, x(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t))dt + \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и $\bar{z}^* = (0, 0, \bar{z}(\cdot)) \in W_{p,2}^n([t_0, T])^*$ имеем, что $\Phi^*(0, -\bar{z}) = S^*(\bar{z}^*)$. Используя неравенство Юнга-Фенхеля получим

$$S^*(\bar{z}^*) \geq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt - S(\bar{x}), \quad S(\bar{x}) \leq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar{x}),$$

то отсюда получим, что $S^*(\bar{z}^*) \geq \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt - S(\bar{x}) \geq -\Phi_0(\bar{x})$. Поэтому из соотношения (3.2)

вытекает, что $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt - S(\bar{x})$, $S(\bar{x}) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt + \Phi_0(\bar{x})$. Из второго соотношения

имеем, что $\int_{t_0}^T f^0(t, \bar{x}(t), \ddot{x}(t), \bar{z}(t))dt - \int_{t_0}^T f(t, \bar{x}(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))dt = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt$. Отсюда получим, что $f^0(t, \bar{x}(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t)) = \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle + f(t, \bar{x}(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$ при $t \in [t_0, T]$. Из равенства $S^*(\bar{z}^*) = \int_{t_0}^T \langle \bar{z}(t), \ddot{x}(t) \rangle dt - S(\bar{x})$

вытекает, что $\bar{z}^* \in \partial_{W_{p,2}^n} S(\bar{x})$. Из теоремы 0.3.3[4, с.59] (теорема Моро-Рокафеллара) имеем, что $\partial_{W_{p,2}^n} S(\bar{x}) = \partial_{W_{p,2}^n} J_1(\bar{x}) + \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$. Тогда найдутся точки $z_1^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, где $i=1,2$, такие, что $\bar{z}^* = z_1^* + z_2^*$, $z_1^* = (a_0, a_1, v_1(\cdot))$, $z_2^* = (d, b, v_2(\cdot))$ и $z_1^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_1(\bar{x})$, $z_2^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$. По теореме 1.1

то и только в том случае, когда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$ и $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ такие, что $a_0 = -\dot{\psi}_0(t_0)$, $a_1 = \psi_0(t_0) + \psi_1(t_0)$, $v_1(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$, $\ddot{\psi}_0(t) = x^*(t)$, $\dot{\psi}_1(t) = -y^*(t)$, $\psi_1(T) = 0$, $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$ и $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t)) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \dot{x}(t), \bar{z}(t))$.

По теореме 2.1 $z_2^* \in \partial_{W_{p,2}^n} J_2(\bar{x})$, где $z_2^* \in W_{p,2}^n[t_0, T]^*$, $z_2^* = (d, b, v_2(\cdot))$, то $v_2(t) = c_1 t + c_2$, где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ и $(d + c_1, b - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{x}(t_0), \bar{x}(T), \dot{x}(T))$. Поэтому $\bar{z}(t) = v_1(t) + c_1 t + c_2$, $a_0 + d = 0$, $a_1 + b = 0$, т.е. $\bar{z}(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t) + c_1 t + c_2$, $-\dot{\psi}_0(t_0) + d = 0$, $\psi_0(t_0) + \psi_1(t_0) + b = 0$. Отсюда следует, что $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{x}(t_0), \bar{x}(T), \dot{x}(T))$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Для того, чтобы функция $\bar{x}(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ среди всех функций $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$ минимизировала функционал (1) достаточно, чтобы нашлись функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$, $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ и числа $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что

- 1) $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial f(t, \bar{x}(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$,
- 2) $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) \in \partial \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{x}(t_0), \bar{x}(T), \dot{x}(T))$,
- 3) $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$, $\psi_1(T) = 0$,

а если выполнено условие леммы 3.1 при $x_0(t) = \bar{x}(t)$, то условия 1)-3) и являются необходимыми.

4. Невыпуклый случай

Пусть X банахово пространство, $R_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f: X \rightarrow R_\infty$, $\text{dom} f = \{x \in X: f(x) < +\infty\}$, $x_0 \in \text{dom} f$. Положим

$$f^+(x_0; x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}, \quad f^-(x_0; x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t},$$

$$f^l(x_0; x) = \max\{f^+(x_0; x), -f^-(x_0; -x)\}.$$

Множество $\partial^l f(x_0) = \{x^* \in X^*: \langle x^*, x \rangle \leq f^l(x_0; x), x \in X\}$ назовем субдифференциалом функции f в точке x_0 .

Функция P , определенная на пространстве X , называется положи-тельно однородной, если $P(0) = 0$ и $P(\lambda x) = \lambda P(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda > 0$. Положительно однородная выпуклая (вогнутая) функция называется

сублинейной (суперлинейной). Если P сублинейная функция, то положим $\partial p(0) = \{x^* \in X^* : p(x) \geq \langle x^*, x \rangle\}$ при $x \in X$.

Отметим, что в общем случае функция $x \rightarrow f^1(x_0; x)$ не является суб-линейной. Поэтому рассмотрим другое определение субдифференциала.

Будем говорить, что функция f в точке $x_0 \in \text{dom} f$ допускает сублинейную аппроксимацию $h(x)$, если $h(x)$ сублинейная полунепрерывная снизу функция и $h(x) \geq f^1(x_0; x)$ при $x \in X$. Сублинейная аппроксимация h функций f в точке x_0 называется главной аппроксимацией, если не существует другая сублинейная аппроксимация h_1 , такая, что $h(x) \geq h_1(x)$ при $x \in X$. Главную сублинейную аппроксимацию функции f в точке x_0 , обозначим через $f^m(x_0; x)$.

Если $h(x)$ главная сублинейная аппроксимация функции f в точке x_0 , то $\partial h(0)$ назовем главным аппроксимативным субдифференциалом функции f в точке x_0 и обозначим через $\partial^m f(x_0)$.

$$f^{[1]+}(x_0; x) = \limsup_{\substack{(y, \alpha) \downarrow f^{x_0} \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tx) - \alpha}{t},$$

Положим (см.[10])

$(y, \alpha) \downarrow f^{x_0}$ означает, что $(y, \alpha) \in E(f)$, $y \rightarrow x_0$, $\alpha \rightarrow f(x_0)$. где символ

Далее будем считать, что главная сублинейная аппроксимация $h(x)$ функции f в точке x_0 дополнительно удовлетворяет неравенству:

$$h(x) \leq f^{[1]+}(x_0; x) \text{ при } x \in X.$$

Лемма 4.1. Если f липшицева функция в окрестности x_0 , то существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация функции f в точке x_0 .

Лемма 4.1 доказана в [1, лемма 1.2.3].

Обозначим $\partial^m f(t, x, y, z) = \partial^m f_t(x, y, z)$ и $\nabla f(t, x, y, z) = \nabla f_t(x, y, z)$.

Теорема 4.1. Пусть отображение $t \rightarrow f(t, x, y, z)$ измеримо в $[t_0, T]$, существуют функции $k(\cdot) \in L_1[t_0, T]$ и $c(\cdot) \in L_{p'}[t_0, T]$, где $pp' = p + p'$, числа $k_0 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$|f(t, x, y, z) - f(t, x_1, y_1, z_1)| \leq k(t)(\|x - x_1\| + \|y - y_1\|) + c(t)\|z - z_1\|,$$

$$|\varphi(z_0, z_1, z_2, z_3) - \varphi(u_0, u_1, u_2, u_3)| \leq k_0(\|z_0 - u_0\| + \|z_1 - u_1\| + \|z_2 - u_2\| + \|z_3 - u_3\|)$$

при $\|x - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $\|x_1 - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $\|y - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $\|y_1 - \bar{x}(t)\| \leq \alpha$, $z, z_1 \in X$, $\|z_0 - \bar{x}(t_0)\| \leq \alpha$, $\|u_0 - \bar{x}(t_0)\| \leq \alpha$, $\|z_1 - \bar{x}(T)\| \leq \alpha$, $\|u_1 - \bar{x}(T)\| \leq \alpha$, $\|z_2 - \dot{\bar{x}}(t_0)\| \leq \alpha$, $\|u_2 - \dot{\bar{x}}(t_0)\| \leq \alpha$, $\|z_3 - \dot{\bar{x}}(T)\| \leq \alpha$, $\|u_3 - \dot{\bar{x}}(T)\| \leq \alpha$ и $\bar{x}(t)$

минимизирует функционал (3.1) в $W_{p,2}^n([t_0, T], X)$. Тогда существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$, $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$, числа $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что $\psi_0(T) = \psi_0(t_0) = 0$, $\psi_1(T) = 0$ и

$$1) (\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial^m f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)),$$

$$2) (\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, c_1 T + c_2, -c_1) \in \partial^m \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Доказательство. В силу $\Phi_0(\bar{x}) \leq \Phi_0(x)$ при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$. Отметим, что функционал $\Phi_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\bar{x}(\cdot)$ в $W_{p,2}^n[t_0, T]$. Применяя лемму Фату (см.[11, с.97]) имеем, что

$$\Phi_0^+(\bar{x}; x) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\Phi_0(\bar{x} + \lambda x) - \Phi_0(\bar{x})) \leq \varphi^+(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \\ + \int_{t_0}^T f^+(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt,$$

$$\Phi_0^-(\bar{x}; -x) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda} (\Phi_0(\bar{x} - \lambda x) - \Phi_0(\bar{x})) \geq \varphi^-(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); -x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \\ + \int_{t_0}^T f^-(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); -x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt.$$

По определению $\Phi_0^l(\bar{x}; x) = \max\{\Phi_0^+(\bar{x}; x), -\Phi_0^-(\bar{x}; -x)\}$.
Легко проверяется, что

$$\Phi_0^l(\bar{x}; x) \leq \varphi^l(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \\ + \int_{t_0}^T f^l(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt.$$

По лемме 4.1 существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация $h(x)$ функции $\varphi(x)$ в точке $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$. По лемме 4.1 также существует непрерывная главная сублинейная аппроксимация $F_t(z)$ функции $f_t(z)$ в точке $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$.

Положим $h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) = \varphi^m(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T))$ и $F_t(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = f_t^m((\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$.

Ясно, что

$$\varphi^l(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T); x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) \leq h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)),$$

$$f^l(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t); x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \leq F_t(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t))$$

при $x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]$. Поэтому функция $\bar{v}(t) = 0$ также минимизирует функционал

$$I_0(x) = h(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt$$

в $W_{p,2}^n[t_0, T]$. Легко проверяется при условии теоремы 4.1 функционал $I_0(x)$ удовлетворяет условиям следствия 3.1. Поэтому существуют функции $\psi_0(\cdot) \in W_{1,2}^n[t_0, T]$, $\psi_1(\cdot) \in W_{1,1}^n[t_0, T]$ и числа $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^n$ такие, что

- 1) $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \partial^m f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$,
- 2) $(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, c_1 T + c_2, -c_1) \in \partial^m \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$,
- 3) $\dot{\psi}_0(T) = \psi_0(T) = 0$, $\psi_1(T) = 0$.

Теорема доказана.

Пусть выполняются условия теоремы 4.1 и кроме того $\bar{x}(\cdot) \in C^2[t_0, T]$, функция f непрерывна в точке $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ и дифференцируема в точке $(\bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ и функция φ дифференцируема в точке $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$. Тогда из соотношения 1) теоремы 4.1 следует, что $(\ddot{\psi}_0(t), -\dot{\psi}_1(t), -\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t) \in \nabla f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$.

Поэтому

$$\ddot{\psi}_0(t) = f_x(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)), \quad (4.1)$$

$$-\dot{\psi}_1(t) = f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)), \quad (4.2)$$

$$-\psi_0(t) - \psi_1(t) - c_2 - c_1 t = f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (4.3)$$

Из равенства (4.3) следует, что

$$-\dot{\psi}_0(t) - \dot{\psi}_1(t) - c_1 = \frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (4.4)$$

Учитывая (4.2) в (4.3) получим, что

$$-\dot{\psi}_0(t) - c_1 = \frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)). \quad (4.5)$$

Из (4.1) и (4.5) следует, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) \right) + f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0.$$

Пусть функция $f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ дифференцируема по t . Тогда имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - \frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) + f_{\ddot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0.$$

так как функция Φ дифференцируема. Тогда из соотношения 2) теоремы 4.1 имеем

$$(\dot{\psi}_0(t_0) + c_1, -\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2, -c_1, c_1 T + c_2) = \nabla \varphi(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Поэтому

$$\dot{\psi}_0(t_0) + c_1 = \varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (4.6)$$

$$-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_1 t_0 - c_2 = \varphi_{\dot{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (4.7)$$

$$-c_1 = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)), \quad (4.8)$$

$$c_1 T + c_2 = \varphi_{\dot{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)). \quad (4.9)$$

Из (4.3) следует, что

$$-\psi_0(t_0) - \psi_1(t_0) - c_2 - c_1 t_0 = f_{\ddot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)).$$

Тогда имеем $f_{\ddot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = \varphi_{\ddot{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$.

Из (4.3) и из соотношения 3) следует, что $-c_2 - c_1 T = f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T))$. Тогда из (4.9) получим, что

$$f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = -\varphi_{\ddot{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\frac{d}{dt} f_{\ddot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) - f_{\ddot{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = -\varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)).$$

Из (4.5) и (4.8) следует, что

$$\frac{d}{dt} f_{\bar{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) - f_{\bar{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$$

Таким образом доказано следующее следствие.

Следствие 4.1. Если функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ и их частные производные по $x, \dot{x}, \ddot{x}$ непрерывны в открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n}$, а функция $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$ непрерывно дифференцируема в открытом множестве $V \subset \mathbb{R}^4$ и пусть $\bar{x}(\cdot) \in C^2[t_0, T]$ таковы, что $(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) \in U$ при $t \in [t_0, T]$ и $(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)) \in V$, функция $f_{\bar{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t))$ дифференцируема по t и $\bar{x}(\cdot) \in C^2[t_0, T]$ является локальным минимумом задачи (3.1), то

$$\frac{d^2}{dt^2} f_{\bar{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) - \frac{d}{dt} f_{\bar{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) + f_{\bar{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t)) = 0$$

и выполняются следующие условия трансверсальности

$$f_{\bar{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = \varphi_{\bar{x}(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$f_{\ddot{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = -\varphi_{\bar{x}(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$\frac{d}{dt} f_{\bar{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) - f_{\bar{x}}(t_0, \bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \ddot{\bar{x}}(t_0)) = -\varphi_{x(t_0)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T)),$$

$$\frac{d}{dt} f_{\bar{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) - f_{\bar{x}}(T, \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T), \ddot{\bar{x}}(T)) = \varphi_{x(T)}(\bar{x}(t_0), \dot{\bar{x}}(t_0), \bar{x}(T), \dot{\bar{x}}(T))$$

Отметим, что пространство $W_{p,2}^n[t_0, T]$ и пространство Соболева $W_{p,2}^n(t_0, T)$ можно отождествить. В пространстве $W_{p,2}^n(t_0, T)$ значения в точке понимаются в смысле следа.

Замечание 4.1. Пусть $f: [t_0, T] \times \mathbb{R}^{3n} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ нормальный выпуклый интегрант, $\varphi: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ выпуклая функция, $a: [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp } \mathbb{R}^n \cup \{\emptyset\}$, M_0 и M_1 непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим минимизацию функционала

$$\Phi_0(x) = \varphi(x(t_0), \dot{x}(t_0), x(T), \dot{x}(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) dt, \quad (4.10)$$

среди всех решений задачи

$$\ddot{x}(t) \in a(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (4.11)$$

$$x(t_0) \in M_0, \quad \dot{x}(t_0) \in M_1, \quad x(\cdot) \in W_{p,2}^n[t_0, T]. \quad (4.12)$$

Так как $\text{cl}(W_{p,2}^n[t_0, T] \times W_{p,1}^n[t_0, T]) = W_{p,1}^{2n}[t_0, T]$, то отметим, что задачи (4.11)-(4.12) можно привести к минимизации функционала

$$\Phi(x, y) = \varphi(x(t_0), y(t_0), x(T), y(T)) + \int_{t_0}^T f(t, x(t), y(t), \dot{y}(t)) dt,$$

среди всех решений задачи

$$\dot{y}(t) \in a(t, x(t), y(t)), \quad \dot{x}(t) = y(t)$$

$$(x(t_0), y(t_0)) \in M_0 \times M_1, \quad (x(\cdot), y(\cdot)) \in W_{p,1}^{2n}[t_0, T].$$

Ясно, что последняя задача является частным случаем экстремальной задачи для дифференциальных включений.

Список литературы

1. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.- 359 p.
2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач.- Баку: Элм, 2002.- 125 с.
3. Садыгов М.А. Об одной экстремальной задаче, заданной на пространстве Соболева.// Известия АН Азербайджанский ССР.-1985,5.-с.25-33.
4. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, 1974.- 479с.
5. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами, II.В кн. Математическая экономика. – М.: Мир, 1974.- с. 170-204.
6. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.- М.:Мир, 1988.- 510 с.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.- М.: Наука, 1989.- 623 с.
8. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.- М.: Мир, 1979.- 400 с
9. Обен Ж.П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. -М.:Мир, 1988.- 264 с.
10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ.- М.: Наука, 1988.- 280 с.
11. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.- Springer-Verlag, London, 2013.- 591 p.
12. Федерер Г. Геометрическая теория меры.- М.: Наука, 1987.- 760 с

References

1. Sadygov M.A. Subdifferentsial vysshego poryadka i optimizatsiya.- Deutschland, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014.- 359 p.
2. Sadygov M.A. Issledovaniye negladkikh optimizatsionnykh zadach.- Baku: Elm, 2002.- 125 p.
3. Sadygov M.A. An extremal problem on a Sobolev space.// Izvestiya AN Azerbaydzhanskiy SSR.-1985,5.-pp.25-33.
4. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Teoriya ekstremal'nykh zadach.- M.: Nauka, 1974.- 479p.
5. Rokafellar R. Integraly, yavlyayushchiyesya vypuklymi funktsionalami, II.V kn. Matematicheskaya ekonomika. – M.: Mir, 1974.- pp. 170-204.
6. Oben ZH.P., Ekland I. Prikladnoy nelineynyy analiz.- M.:Mir, 1988.- 510 p.
7. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza.- M.: Nauka, 1989.- 623 p.
8. Ekland I., Temam R. Vypuklyy analiz i variatsionnyye problemy.- M.: Mir, 1979.- 400 p.
9. Oben ZH.P. Nelineynyy analiz i yego ekonomicheskiye prilozheniya. -M.:Mir, 1988.- 264 p.
10. Klark F. Optimizatsiya i negladkiy analiz.- M.: Nauka, 1988.- 280 p.
11. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control.- Springer-Verlag, London, 2013.- 591 p.
12. Federer G. Geometricheskaya teoriya mery.- M.: Nauka, 1987.- 760 p.