Математическое моделирование предотвращения техногенных катастроф

Макарова М.В.

кандидат технических наук, доцент,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

Mathematical modeling of the prevention of man-made disasters

Makarova M.V.

candidate of technical sciences, Assistant Professor,
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

Аннотация. В статье исследуются объекты, математическими моделями которых являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. В статье даётся алгоритм построения гарантирующего управления объектов, на которые действуют возмущающие силы, имеющие случайный характер.

Abstract. In the article explores objects whose mathematical models are linear differential equations with constant coefficients. These facilities are subject to indignant forces, which are random. Their correlational functions and spectral power densities are known. An algorithm is given to build a guarantee control that ensures the reliability of the objects in question.

Ключевые слова: математическая модель, линейные дифференциальные уравнения, случайная функция, корреляционная функция, линейный регулятор, устойчивость движения, оптимальное управление.

Keywords: mathematical model, linear differential equations, random function, correlation function, linear regulator, motion stability, optimal control.

В данной статье исследуются объекты, математическими моделями которых служат линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. На рассматриваемые объекты действуют возмущающие силы случайного характера, относительно которых известны их корреляционные функции и спектральные плотности мощности. Для уменьшения влияния возмущающих сил используются линейные регуляторы с обратной связью.

Математические модели подобных объектов имеют вид:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1)$$

где x – управляемая величина, u – управляющее воздействие, $A(t)$ и $B(t)$ – полиномы от оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$, $x(t)$ – случайная функция времени, относительно которой известна её корреляционная функция $K_x(t, \tau)$, называемая ещё автокорреляционной функцией:

$$K_x(t, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T x(t) x(\tau) dt d\tau. \quad (2)$$

Спектральной плотностью мощности (далее по тексту – спектр) называется следующее косинус-преобразование Фурье корреляционной функции:

$$S_x(\omega) = 2 \int_0^\infty K_x(t, \tau) \cos(\omega(t - \tau)) dt d\tau. \quad (3)$$

Значение спектра заключается в том, что он позволяет легко вычислить как средний квадрат самой функции $x(t)$:

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \int_0^\infty S_x(\omega) d\omega, \quad (4)$$

так и, самое главное, средний квадрат решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, в правой части которого присутствует случайная функция $x(t)$. Так, если

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t), \quad (5)$$

то

$$\overline{x^2} \geq \int_0^\infty \frac{|B(\omega)|^2}{|A(\omega)|^2} S_x(\omega) d\omega. \quad (6)$$

Вопросы использования спектров для реализации наилучшего (оптимального) управления при не полностью известных и случайных возмущающих силах более подробно освещены в монографии [1].

Пример: движение корабля по курсу описывается уравнением

$$\dot{\psi}(t) = u + \psi(t), \quad (7)$$

где u – это управляющее воздействие корабельного руля. Тогда, например, для танкеров серии «Казбек» имеем

$$\sigma(\omega) = \sigma_1^2 \omega^2 + \sigma_2 \omega, \quad (8)$$

где T_1 и T_2 являются параметрами времени, а, в данном случае, $T_1=690$ сек и $T_2=17,2$ сек. Возмущающее воздействие от морского волнения $\sigma(\omega)$ имеет корреляционную функцию и спектр хорошо аппроксимируемые известными формулами Рахманини-Фирсова:

$$\sigma(\omega) = \langle \sigma^2 \rangle \cdot \frac{\alpha - \beta \omega (\alpha \omega^2 + \beta \omega^4)}{(\alpha \omega^2 + \beta \omega^4)^2 + 4 \alpha \beta \omega^2 + \alpha^2 (\omega^2 + \omega^2 + \omega^2)^2 - 4 \alpha^2 \omega^2} \quad (9)$$

где α и β имеют размерность 1/сек и для развитого морского волнения отношение α/β колеблется обычно в пределах $0,15 \leq \alpha/\beta \leq 0,25$. При таких соотношениях спектр имеет острый максимум вблизи частоты $\omega = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ и основная часть энергии возмущающего воздействия сосредоточена вблизи частот $\omega \approx \omega$. Величина ω зависит от района плавания и интенсивности волнения и может изменяться в широких пределах от 0,5 до 1,7 сек⁻¹.

Вычисляя $\langle \sigma^2 \rangle$ по формуле (6) для танкеров серии «Казбек» с использованием формул (8) и (9), замечаем, что при отсутствии управляющего воздействия ($u = 0$) интеграл (6) расходится. Это для данной математической модели соответствует неустойчивому движению корабля.

Для того, чтобы обеспечить устойчивость движения и малых отклонений корабля от заданного курса применяя управление, формируемое линейным регулятором вида

$$u = - \frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_2(\omega)} \omega, \quad (10)$$

где $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$ – полиномы от оператора дифференцирования $\omega = \frac{d}{dt}$. Для упрощения дальнейших формул будем записывать линейный регулятор (10) в виде $u = \sigma(\omega)$, имея в виду, что $\sigma(\omega)$ может быть и рациональной дробью. Уравнение движения корабля по курсу с учётом как возмущающих сил, так и корабельного руля, будет иметь вид:

$$\sigma(\omega) \omega + \sigma(\omega) \omega = \sigma(\omega), \quad (11)$$

Тогда, с учетом введенного управления (10) и видоизмененным на его основе уравнением движения корабля (11) формула для вычисления $\langle \sigma^2 \rangle$ примет вид:

$$\sigma^2 \geq \int_0^\infty |\sigma(\omega \omega) + \sigma(\omega \omega)|^2 \cdot \sigma_\omega(\omega) \omega \omega. \quad (12)$$

За счёт правильного выбора функции $\sigma(\omega)$ в математической модели движения корабля и последующей реализации этой функции в работающем рулевом устройстве можно обеспечить устойчивое движение по курсу с малыми отклонениями от заданного курса и наименьшей потерей скорости при рыскании корабля на курсе. Реализующий наилучшим образом все эти требования регулятор называют оптимальным регулятором и он зависит, разумеется, от спектра возмущающих сил. Для спектров вида (9) он зависит от коэффициентов α и β . Примеры этих зависимостей и методы построения и реализации оптимальных регуляторов приведены в публикации [2].

Пояснив на простом примере управления по курсу особенности управления при случайных воздействиях, перейдём к общей проблеме управления для объектов, математическими моделями которых являются уравнения (1) при квадратичных критериях качества.

Если объект управления (1) замкнут регулятором с обратной связью $u = -\sigma(\omega) \omega$, то средний квадрат регулируемой величины x равен интегралу

$$\sigma^2 \geq \int_0^\infty |\sigma(\omega \omega) + \sigma(\omega \omega) \sigma(\omega \omega)|^2 \cdot \sigma_\omega(\omega) \omega \omega,$$

т.е. равен интегралу от произведения двух функций от переменной ω (частоты). Первая функция – это квадрат модуля передаточной функции объекта управления с учётом управления $\sigma = -\sigma(\omega) \omega$, а вторая – это спектр $\sigma_\omega(\omega)$ возмущающих сил. Если этот спектр известен, то хорошо известны и описанные в многочисленных руководствах методы, позволяющие вычислить и реализовать управление, наилучшее (оптимальное) для данного спектра. История вопроса и различные подходы к оптимизации управления изложены в очерке [3].

Оптимальное управление наилучшим образом подходит для конкретного спектра возмущающих воздействий, но возможны такие условия работы управляемого объекта, когда ему приходится сталкиваться с различными возмущающими воздействиями и нужно, чтобы единый регулятор $\sigma = -\sigma(\omega) \omega$ обеспечил для него хорошее качество работы для любого из возможных спектров. Характерным примером является управление кораблём по курсу в различных погодных условиях, а, значит, и при различных спектрах с которыми придётся встретиться в ходе плавания.

Дойл, Френсис и ряд других авторов сначала в серии журнальных статей (первая статья опубликована в 1981 году), а, затем, в монографиях [4] и [5] предложили следующий подход к решению данной задачи. Регулятор $\sigma = -\sigma(\omega) \omega$ следует подбирать так, чтобы частотная характеристика замкнутой системы (объект управления замкнутый регулятором) имела бы возможно более равномерную частотную характеристику в интересующем нас интервале частот. Если эта характеристика идеально равномерна, то при любом спектре $\sigma_\omega(\omega)$ (с нормирующим условием $\int_0^\infty \sigma_\omega(\omega) \omega \omega = 1$) возмущающего воздействия средний квадрат регулируемой величины будет постоянной величиной, не зависящей от спектра. Если частотная характеристика примерно равномерна, то отклонения $\langle \sigma^2 \rangle$ от постоянной величины для всех $\sigma_\omega(\omega)$ будут не велики.

Для обеспечения постоянства частотной характеристики замкнутой системы и соответствующего выбора регулятора $\Pi = -\Pi(\omega)\Pi$ была предложена довольно сложная методика, основанная на известной теореме Пика-Неванлинна. Эта методика была развита российскими учёными (см. обзорные статьи [6] и [7] и монографию [8]). Заметим, что символы H^∞ или H_∞ в этих работах связаны с фамилией математика Харди (Hardy), который ввел понятия «пространство Харди» с соответствующей метрикой.

Однако более подробный анализ показывает, что обеспечение возможно более равномерной частотной характеристики не является наилучшим решением.

Рассмотрим объект управления

$$\Pi + 1 \Pi = \Pi + \Pi \Pi \quad (13)$$

с критерием качества $\Pi = \langle \Pi^2 \rangle + \langle \Pi^2 \rangle$, учитывающим расходы на управление. Для объекта управления

$$\Pi^2 \geq \int_0^\infty \Pi_\Pi(\omega) \Pi \Pi = 1 \quad (14)$$

выбранный критерий качества зависит линейно от среднего квадрата возмущающего воздействия и более сложно зависит от его спектра. В дальнейшем возмущающее воздействие будем нормировать, т.е. считать, что $\langle \Pi^2 \rangle = 1$. Пересчёт на другие значения $\langle \Pi^2 \rangle$ затруднений не представляет.

Для такого простого объекта как (13) сразу видно, что наиболее опасным возмущающим воздействием является постоянная сила $\Pi(\omega) = 1$, для которой к минимуму критерия качества приводит управление

$$\Pi = -\Pi \Pi, \quad (15)$$

при котором уравнение движения объекта приобретает вид

$$\Pi + 1 + \Pi \Pi = \Pi \Pi, \quad (16)$$

исходя из чего среднее значение принимает вид

$$\Pi^2 \geq \int_0^\infty \Pi_\Pi \cdot \frac{\Pi \Pi}{(1 + \Pi)^2 + \Pi^2} \leq \frac{1}{(1 + \Pi)^2} \quad (17)$$

$$\Pi^2 \geq \Pi^2 \cdot \langle \Pi^2 \rangle \leq \frac{\Pi^2}{(1 + \Pi)^2} \quad (18)$$

олучаем оценку критерия качества

$$\Pi = \langle \Pi^2 \rangle + \langle \Pi^2 \rangle = \int_0^\infty \Pi'_\Pi(\omega) \cdot \frac{(1 + \Pi^2) \Pi \Pi}{(1 + \Pi)^2 + \Pi^2} \leq \frac{1 + \Pi^2}{(1 + \Pi)^2}$$

Мы убеждены, что при наиболее опасном возмущающем воздействии $\Pi = 1$ (спектром которого является известная δ -функция Дирака $\delta(0)$ в начале координат) значение критерия качества наибольшее и равно $\frac{1 + \Pi^2}{(1 + \Pi)^2}$, а для всех других спектров критерий качества меньше своего максимального значения. Это означает, что управление (15) является гарантирующим – оно гарантирует, что для любых спектров критерий качества будет не больше, а чаще всего меньше, легко вычисляемого гарантированного значения.

Понятно, что гарантирующее управление, которое для большинства спектров обеспечивает критерию качества значительно меньшую величину, чем для спектра наихудшего, обеспечивает для управляемого объекта лучший результат его работы, чем оптимизация по равномерно-частотным показателям, когда критерий качества для всех возможных спектров остаётся примерно постоянной величиной.

Первые примеры гарантирующих управлений и сам термин «гарантирующее управление» были приведены ещё в монографии [2, с.115-120]. Многочисленные примеры и методы синтеза гарантирующих управлений приведены в публикации [9]. Однако, после появления в 1981 году первой статьи Зеймса (Zames) по «равномерно-частотной оптимизации» (содержание статьи приведено в обзоре [6]) хлынул целый вал статей и, затем, монографий по этой тематике, часто также называемой «методикой H^∞ управления» или « H^∞ теорией оптимизации». Символы H^∞ (иногда H_∞) запестрели в заглавиях и текстах множества статей как отечественных, так и зарубежных учёных. На фоне этого бурного потока работ по « H^∞ оптимизации» почти совершенно не замеченными остались публикации по гарантирующему управлению, несмотря на все их преимущества перед « H^∞ управлением». История вопроса изложена в монографии [3, с.166-182].

Методика синтеза гарантирующего регулятора не является сложной. Для объектов управления, математическими моделями которых служат уравнения (1), достаточно выполнить следующие операции:

Сначала вычислим значение $\Pi = \Pi$, при котором достигает наименьшего значения функция

$$\Pi = |\Pi(\omega)|^2 + \Pi^2 |\Pi(\omega)|^2. \quad (19)$$

Наиболее неблагоприятным спектром для объекта (1) в этом случае является спектр в виде δ -функции Дирака $\delta(\beta)$ с аргументом β . Если $\beta=0$, то в этом случае спектр $\Pi_\Pi(\omega) = \delta(0)$ соответствует возмущающему воздействию в виде постоянной силы $\Pi(\omega) = 1$. Если $\beta \neq 0$, то спектру $\Pi_\Pi(\omega) = \delta(\omega)$ соответствует гармоническое колебание с частотой β , т.е. в этом случае $\Pi(\omega) = \Pi \Pi \Pi \Pi$.

На втором этапе синтезируем регулятор, оптимальный для возмущающего воздействия $\Pi(\omega) = 1$, (если минимум функции (19) достигается при $\omega=0$), либо оптимальный для $\Pi(\omega) = \Pi \Pi \Pi \Pi$, (если этот минимум достигается при $\omega=\beta$).

Далее, для найденного оптимального регулятора $\Pi = -\Pi(\omega)\Pi$ проверяем поведение функции

$$\Pi \Pi \Pi + \Pi(\omega) \Pi(\omega) \Pi(\omega) \Pi. \quad (20)$$

Если для любого ω эта функция не больше (а еще лучше, если меньше), чем при $\omega=\beta$, то синтезированный регулятор является гарантирующим.

Поясним второй этап. Регулятор, оптимальный для возмущающих воздействий $\square(\square) = I$ или $\square(\square) = \square\square\square\square$ со спектрами $\delta(0)$ и $\delta(\square)$ не может быть синтезирован по общим методикам синтеза оптимальных регуляторов, изложенным, например, в издании [1], поскольку все эти методики предполагают запись спектра в виде рациональной дроби. Однако, δ -функции Дирака $\delta(\omega=0)$ и $\delta(\omega=\beta)$ можно рассматривать как пределы многих рациональных дробей.

Пример. Спектры в виде рациональных дробей

$$\square 1\square\square=2\square\cdot\square\square 2+\square 2 \quad 21)$$

$$\square 2\square\square=4\square\cdot\square 3(\square 2+\square 2)2 \quad 22)$$

при $\square \rightarrow 0$ переходят в одну и ту же δ -функцию Дирака $\delta(0)$. Если необходимо для объекта управления (13) с критерием качества $\square = 3 < \square^2 > + < \square^2 >$ построить регулятор, оптимальный для δ -функции Дирака $\delta(0)$, то можно построить регулятор, оптимальный для спектра (21) и он будет иметь вид

$$\square = -\left(\frac{1}{1+\square} \square + \frac{3+\square}{1+\square}\right) \square. \quad 23)$$

В пределе при $\square \rightarrow 0$ он перейдет в регулятор

$$\square = -(\square + 3)\square, \quad 24)$$

оптимальный для δ -функции Дирака $\delta(0)$.

Если взять за основу при проектировании регулятора вместо спектра (21) спектр (22), то получим регулятор

$$\square = -\left[\frac{6+6\square+\square^2+(3+2\square)\square+\square^2}{2+2\square+\square^2-\square}\right] \square, \quad 25)$$

который в пределе, при $\square \rightarrow 0$, перейдет в регулятор

$$\square = -\left[\frac{6+3\square+\square^2}{2-\square}\right] \square. \quad 26)$$

И регулятор (24) и регулятор (26) в равной мере являются гарантирующими, но регулятор (24) проще и, поэтому, более удобен.

Любопытно, что существует ещё более простой регулятор $u = -3x$, тоже являющийся гарантирующим. Вообще, для объектов управления, у которых функция (19) достигает наименьшего значения при $\omega=0$ (а таких объектов много), часто имеют простые гарантирующие регуляторы вида $u = -kx$. Возможно, что именно этим объясняется широкое распространение простых пропорциональных регуляторов $u = -kx$ до самого последнего времени.

Если наименьшее значение функции (19) достигается при $\omega=\beta \neq 0$, то в этом случае надо искать регулятор, оптимальный для дельта-функции Дирака $\delta(\omega=\beta)$. Для того, чтобы и в этом случае использовать стандартную методику, можно искать регулятор оптимальный, например, для спектра (9), а, затем, перейти к пределу при $\square \rightarrow 0$. Если же вместо спектра (9) использовать похожий спектр

$$\square\square=4\square\square\cdot\square 2+\square 2(1+\square 2\square 2)(\square 2+\square 2+\square 2)2-4\square 2\square 2,$$

то управляемый объект (как показано в монографии [1]), получит дополнительное свойство сохранения устойчивости при малых вариациях параметров.

Вообще, наличие не одного, а многих гарантирующих регуляторов позволяет выбрать из них наиболее простой и удобный, а также удовлетворяющий дополнительным требованиям к системе управления. Поэтому гарантирующие регуляторы могут иметь весьма широкую область применения.

Библиографический список

- Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. – 289с.
- Петров Ю.П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. – Л.: Судостроение, 1973. – 216с.
- Петров Ю.П. Очерки истории теории управления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 266с.
- J.Doyle, B.Fransis, A.Tannenbaum. Control Theory. New York: Macmillan Publ.Co., 1992. – 227p.
- Fransis B.A. A Course in H_∞ Control Theory. Berlin: Springer Verlag, 1987. – 156p.
- Барабанов А.Е., Первозванский А.А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H^∞ теория). //Автоматика и телемеханика, 1992. №9. – С.3-32.
- Себряков Г.Г., Семенов А.В. Методы H^∞ теории управления. //Техническая кибернетика, 1989. №2. – С.3-16.
- Веремей Е.И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. – 442с.
- Петров Ю.П. Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 191с.