УРАВНЕНИЕ ЛЬЕНАРА КАК МЕТОД РАСЧЕТА РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ

Макарова Мария Валентиновна
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

LIENAR'S EQUATION AS A METHOD OF CALCULATING ELECTRONIC CIRCUITS

Makarova Mariya Valentinovna
Saint Petersburg State University of
Aerospace Instrumentation

Построены приближенные решения уравнения Лье́нара в форме высокочастотного колебания с переменной огибающей и фазой. Аналогом этого уравнения в радиоэлектронике является схема автогенератора, содержащего туннельный диод с кубической аппроксимацией вольт-амперной характеристики.

Built approximate solutions of the Lienar equation in the form of high-frequency oscillation with variable envelope and phase. An analogue of this equation in radio electronics is the circuit of an auto generator containing a tunnel diode with a cubic approximation of volt-amperical characteristics.

Ключевые слова: электрическая цепь, автогенератор, аппроксимация, дифференциальное уравнение, высокочастотное колебание.

Keywords: electrical circuit, auto generator, approximation, differential equation, high-frequency oscillation.

В теории электрических цепей схемы, содержащие нелинейные элементы, часто описываются дифференциальным уравнением типа Лье́нара с квадратичным трением и с кубическим характером восстанавливающей силы. Известны некоторые приложения частных случаев этого уравнения.

Так уравнение Ван-дер-Поля описывает режим работы лампового генератора. Уравнение Дюффинга отвечает пассивной синхронизации мод в лазере с быстро релаксирующим поглотителем [1].

Рассмотрим схему одноконтурного автогенератора с активным двухполюсником - туннельным диодом, характеризующимся кубической аппроксимацией вольт - амперной характеристики на падающем ее участке в окрестности рабочей точки $V=V_0$:

$$I(V_0+U) = I_0 + D_1U + D_2U^2 + D_3U^3, \quad (1)$$

где D_1, D_2, D_3 - постоянные аппроксимации. Эти коэффициенты зависимости тока диода I от напряжения V имеют следующий смысл:

$$D_1 = \left(\frac{dI}{dV}\right)_{V=V_0}, D_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2I}{dV^2}\right)_{V=V_0}, D_3 = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3I}{dV^3}\right)_{V=V_0}.$$

Коэффициент D_1 представляет собой крутизну характеристики в некоторой точке $V=V_0$; D_2 и D_3 - первую и вторую производную от крутизны и, естественно, они зависят от положения рабочей точки на характеристике. Варьируя сопротивление потерь R и напряжение источника E , можно добиться различного расположения прямой

$$I = -\frac{1}{R}V + \frac{E}{R},$$

пересекающей вольт - амперную характеристику на падающем участке кривой или в одной точке при $V = V_{02}'$, или в двух точках в случае касания, либо в трех точках $V = V_{01}$, $V = V_{02}$, $V = V_{03}$. Прежде всего интерес представляет локальная устойчивость состояния схемы при выборе точки равновесия на падающем участке с координатами $V=V_0$, $I_0=I(V_0)$. Замена $V(t)=V_0+U(t)$ (где $U(t)$ - вспомогательная функция, t - время) переносит начало координат в эту точку, для окрестности которой и записано разложение в ряд Тейлора (1).

Для написания нелинейного дифференциального уравнения, отвечающего схеме, воспользуемся символическим методом, т. е. будем применять оператор дифференцирования $p=d/dt$. При этом символические сопротивления элементов схемы: индуктивности L и емкости C запишутся в виде: $R_L = pL$, $R_C = 1/pC$ при активном сопротивлении R .

Учтём также, что оператору p^2 соответствует двукратное дифференцирование по времени $p^2 = d^2/dt^2$. В этих обозначениях для символического сопротивления параллельного колебательного контура схемы располагаем выражением [2]:

$$Z(p) = \frac{R+pL}{p^2LC+pRC+1}. \quad (2)$$

Тогда на основании закона Кирхгофа для цепи (рис.1) имеем символическое уравнение баланса напряжений

$$Z(p) I + V = E. \quad (3)$$

Подставляя (2) в (3), получаем $(p^2LC+pRC+1)(E-V) = (R+pL)I$.

Переходя от символической записи к дифференциальному уравнению, имеем

$$LC \frac{d^2}{dt^2}(E-V) + CR \frac{d(E-V)}{dt} + (E-V) = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Поскольку э.д.с. источника E постоянна, а производная от тока диода по времени равна

$$\frac{dI}{dt} = D_1 \frac{dU}{dt} + 2D_2 U \frac{dU}{dt} + 3D_3 U^2 \frac{dU}{dt}, \quad (4)$$

дифференциальное уравнение преобразуется к следующему:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\frac{R}{L} + \frac{D_1}{C} + \frac{2D_2}{C} U + \frac{3D_3}{C} U^2 \right) \frac{dU}{dt} + \frac{RD_1+1}{LC} U + \frac{RD_2}{LC} U^2 + \frac{RD_3}{LC} U^3 = \frac{E-V_0-RI_0}{LC}. \quad (5)$$

Обозначим (6)

$$a_1 = \frac{R}{L} + \frac{D_1}{C}, \quad a_2 = \frac{D_2}{C}, \quad a_3 = \frac{D_3}{C}, \quad b_1 = \frac{RD_1+1}{LC}, \quad b_2 = \frac{RD_2}{LC}, \quad b_3 = \frac{RD_3}{LC}, \quad d = \frac{E-V_0-RI_0}{LC}.$$

Тогда (5) перепишется в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + (a_1 + 2a_2U + 3a_3U^2) \frac{dU}{dt} + b_1U + b_2U^2 + b_3U^3 = d. \quad (7)$$

Обратим внимание на размерности коэффициентов уравнения, учитывая, что входящие в схему элементы имеют следующие размерности:

$$[R] = B/A, [L] = Bc/A, [C] = Ac/B, [D_1] = A/B, [D_2] = A/B^2, [D_3] = A/B^3,$$

где A - ампер, B - вольт, c - секунда. Тогда:

$$[a_1] = c^{-1}, [a_2] = B^{-1}c^{-1}, [a_3] = B^{-2}c^{-1}, [b_1] = c^{-2}, [b_2] = B^{-1}c^{-2}, [b_3] = B^{-2}c^{-2}, [d] = Bc^{-2},$$

и, следовательно, размерности каждого слагаемого в уравнении (7) будут Bc^{-2} .

Прежде, чем приступить к отысканию решения нелинейного дифференциального уравнения (7), рассмотрим поведение эквивалентного сопротивления контура $Z(p)$ из (2) при изменении частоты ω , к которой переходим при замене $p = i\omega$ [2].

$$Z(\omega) = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR}.$$

Для его модуля имеем формулу

$$|Z(\omega)| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}},$$

которую перепишем в виде

$$|Z(\omega)| = RQ \sqrt{\frac{1 + Q^2(\omega/\omega_0)^2}{Q^2(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega/\omega_0)^2}},$$

где $Q = \sqrt{L/C}/R = \omega_0 L/R$ - добротность контура; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ - частота колебательного контура. Максимальное значение модуля эквивалентного сопротивления $|Z(\omega)|$ достигается при частоте

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{Q\sqrt{Q^2+2}-1}{Q^2}}. \quad (8)$$

и поскольку добротность Q обычно много больше единицы, то, следовательно, из (8) $\omega \approx \omega_0$.

Отнормируем модуль эквивалентного сопротивления $|Z(\omega)|$ к его максимальному значению на частоте ω_0 , т.е. будем рассматривать величину

$$K(\omega) = \frac{|Z(\omega)|}{|Z(\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} \sqrt{\frac{1+Q^2(\omega/\omega_0)^2}{Q^2(1-(\omega/\omega_0)^2)^2+(\omega/\omega_0)^2}}. \quad (9)$$

При $\omega = 2\omega_0$ $K(\omega)$ достигает значения, равного $2/(3Q)$, а при $\omega = 3\omega_0$ - значения, равного $3/(8Q)$.

Будем искать решение уравнения (7) в виде гармонического колебания с частотой ω_0 , фазой φ и неизвестной огибающей $A(t)$:

$$U(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (10)$$

Перед подстановкой (10) в (7) предварительно найдем dU/dt , UdU/dt , $U^2 dU/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \dot{A} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ U \frac{dU}{dt} &= \frac{A\dot{A}}{2} + \frac{A\dot{A}}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\omega_0 A^2}{2} \sin 2(\omega_0 t + \varphi), \\ U^2 \frac{dU}{dt} &= \frac{3A^2\dot{A}}{4} \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{A^2\dot{A}}{4} \cos 3(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\omega_0 A^3}{4} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\omega_0 A^3}{4} \sin 3(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя полученные выражения (11) в (7), имеем:

$$\begin{aligned} &(3a_3\dot{A}A^2/4 + b_3A^3/4) \cos 3(\omega_0 t + \varphi) - (3/4)\omega_0 a_3 A^3 \sin 3(\omega_0 t + \varphi) + \\ &+ (a_2\dot{A}A + b_2A^2/2) \cos 2(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 a_2 A^2 \sin 2(\omega_0 t + \varphi) + \\ &+ (\ddot{A} - \omega_0^2 A + a_1\dot{A} + 9a_3A^2\dot{A}/4 + b_1A + 3b_3A^3/4) \cos(\omega_0 t + \varphi) - \\ &- (2\omega_0\dot{A} + a_1\omega_0 A + 3a_3\omega_0 A^3/4) \sin(\omega_0 t + \varphi) + a_2A\dot{A} + b_2A^2/2 - d = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Слагаемые в (12) с удвоенной и утроенной частотой ω_0 отбрасываются вследствие избирательных свойств колебательного контура, настроенного на частоту ω_0 и его высокой добротности $Q \sim 400$, при этом в соответствии с (9) относительное значение модуля эквивалентного сопротивления на удвоенной частоте достигает величины 0,002, а на утроенной - величины 0,001 по сравнению с его значением на частоте ω_0 . Поскольку (12) должно выполняться при любом значении времени, то, следовательно, надо потребовать, чтобы

$$\ddot{A} + a_1\dot{A} + 9a_3A^2\dot{A}/4 + (b_1 - \omega_0^2)A + 3b_3A^3/4 = 0, \quad (13)$$

$$\dot{A} + a_1A/2 + 3a_3A^3/8 = 0, \quad (14)$$

$$a_2A\dot{A} + b_2A^2/2 - d = 0. \quad (15)$$

Продифференцируем (14) по времени

$$\ddot{A} = -a_1\dot{A}/2 - 9a_3A^2\dot{A}/8$$

и подставим его в (13), тогда (13) перепишется в виде

$$a_1\dot{A}/2 + 9a_3A^2\dot{A}/8 + (b_1 - \omega_0^2)A + 3b_3A^3/4 = 0. \quad (16)$$

Из (15) выразим величину

$$A\dot{A} = \frac{d - (b_2/2)A^2}{a_2},$$

и подставим ее в (16), тогда приходим к уравнению

$$\dot{A} + \left(\frac{9a_3d}{4a_1a_2} + \frac{2(b_1 - \omega_0^2)}{a_1} \right) A - \left(\frac{9a_3b_2}{8a_1a_2} - \frac{3b_3}{2a_1} \right) A^3 = 0. \quad (17)$$

В силу введенных обозначений (6) $b_1 - \omega_0^2 = \omega_0^2 RD_1$. Введем три новые величины α, β, γ на основании (6): $\alpha = \frac{\omega_0^2}{a_1} \left(\frac{9a_3}{4a_2} (E - V_0 - RI_0) + 2RD_1 \right)$ с размерностью $[\alpha] = c^{-1}$,

$$\beta = \frac{3}{2a_1} \left(\frac{3a_3b_2}{4a_2} - b_3 \right) \text{ с размерностью } [\beta] = B^{-2}c^{-1}, \quad (18)$$

$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ с размерностью $[\gamma] = B$.

В этих обозначениях перепишем уравнение (17)

$$\dot{A} + \alpha A - \beta A^3 = 0,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными

$$\frac{dA}{A(A^2 - \gamma^2)} = \beta dt. \quad (19)$$

Разложим дробь $1/(A(A^2 - \gamma^2))$ на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{A(A^2 - \gamma^2)} = \frac{1}{2\gamma^2} \frac{1}{A - \gamma} + \frac{1}{2\gamma^2} \frac{1}{A + \gamma} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{A}.$$

Проинтегрируем (19) в интервале изменения времени от нуля до t

$$\frac{1}{2\gamma^2} \ln \left| \frac{A(t) - \gamma}{A(0) - \gamma} \right| + \frac{1}{2\gamma^2} \ln \left| \frac{A(t) + \gamma}{A(0) + \gamma} \right| - \frac{1}{\gamma^2} \ln \left| \frac{A(t)}{A(0)} \right| = \beta t,$$

откуда при $A(t) < \gamma$

$$\ln \left| \frac{\gamma^2 - A^2(t)}{\gamma^2 - A^2(0)} \right| - 2 \ln \left| \frac{A(t)}{A(0)} \right| = 2\gamma^2 \beta t.$$

На основании (18) последнее выражение запишем в виде

$$\ln \left| \frac{[\gamma^2 - A^2(t)]A^2(0)}{[\gamma^2 - A^2(0)]A^2(t)} \right| = 2\alpha t,$$

откуда получаем выражение для огибающей

$$A(t) = \frac{\gamma A(0)}{\sqrt{A^2(0) + [\gamma^2 - A^2(0)]e^{2\alpha t}}}. \quad (20)$$

Интересно отметить, что квадрат огибающей соответствует типичному ходу логистической кривой [3] с точкой перегиба при

$$t = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{A^2(0)}{\gamma^2 - A^2(0)} \right|,$$

в которой ее значение достигает величины $\gamma^2/2$. Естественно, что поведение этой кривой будет существенно зависеть от величины и знака эффективного затухания α , связанного со всеми коэффициентами уравнения (7), а также от параметра насыщения γ .

Заметим, что при в схеме возможна генерация только при нахождении рабочей точки на падающем участке вольт - амперной характеристики (1) туннельного диода. Предельное значение напряжения генерации найдем из системы:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2U + 3a_3U^2 = 0, \\ b_2U^2 + b_3U^3 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Из второго уравнения системы (21) следует, что

$$U^2(b_2 + b_3U) = 0.$$

Так как $U \neq 0$, то $U = U_{ген} = -b_2/b_3$. Подставляя найденное значение U в первое уравнение, получаем условие генерации:

$$a_1b_3^2 - 2a_2b_2b_3 + 3a_3b_2^2 = 0.$$

Заметим, что $U_{ген}$ можно выразить через коэффициенты аппроксимации (1) вольт - амперной характеристики. Действительно, следуя (6):

$$b_2 = \omega_0^2 R D_2, \quad b_3 = \omega_0^2 R D_3, \quad \omega_0 = \sqrt{b_1} = 1/\sqrt{LC},$$

получаем $U_{ген} = -D_2/D_3$.

Если считать, что в начальный момент времени $(dU/dt)|_{t=0} = 0$, то на основании (11) имеем условие для нахождения фазы колебания φ : $\dot{A}(0) \cos \varphi - A(0)\omega_0 \sin \varphi = 0$, откуда $\varphi = \arctg \omega_0^{-1} \frac{\dot{A}(0)}{A(0)}$.

Предположим теперь, что фаза в (10) зависит от времени t , т. е. будем искать решение уравнения (7) в виде

$$U(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (7), пренебрегая слагаемыми с удвоенной и утроенной частотой ω_0 , согласно изложенному и применённому ранее, при $\varphi = \text{const}$ способу, получаем условия, аналогичные (13) – (15):

$$\ddot{A} - A(\omega_0 + \dot{\varphi})^2 + a_1A + (9/4)a_3A^2\dot{A}/4 + b_1A + (3/4)b_3A^3 = 0, \quad (23)$$

$$2\dot{A}(\omega_0 + \dot{\varphi}) + A\ddot{\varphi} + a_1A(\omega_0 + \dot{\varphi}) + (3/4)a_3A^3(\omega_0 + \dot{\varphi}) = 0, \quad (24)$$

$$a_2A\dot{A} + (1/2)b_2A^2 - d = 0. \quad (25)$$

Пусть $A(t)$ - медленно изменяющаяся функция времени. Это означает, что ее относительное изменение ΔA за период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$ много меньше единицы: $\Delta A/A \ll 1$. Естественно, что абсолютное изменение ΔA за этот период можно представить $\Delta A = (dA/dt)T_0$, откуда

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\Delta A}{T_0} = \frac{\Delta A}{A} \cdot \frac{A}{T_0}$$

и, так как $\Delta A/A \ll 1$, то

$$\frac{dA}{dt} \ll \frac{A}{T_0} \ll \frac{A\omega_0}{2\pi},$$

или $(dA/dt) \ll A\omega_0$. Аналогично: $(d^2A/dt^2) \ll \omega_0(dA/dt)$.

Производная $d\varphi/dt = \dot{\varphi}$ характеризует отклонение частоты $\omega(t) = (\omega_0 + \dot{\varphi})$ от несущей частоты ω_0 и, чтобы колебание с частотой $\omega(t)$ было бы очень близким к синусоидальному необходимо, чтобы изменение этой

частоты за один период T_0 было бы малым по сравнению с частотой $\omega(t)$ в фиксированный момент времени t , т.е. условие медленности изменения фазы $\varphi(t)$ сводится к условию

$$\frac{1}{\omega(t)} \left| \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right| T_0 \ll 1 \text{ или } \ddot{\varphi} \ll \frac{\omega(t)}{T_0} \ll \frac{\omega(t)\omega_0}{2\pi} \ll \frac{\omega_0^2}{2\pi}, \quad \dot{\varphi} \ll \omega_0, \quad \ddot{\varphi} \ll \omega_0 \dot{\varphi}.$$

С учетом сделанных замечаний, преобразуя (23) - (25), получаем уравнения для нахождения $A(t)$

$$\dot{A} + \tilde{\alpha}A - \tilde{\beta}A^3 = 0, \quad (26)$$

где $\tilde{\alpha} = (1/\omega_0)((9a_3d)/(4a_2) - 4\omega_0^2 + a_1 + b_1)$; $\tilde{\beta} = (9a_3b_2)/(8a_2) - (3b_3)/4$; $\tilde{\gamma} = \sqrt{\tilde{\alpha}/\tilde{\beta}}$.
Решением уравнения (26) является функция

$$A(t) = \frac{\tilde{\gamma}A(0)}{\sqrt{A^2(0) + (\tilde{\gamma}^2 - A^2(0))e^{2\tilde{\alpha}t}}}.$$

Выпишем уравнение для нахождения фазы $\varphi(t)$ из (24)

$$\dot{\varphi} = -4\frac{\dot{A}}{A} - 2a_1 - \frac{3}{2}a_3A^2. \quad (27)$$

Проинтегрируем (27) в пределах изменения времени от нуля до t . Применяя формулу, $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{mx - \ln(a+be^{mx})}{am}$ получаем $\varphi(t) = \eta t + J + \Psi(t)$, где $\eta = \left(\frac{3}{2}\right)a_3\tilde{\gamma}^2 - 2a_1$; $J = -((3/2)a_3\tilde{\gamma}^2/\tilde{\alpha} + 4)\widetilde{\ln \gamma}$; $\Psi(t) = ((3/2)a_3\tilde{\gamma}^2/\tilde{\alpha} - 2)\ln(A^2(0) + (\tilde{\gamma}^2 - A^2(0))e^{2\tilde{\alpha}t})$.

Напряжение на выходе контура $U_{\text{вых}}(t)$ на основании (3) $U_{\text{вых}}(t) = IZ(p) = E - V(t)$ или при переходе к функции $U(t)$, для которой и строится решение уравнения Льенара, $U_{\text{вых}}(t) = E - V_0 - U(t)$. Поскольку в момент включения источника при $t = 0$ выходное напряжение равно нулю, то, следовательно, $U(0) = E - V_0$ и тем самым начальное значение амплитуды $A(0)$, например при нулевой фазе, $A(0) = E - V_0$.

Время установления стационарных колебаний

$$t_q = \frac{1}{2\alpha} \ln \frac{(1 - q^2)A^2(0)}{q^2(\gamma^2 - A^2(0))},$$

где параметр q , характеризующий долю достижения уровня насыщения γ , определяется из (20) как $q = A(t_q)/\gamma$.

Таким образом, на примере автогенератора на туннельном диоде показано построение приближенного решения уравнения Льенара в форме высокочастотного колебания с переменной огибающей и переменной фазой, отражающих влияние всех коэффициентов.

Список литературы:

1. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Радио и связь, 1986.
2. Капранов М.В., Кулешов В.Н., Уткин Г.М. Теория колебаний в радиотехнике. - М.: Наука 1984.
3. Тайбин Б.З. Методы обнаружения параметров многоэкспоненциальных кривых релаксации. СПбГУ, 1994.