Une formulation parabolique des équations de propagation des ondes de gravité en surface

M. Chagdali*, S. Mordane** et K. L. Maroihi***

Professeur, ** Maitre assistante, *Doctorant*

Laboratoire de Calcul Scientifique en Mécanique (LCSM)

Faculté des Sciences Ben M'Sik

Av. Cdt D El Harti BP 6621 Casablanca Maroc

E-mail: cui@techno.net.ma

Résumé:

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude d'une formulation parabolique des équations de propagation des ondes de gravité en surface en terme de capacité angulaire par rapport à la direction de propagation privilégiée. Cette formulation parabolique est obtenue par éclatement de l'équation de Berkhoff en deux opérateurs paraboliques que l'on approche par les Approximants de Padé pour accéder simultanément à des équations paraboliques pour les ondes transmises et pour les ondes réfléchies. Deux exemples références, qui représentent la propagation de la houle en présence d'une caustique, seront étudiés numériquement et les résultats seront comparés avec ceux de la littérature.

Abstract:

In this work, we are interested upon the parabolic formulation of propagation equations of gravity waves in surface in terms of angular capability with respect to the privileged propagation direction. This parabolic formulation is obtained by splitting the Berkhoff equation operator into two parabolic operators representing progressive and retrograde wave propagation. The use of Padé Approximants permits to derive simultaneously parabolic equations for the transmitted waves and the reflected waves. Two well known reference examples, which represent the propagation of swell when a caustic occur, will be studied numerically and results will be compared with those of the literature.

1-Introduction:

Historiquement, les premiers codes de calcul de la propagation de la houle étaient basés sur la théorie des rayons qui prend en compte l'effet de la réfraction pure. Cette méthode montre très vite ses limites lorsque se présentent des îles, des caps ou des hauts fonds, vers lesquels tous les rayons convergent. Le calcul fait alors apparaître un point de convergence où l'énergie est infinie, appelé communément caustique. Ces méthodes sont également prises en défaut dans le cas où les effets combinés de la réfraction, de la diffraction et de la réflexion deviennent importants. Berkhoff [1] a proposé, dans le cadre d'une analyse des ondes linéaires harmoniques, une équation qui prend en compte les effets combinés de la réfraction et de la diffraction, valable pour des fonds de pente faible.

L'équation proposée par Berkhoff est elliptique. Parmi les difficultés liées à sa résolution, on trouve la nécessité d'une part d'écrire les conditions aux limites ouvertes et d'autre part de discretiser tout le domaine d'étude. De récents développements ont été réalisés, toujours dans le cadre de la théorie linéaire pour des fonds de pente faible, qui portent en particulier sur les approximations paraboliques de l'équation de Berkhoff. L'idée de base est de projeter cette équation sur une direction moyenne proche de la direction de propagation privilégiée. Le problème qui était elliptique au départ se ramène à un problème parabolique plus simple à traiter, que l'on peut résoudre comme un problème à valeurs au départ. De ce fait, la parabolisation de l'équation de Berkhoff suscite un intérêt particulier vu l'avantage qu'elle présente en termes de modélisation numérique pour les problèmes de propagation sur des domaines relativement importants, comme par exemple pour la propagation du large vers la côte. Mais cependant, ces équations présentent un point faible venant du fait qu'elles ne sont que des approximations de l'équation elliptique de Berkhoff : elles ne sont valables que sur un intervalle d'angles restreint s'étendant de part et d'autre de la direction de propagation privilégiée, communément appelé capacité angulaire.

L'équation de Radder [2] pour les ondes progressives compte parmi les équations paraboliques les plus utilisées en génie côtier. Cette équation est valable tant que la rotation des crêtes de la houle n'excède pas 30° de part et d'autre de la direction de propagation privilégiée [3]. Parmi les travaux réalisés sur l'amélioration de la capacité angulaire, on peut citer celui de Kirby [4] qui est parvenu à une équation permettant d'aller jusqu'à un écart angulaire de 50°. Dans ce travail, nous reprenons dans un premier temps la démarche adoptée par Radder [2] qui consiste à transformer l'équation de Berkhoff en une équation d'Helmholtz. Ensuite, nous réécrivons cette équation sous forme d'un produit de deux opérateurs paraboliques que nous approchons par les Approximants de Padé. Les simulations numériques sont effectuées par la méthode des différences finies avec un schéma de Crank-Nicolson. La validité de notre approche est discutée sur deux exemples références existant dans la littérature.

2- les équations paraboliques:

L'équation de Berkhoff s'écrit [1]:

$$\text{div}(CC_g \text{grad}(\phi)) + k_o^2 CC_g \phi = 0. \quad (1)$$

ϕ est le potentiel des vitesses, C et C_g sont respectivement la célérité et la vitesse de groupe et k_o est le nombre d'onde. En procédant au changement de variable $\varphi = \sqrt{CC_g} \phi$, on aboutit, comme dans le papier de Radder [2], à l'équation d'Helmholtz :

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

où

$$k^2 = k_o^2 - \frac{\nabla^2 (CC_g)^{\frac{1}{2}}}{(CC_g)^{\frac{1}{2}}}$$

Le nombre d'onde k_0 vérifie localement la relation de dispersion $\omega^2 = gk_0 \tanh(k_0 h)$, h étant la profondeur locale, ω la fréquence angulaire et g la gravité. La célérité et la vitesse de groupe sont données respectivement par:

$$C = \frac{\omega}{k_0} \quad ; \quad Cg = \frac{\partial \omega}{\partial k_0}.$$

Dans le cadre de l'hypothèse de la pente douce, l'équation (2) peut être écrite sous la forme factorielle

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\sqrt{1+X} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\sqrt{1+X} \right) \varphi = 0 \quad (3)$$

où

$$X = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

est un opérateur lié à la direction orthogonale à la direction de propagation privilégiée, appelé de ce fait opérateur orthogonal. On remarque que l'équation (3) contient deux informations: une sur l'onde incidente (progressive) et l'autre sur l'onde réfléchie (régressive). Si on néglige les ondes réfléchies, ce qui va de soi avec l'hypothèse de la pente douce, cette équation se réduit à

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\sqrt{1+X} \right) \varphi = 0 \quad (4)$$

Différentes approximations de l'opérateur $\sqrt{1+X}$ peuvent conduire à différentes équations paraboliques. Il a été montré par plusieurs auteurs que la capacité angulaire de ces équations est liée à la manière d'approcher cet opérateur. La première approche se base sur son approximation pour $\|X\| \ll 1$ ($\|X(x)\| = \sup_{|x| \leq 1} |X(x)|$) par le développement en série de Taylor:

$$\sqrt{1+X} \approx 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + \frac{X^3}{16} \dots$$

Les deux premiers termes conduisent à l'équation de Radder [2] dans le cas d'un fond plat ($k=c^{\text{te}}$). Les équations paraboliques basées sur le développement en série de Taylor sont relativement inefficaces. En effet, certaines configurations impliquent des valeurs de $\|X\|$ proches ou supérieures à 1 alors que le rayon de convergence du développement en série de Taylor se limite à 1. Plusieurs termes de la série doivent par conséquent être pris en compte pour traiter ce type de problèmes, ce qui rend leur implantation difficile à cause des puissances élevées de l'opérateur X .

La seconde approche se base sur l'approximation de $\sqrt{1+X}$ par une fonction rationnelle.

L'équation parabolique que nous présentons est basée sur un développement rationnel linéaire:

$$\sqrt{1+X} \cong \frac{p_1 + p_2 X}{q_1 + q_2 X} + o(X^3)$$

Le problème des ondes de surface régit par l'équation (4) se ramène alors à la résolution de l'équation

$$q_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{q_2}{k^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^2 \partial x} = ik \left(p_1 \phi + \frac{p_2}{k^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

L'ensemble des coefficients $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ peuvent être obtenus de plusieurs manières. Kirby [4] les a obtenu en imposant à la fonction rationnelle, à sa dérivée première et à sa dérivée seconde d'être égales à celles de l'opérateur $\sqrt{1+X}$ en $\|X\| = 0$. Les coefficients qu'il a proposé sont $P_k = \{p_1=1, p_2=3/4, q_1=1, q_2=1/4\}$. D'autre part, l'ensemble $P_r = \{p_1=1, p_2=1/2, q_1=1, q_2=0\}$ conduit à l'équation de Radder [2] sur fond plat. Nous utilisons les coefficients $P_a = \{p_1=0.9998707, p_2=0.7962434, q_1=1, q_2=0.3010160\}$ obtenus en minimisant l'erreur maximale sur un intervalle donné compris entre 0 et 1 [5]. Sur la figure 1, nous illustrons le domaine de coïncidence de ces approximations pour l'opérateur $\sqrt{1+X}$. Nous constatons que l'ensemble des coefficients cités précédemment approchent correctement l'opérateur $\sqrt{1+X}$ à l'exception des coefficients de l'ensemble P_r . Une fois cette remarque faite, il est nécessaire d'analyser la capacité angulaire par rapport à l'axe de propagation privilégié de l'onde.

Figure 1: Domaine de coïncidence des approximations
Domain of coincidence of the approximation

3- Analyse de la capacité angulaire

Pour cela, nous considérons le cas de la propagation d'une onde plane sur un fond plat ($k=c^{te}$), ce qui correspond à la solution analytique suivante:

$$\exp(ik(k_x x \pm k_y y)).$$

En remplaçant cette solution dans l'équation (1), équation de Berkhoff, on vérifie que k_x et k_y satisfont la relation de dispersion $k_x^2 + k_y^2 = 1$, ou bien $k_x = \pm \sqrt{1 - k_y^2}$.

La relation de dispersion s'écrit pour l'équation parabolique (5)

$$k_x = \pm \left[\frac{p_1 - p_2 k_y^2}{q_1 - q_2 k_x^2} \right]$$

Ces relations de dispersion sont tracées sur le graphe de la figure 2 pour les deux types d'équation. On peut y mesurer la déviation du parabole (équation (5)) par rapport à la solution exacte de l'équation (1). Ces résultats présentent la relation de dispersion en fonction de l'angle d'ouverture.

Figure 2: Comparaison de la capacité angulaire des différentes approximations
Comparison of the angular capability of the different approximations

En première approximation, le modèle de Radder [2] semble valide si la déviation n'excède pas 30° (ce résultat est mentionné par plusieurs auteurs). Par contre, le modèle que nous proposons permet d'augmenter la capacité angulaire jusqu'à 55°, ce qui améliore légèrement la capacité angulaire de l'équation de Kirby [4].

Ainsi, on a pu augmenter le domaine de convergence et améliorer la capacité angulaire de manière considérable en sommant relativement peu de termes par rapport au développement en série de Taylor. Cependant, la représentation de $\sqrt{I+X}$ sous forme de quotient de deux polynômes de degrés >2 reste également très difficile à implanter à cause des puissances élevées de l'opérateur X .

4- Résolution numérique du problème de l'onde progressive:

Le problème lié à l'onde progressive peut être traité numériquement par un schéma aux différences finies. Les opérateurs des dérivées secondes sont approchés par différences finies de manière à obtenir un système algébrique tri-diagonal, que l'on résout pour chaque pas d'avancement en x d'une manière classique.

Nous notons que la formulation numérique présente plusieurs avantages (notamment en termes de temps de calcul) que nous résumons de la manière suivante:

- La procédure de calcul ne nécessite pas le maillage préalable de tout le domaine de calcul, il n'y a que la ligne orthogonale à la direction de propagation qui est discrétisée.
- Au cours de la résolution, on n'utilise que les conditions de départ et les conditions aux limites sur les frontières latérales. Une fois que l'onde rencontre un obstacle, on détermine les conditions de départ pour l'onde réfléchie qu'on résout de la même manière.

5- Résultats:

Dans la partie résultat, le premier exemple étudié est celui d'un fond circulaire à profil parabolique défini par la bathymétrie h suivante:

$$h = h_m + e_0 r^2 \text{ pour } r < R ; \quad h = h_0 \text{ pour } r \geq R ;$$

$$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 ; \quad e_0 = (h_0 - h_m) / R^2.$$

Dans le papier de Radder [2] une des configurations est définie par les paramètres suivants: $h_m/R = 0.0625$, $h_0/R = 0.1875$, $L_0/R = 0.5$, $e_0 g / w^2 = 0.01$, où R est le rayon du cercle au fond et L_0 est la longueur d'onde incidente.

Ce cas a été étudié numériquement et expérimentalement par plusieurs auteurs [1,2]. Afin de valider notre approche, nous définissons respectivement l'amplitude A et la phase F à partir du potentiel des vitesses φ de la même manière que Radder [2]: $\varphi = A e^{iF}$.

Sur la figure 3, nous présentons une comparaison des amplitudes relatives en fonction de x/L_0 pour $y/L_0 = 4$, L_0 étant la longueur d'onde. Le fond circulaire est défini pour x/L_0 compris entre 2 et 6.

Figure 3: Comparaison des amplitudes relatives
Comparison of relative amplitudes

Sur la figure 4, nous présentons une comparaison des amplitudes relatives en fonction de y/L_0 pour $x/L_0=7$ (a) et $x/L_0=6$ (b).

Figure 4-a: Comparaison des amplitudes relatives
Comparison of relative amplitudes

Figure 4-b: Comparaison des amplitudes relatives
Comparison of relative amplitudes

Sur l'ensemble des résultats présentés sur les figures 4 et 5, nous remarquons l'apport de la nouvelle formulation en particulier que les ondes changent de crêtes derrière le cylindre.

Le deuxième exemple étudié est celui d'un dispositif, constitué d'une bosse de forme elliptique posée sur le fond plat d'une cuve de 45.7 cm de profondeur. Les dimensions du demi-ellipsoïde et la bathymétrie h sont données par les équations suivantes (les grandeurs sont exprimées en mètres):

Equation de la base de l'ellipse

$$\frac{x^2}{(3.96)^2} + \frac{y^2}{(3.05)^2} = 1$$

Equation de la profondeur

$$h = 0.9144 - 0.762 \sqrt{1 - \frac{x^2}{(4.95)^2} + \frac{y^2}{(3.81)^2}}$$

La propagation d'une onde de surface dans ce dispositif a été étudiée expérimentalement et numériquement en résolvant l'équation complète de Berkhoff par la méthode des différences finies par Lajoie [3]. La houle est monochromatique, normale au grand axe de l'ellipsoïde, de période 1.3 secondes. La cambrure (H/λ) est choisie faible, comprise entre 1% et 2%. Pour les différents calculs évoqués, les maillages de l'ordre de 15 mailles par longueur d'onde sont considérés comme fins. L'amplitude de la houle est mesurée sur une section transversale définie par: $3.05 \leq x \leq 9.15$ et $y=3.05$.

La comparaison de la courbe que nous avons obtenus (figure 5) à celles présentées par Lajoie [3] (figure 6) montre que notre courbe est celle qui approche le mieux le courbe obtenue par résolution de l'équation complète de Berkhoff. Nous soulignons que D. Lajoie [3] a validé ses résultats avec les résultats expérimentaux de Vincent et Briggs rappelé dans la même référence [3]. Nous remarquons également une bonne concordance de notre courbe avec les résultats expérimentaux.

Figure 5: Comparaison des amplitudes relatives
Comparison of relative amplitudes

Figure 6: Comparaison des amplitudes relatives
Comparison of relative amplitudes
(D'après Lajoie [3], Page 89, Figure III-20)

6- Conclusion:

La contribution principale de ce travail est de montrer la validité de la démarche effectuée pour obtenir l'équation parabolique, malgré les hypothèses avancées dans sa construction théorique. L'utilisation des fonctions polynomiales rationnelles et le bon choix des coefficients des Approximants de Padé peut augmenter la capacité angulaire des équations paraboliques. Nous avons ainsi étendu le domaine de validité angulaire du type d'équations paraboliques proposé par Kirby à 55° au lieu de 50° en optimisant les coefficients de l'approximation rationnelle.

7-Références:

- [1] Berkhof, J. C. W., "Computation of combined refraction and diffraction", Proc. 13th Coastal Engn Conf., Vancouver, A.S.C.E. 1 (1973), 471-490, 1972.
- [2] Radder, A. C., "On the parabolic equation method for water-wave propagating method", J.Fluid Mech 95, 159-176, 1979.
- [3] Lajoie D., "Modélisation de la houle en zone côtière: Prévion de l'agitation à l'intérieur des ports et mise au point d'atténuateurs de houle dynamiques", thèse de l'université d'Aix-Marseille II, Février 1996.
- [4] Kirby J. T., "Higher Approximations in the Parabolic Equation Method for Water waves", Journal of Geophysical Research, Vol 91, n°C1, 933-952, January 1986.
- [5] Green R. R., "The Rational approximation to the acoustic wave equation with bottom interaction" J. Acoust. Soc. Am. 76, 1764-1773, 1984.