УДК 517.925.4

DOI: 10.47928/1726-9946-2021-21-4-37-44

Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования

Эфендиев Б.И.

Представлено академиком АМАН Псху А.В.

Посвящается 30-летию ИПМА КБНЦ РАН

Введение. В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)u(x)] d\alpha = f(x), \quad 0 < \beta < 1, \quad (1)$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{0x}^\alpha u(x) = u(x), \quad \alpha = 0,$$

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n} u(x), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегро-дифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α [1], [2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha)$, $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – заданные функции.

Интегро-дифференциальный оператор

$$M_{ax}^{\alpha,\beta} u(x) = \int_\alpha^\beta b_\xi(x) D_{ax}^\xi u(x) d\xi, \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (2)$$

который был введен в работе [1] и назван там же непрерывным или континуумальным дифференциальным оператором, в последнее время называют оператором непрерывно распределенного дифференцирования. В работах [2] и [3] были изучены свойства операторов непрерывно распределенного дифференцирования и интегрирования.

Наряду с оператором (2) изучаются так называемые операторы дискретно распределенного дифференцирования

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i D_{tx}^{s_i} u(x), \quad s_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

и интенсивно исследуются дифференциальные уравнения как обыкновенные, так и в частных производных с операторами вида (2) и (3).

В работе [4] для многомерного уравнения дробной диффузии с оператором дискретно распределенного порядка решена задача Коши. В терминах функции Райта построено

фундаментальное решение и исследованы его свойства. Найдено представление решения исследуемой задачи и доказана теорема единственности решения в классе функций быстрого роста, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова. Показано, что разрешимость исследуемой задачи зависит от распределения параметров, входящих в уравнение.

В статье [5] рассматривается нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи.

Для уравнения (1) при $p(x) = q(x) = 1$ методом функции Грина построено решение задачи Дирихле в работе [6], а в статье [7] для уравнения (1) построено фундаментальное решение и исследованы его свойства, найдено представление решения задачи Коши с использованием формулы Лагранжа.

В данной работе выписано решение задачи Дирихле для уравнения (1) с помощью функции Грина.

1. Постановка задачи. Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0, l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0, l] \cap C^2]0, l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0, l[$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0, l[$, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l, \quad (4)$$

где u_0, u_l – заданные константы.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\mu(\alpha) \in L[0, \beta]$, $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[0, l]$

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, l], \quad C = \text{const} > 0,$$

$q(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[0, l]$, то есть $p(x) \in Lip[0, l]$, $q(x) \in AC[0, l]$.

Рассмотрим функцию [7]

$$W(x, t) = x - t + \int_t^x (x - s)R(s, t)ds, \quad (5)$$

где

$$R(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t), \quad K_1(x, t) = q(x) \int_0^{\beta} \mu(\alpha) D_{tx}^{\alpha} [(x - t)p(x)] d\alpha,$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x K_n(x, s) K_1(s, t) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Функция $W(x, t)$ по переменной x является решением задачи*

$$W_{xx}(x, t) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{tx}^\alpha [p(x)W(x, t)] d\alpha = 0, \quad (6)$$

$$W(t, t) = 0, \quad W_x(t, t) = 1, \quad \forall t \in [0, x], \quad (7)$$

а по переменной t является решением задачи

$$W_{tt}(x, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{xt}^\alpha [q(t)W(x, t)] d\alpha = 0, \quad (8)$$

$$W(x, x) = 0, \quad W_t(x, x) = -1, \quad \forall x \in [0, l]. \quad (9)$$

Лемма 1 доказывается непосредственной подстановкой формулы (5) в равенства (6) – (9) учитывая оценки [7]

$$|K_n(x, t)| \leq C^m \frac{(x-t)^{n-1}}{\Gamma(n)}, \quad |R(x, t)| \leq C \exp [C(x-t)].$$

3. Функция Грина. Введем в рассмотрение функцию двух переменных, определенную в компакте $\overline{\Omega} = [0, l] \times [0, l]$

$$G(x, t) = H(x-t)W(x, t) - \frac{1}{W(l, 0)} [W(x, 0)W(l, t)], \quad (10)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Определение. *Функцией Грина задачи Дирихле (4) для уравнения (1) назовем функцию $v(x, t)$, обладающая следующими свойствами:*

1. $v(x, t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$.

2. $v(x, t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$v_{xx}(x, t) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)v(x, t)] d\alpha = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad (11)$$

по переменной t является решением задачи

$$v_{tt}(x, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{tt}^\alpha [q(t)v(x, t)] d\alpha = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, l) = 0. \quad (12)$$

3. При $t = x$ производные $v_x(x, t)$ и $v_t(x, t)$ имеют скачок, равный единице, то есть

$$v_x(x, x+0) - v_x(x, x-0) = -1, \quad (13)$$

$$v_t(x, x+0) - v_t(x, x-0) = 1. \quad (14)$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие $W(l, 0) \neq 0$. Тогда функция $G(x, t)$, определяемая формулой (10), является функцией Грина задачи Дирихле (4) для уравнения (1).

Доказательство. Непрерывность функции Грина $G(x, t)$ в компакте $\bar{\Omega}$ следует из непрерывности функции $W(x, t)$ в этом компакте $\bar{\Omega}$.

Второе свойство доказывается непосредственной подстановкой равенства (10) в формулы (11), (12) с учетом соотношений (6) – (9)

$$\begin{aligned} & G_{xx}(x, t) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)G(x, t)] d\alpha = \\ & = H(x - t) \left[W_{xx}(x, t) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{tx}^\alpha [p(x)W(x, t)] d\alpha \right] - \\ & - \frac{W(l, t)}{W(l, 0)} \left[W_{xx}(x, 0) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)W(x, 0)] d\alpha \right] = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & G_{tt}(x, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{tt}^\alpha [q(t)G(x, t)] d\alpha = \\ & = H(x - t) \left[W_{tt}(x, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{xt}^\alpha [q(t)W(x, t)] d\alpha \right] + \\ & + \frac{W(x, 0)}{W(l, 0)} \left[W_{tt}(l, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{tt}^\alpha [q(t)W(l, t)] d\alpha \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Из представления (10), в силу соотношений $W(0, 0) = 0$, $W(l, l) = 0$, имеем равенства

$$G(0, t) = 0, \quad G(l, t) = 0, \quad G(x, 0) = 0, \quad G(x, l) = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя равенство (10) по x и по t

$$G_x(x, t) = H(x - t)W_x(x, t) - \frac{1}{W(l, 0)} [W_x(x, 0)W(l, t)], \quad (18)$$

$$G_t(x, t) = H(x - t)W_t(x, t) - \frac{1}{W(l, 0)} [W(x, 0)W_t(l, t)], \quad (19)$$

и подставляя формулы (18), (19) в соотношения (13), (14) с учетом того что $W(x)$ – непрерывная функция, а $H(x)$ – разрывная в нуле функция, с учетом равенств $W_x(x, x) = 1$, $W_t(x, x) = -1$ получим

$$G_x(x, x + 0) - G_x(x, x - 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} H(\varepsilon)W_x(x, x) - \frac{1}{W(l, 0)} [W_x(x, 0)W(l, x)] -$$

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(\varepsilon)W_x(x, x) + \frac{1}{W(l, 0)} [W_x(x, 0)W(l, x)] = -1, \quad (20)$$

$$G_t(x, x+0) - G_t(x, x-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} H(\varepsilon)W_t(x, x) - \frac{1}{W(l, 0)} [W(x, 0)W_t(l, x)] - \\ - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(\varepsilon)W_t(x, x) + \frac{1}{W(l, 0)} [W(x, 0)W_t(l, x)] = 1, \quad (21)$$

что доказывает справедливость формул (13) и (14). Лемма 2 доказана.

Из соотношений (18), (19) в силу формул (7) и (9) следуют равенства

$$G_x(x, 0) = 0, \quad G_x(x, l) = 0, \quad (22)$$

$$G_t(x, 0) = W_t(x, 0) - \frac{W(x, 0)W_t(l, 0)}{W(l, 0)}, \quad G_t(x, l) = \frac{W(x, 0)}{W(l, 0)}. \quad (23)$$

4. Представление решения. Сформулируем следующую теорему

Теорема. Пусть $\mu(\alpha) \in L[0, \beta]$, $p(x) \in Lip[0, l]$, $q(x) \in AC[0, l]$, $f(x) \in L[0, l] \cap C]0, l[$. Тогда при выполнении условия разрешимости $W(l, 0) \neq 0$ существует единственное регулярное решение задачи (1), (4). Решение имеет вид

$$u(x) = -u_0 G_t(x, 0) + u_l G_t(x, l) + \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $G(x, t)$, предварительно поменяв в нем переменную x на t , и проинтегрируем полученное равенство по t в пределах от 0 до l . Тогда имеем

$$\int_0^l G(x, t) u''(t) dt - \int_0^l G(x, t) q(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0t}^\alpha [p(t)u(t)] d\alpha dt = \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \quad (25)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в левой части равенства (25), учитывая что функция $G_t(x, t)$ имеет разрыв, предварительно разбив промежуток интегрирования на два промежутка от 0 до x и от x до l , будем иметь

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^{l-\varepsilon} G(x, t) u''(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u'(l-\varepsilon)G(x, l-\varepsilon) - u'(\varepsilon)G(x, \varepsilon) - \int_\varepsilon^x G_t(x, t) u'(t) dt - \right. \\ \left. - \int_x^{l-\varepsilon} G_t(x, t) u'(t) dt \right] = u'(l)G(x, l) - u'(0)G(x, 0) - u(l)G_t(x, l) + u(0)G_t(x, 0) + \\ + u(x)[G_t(x, x+0) - G_t(x, x-0)] + \int_0^l G_{tt}(x, t) u(t) dt. \quad (26)$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям и равенств (17), второе слагаемое левой части формулы (25) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
& \int_0^l G(x, t) q(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0t}^\alpha [p(t) u(t)] d\alpha dt = q(l) G(x, l) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0l}^{\alpha-1} [p(t) u(t)] d\alpha - \\
& - q(0) G(x, 0) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{00}^{\alpha-1} [p(t) u(t)] d\alpha - \int_0^l \frac{\partial}{\partial t} [q(t) G(x, t)] \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} [p(t) u(t)] d\alpha dt = \\
& = - \int_0^l u(t) p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{tt}^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial t} [q(t) G(x, t)] d\alpha dt = \\
& = \int_0^l u(t) p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) \partial_{tt}^\alpha [q(t) G(x, t)] d\alpha dt. \tag{27}
\end{aligned}$$

Учитывая формулы (21), (26) и (27) из равенства (25) получим

$$\begin{aligned}
& u(x) + \int_0^l u(t) \left[G_{tt}(x, t) - p(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{tt}^\alpha [q(t) G(x, t)] d\alpha \right] dt = \\
& = -u'(l) G(x, l) + u'(0) G(x, 0) + u(l) G_t(x, l) - u(0) G_t(x, 0) + \int_0^l G(x, t) f(t) dt,
\end{aligned}$$

из которого в силу соотношений (16) и (17) получаем формулу (24).

Покажем теперь, что функция $u(x)$, определяемая формулой (24), действительно является решением задачи (1), (4). Дифференцируя дважды равенство (24) с учетом формулы (20) будем иметь

$$u'(x) = -u_0 [G_t(x, 0)]' + u_l [G_t(x, l)]' + \int_0^l G_x(x, t) f(t) dt, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -u_0 [G_t(x, 0)]'' + u_l [G_t(x, l)]'' + \frac{d}{dx} \left[\int_0^x G_x(x, t) f(t) dt + \int_x^l G_x(x, t) f(t) dt \right] = \\
&= -u_0 [G_t(x, 0)]'' + u_l [G_t(x, l)]'' + \int_0^l G_{xx}(x, t) f(t) dt + f(x). \tag{29}
\end{aligned}$$

Далее из формулы (24) имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)u(x)] d\alpha = & -u_0 \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)G_t(x, 0)] d\alpha + u_1 \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)G_t(x, l)] d\alpha + \\ & + \int_0^l f(t) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)G(x, t)] d\alpha dt. \end{aligned} \quad (30)$$

Подставляя формулы (29) и (30) в уравнение (1), в силу равенства (15), получаем что функция, определяемая соотношением (24), действительно является решением уравнения (1). С учетом формул (17), (23), непосредственная подстановка функции (24) в равенства (4) дает верные тождества.

Замечание. В случае $W(l, 0) = 0$ нарушается единственность решения задачи (1), (4).

Действительно, если $W(l, 0) = 0$, то однородная задача

$$u''(x) - q(x) \int_0^\beta \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha [p(x)u(x)] d\alpha = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \quad (31)$$

имеет ненулевое решение. В частности, любая функция $u(x) = cW(x, 0)$, $c = \text{const}$, является решением задачи (31).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796-799.
2. Нахушев А.М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101-109.
3. Псху А.В. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120-127.
4. Псху А.В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 1078-1098.
5. Гадзова Л.Х. Нелокальная краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Мат. заметки. 2019. Т. 106, № 6. С. 860-865.
6. Эфендиев Б.И. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 49-58.
7. Эфендиев Б.И. Начальная задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором распределенного дифференцирования // Мат. заметки СВФУ.

ABSTRACT

For an ordinary second-order differential equation with an operator of continuously distributed differentiation with variable coefficients, a solution to the Dirichlet problem is constructed using the Green's function method.

Keywords: fractional Riemann – Liouville integral, fractional Riemann – Liouville derivative, operator of continuously distributed differentiation, Dirichlet problem, Green's function.

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

© B.I. Efendiev, 2021

АННОТАЦИЯ

Для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования с переменными коэффициентами строится решение задачи Дирихле методом функции Грина.

Ключевые слова: дробный интеграл Римана – Лиувилля, дробная производная Римана–Лиувилля, оператор непрерывно распределенного дифференцирования, задача Дирихле, функция Грина.

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

© Б.И. Эфендиев, 2021