УДК 539.3

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.31>

Л. А. *АЛЕКСЕЕВА, Г. К. ЗАКИРЬЯНОВА

*Институт математики и математического моделирования МОН РК,
Алматы, Казахстан*

e-mail: alexeeva@math.kz, gulmzak@mail.ru

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ АНИЗОТРОПНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ ДЕЙСТВИИ ДОЗВУКОВЫХ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК

Решена первая краевая задача теории упругости для анизотропного упругого полупространства при движении по его поверхности транспортной нагрузки. Рассмотрен дозвуковой дорелевский случай, когда скорость движения меньше скорости распространения объемных и поверхностных упругих волн. Построен тензор Грина транспортной краевой задачи и на его основе дано решение краевых задач для широкого класса распределенных транспортных нагрузок. Для решения задачи использованы методы тензорной и линейной алгебры, интегральное преобразование Фурье, операторный метод решения систем дифференциальных уравнений.

Полученное решение позволяет исследовать динамику породного массива для широкого класса транспортных нагрузок, в широком диапазоне скоростей, как низкоскоростных, так и при высоких скоростях, и оценить прочностные свойства породного массива при воздействии дорожного транспорта. В частности, определить допустимые скорости его движения и грузоподъемность. Кроме того исследование на его основе движения дневной поверхности вдоль трассы позволит установить критерии на сейсмостойкость наземных сооружений и допустимые расстояния их расположения от трассы.

Ключевые слова: *упругость, анизотропная среда, тензор Грина, преобразование Фурье, транспортная нагрузка, дозвуковая скорость, краевая задача.*

Введение. Исследование динамики тел и сред при разном типе действующих источников возмущений приводит к решению краевых задач для систем дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типа. Среди действующих источников генерации волн в сплошных средах особенно распространены *транспортные*, связанные с движущимися нагрузками, форма которых не меняется с течением времени. При этом скорость их движения существенно влияет на тип дифференциальных уравнений движения, параметрически зависящих от отношения скорости движения нагрузки к скоростям распространения волн в среде (их может быть несколько, в зависимости от типа деформаций среды). Среди транспортных нагрузок особо выделим

*Адрес для переписки. E-mail: gulmzak@mail.ru

стационарные, которые движутся с постоянной скоростью в фиксированном направлении. Этот класс задач дает возможность исследовать дифракционные процессы в упругой среде в аналитическом виде в дозвуковом, трансзвуковом и сверхзвуковом случае. Он очень важен для изучения влияния движущегося транспорта на подстилающую поверхность в окрестности движущегося транспорта, а также генерируемого им сейсмического воздействия на расположенные вблизи него сооружения.

Наиболее исследованы такие процессы на модели изотропного упругого пространства и полупространства, содержащего подкрепленные и неподкрепленные цилиндрические полости с подвижными транспортными нагрузками на их поверхности [1]. В [2] построены и исследованы фундаментальные и обобщенные решения уравнений Ламе, которые описывают динамику изотропной упругой среды при движении сосредоточенной и распределенной транспортной нагрузки во всем диапазоне скоростей (дозвуковой, звуковой, трансзвуковые и сверхзвуковые). На этой основе в [3-6] разработан метод граничных интегральных уравнений и метод обобщенных функций для решения транспортных краевых задач в изотропной упругой среде с цилиндрической формой границ. Этот класс задач очень важен для приложений в области динамики подземных сооружений, транспортных тоннелей и подземных выработок.

Другой очень важный класс задач – когда транспортная нагрузка движется по поверхности породного массива. Актуальность таких задач связана с широким строительством в настоящее время повсеместно высокоскоростных автомобильных и железнодорожных магистралей, что требует исследования напряженно-деформированного состояния подстилающего основания и сейсмического воздействия движущегося транспорта на наземные сооружения вдоль трассы движения с учетом физико-механических параметров дорожного основания, вида нагрузки и скорости ее движения. Математическими моделями таких процессов являются краевые задачи для упругого полупространства либо полупространства с более сложными физико-механическими свойствами, с подвижными транспортными нагрузками на его дневной поверхности.

Известно, что в изотропном упругом пространстве есть две звуковые скорости c_1 и c_2 ($c_1 > c_2$), с которыми распространяются дилатационные и сдвиговые волны. В упругом полупространстве к ним добавляется третья звуковая скорость c_R , с которой распространяются поверхностные волны Рэлея [7]. Скорость волн Рэлея меньше, но очень близка к скорости сдвиговых волн ($c_R < c_2$). Впервые такая задача для дозвуковой дорелевской транспортной нагрузки была решена в работе Cole J., Huth J. для упругого полупространства при плоской деформации [8]. Автором в работах [9-10] построены тензора Грина и решение этой задачи в общей трехмерной постановке для дозвуковых нагрузок как внутри, так и на поверхности полупространства и показано, что при превышении релевской скорости транспортная нагрузка генерирует за собой поверхностные волны Рэлея.

Здесь рассмотрена первая краевая задача теории упругости для анизотропного упругого полупространства при движении по его поверхности транспортной нагрузки. Рассмотрен дозвуковой дорелевский случай, когда скорость движения меньше скорости распространения объемных и поверхностных упругих волн. Построен тензор Грина транспортной краевой задачи и на его основе дано решение краевых задач для широкого класса распределенных транспортных нагрузок.

Отметим, что динамика анизотропного упругого полупространства при воздействии транспортных нагрузок практически мало изучена. В работе [11] для исследования ледового покрытия рек решена дозвуковая транспортная краевая задача динамики ортотропного упругого слоя на жидком полупространстве (идеальная жидкость) в плоской постановке. Авторам неизвестны другие работы в этом направлении. Хотя процессы распространения и дифракции волн при действии разнообразных источников возмущений в анизотропных и слоистых средах исследовались во многих работах [14 – 16].

Транспортные нагрузки на поверхности упругого анизотропного полупространства. Постановка транспортной краевой задачи. Анизотропная упругая среда занимает полупространство $x_1 < 0$, $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = (1, 0, 0)$ - единичный вектор внешней нормали к его границе $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_j \mathbf{e}_j \in R^3 : x_1 = 0\}$. Граничные транспортные нагрузки $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ движутся с постоянной дозвуковой скоростью c вдоль оси X_3 :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = \mu p_j(x_2, x_3 - ct) \mathbf{e}_j \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} связаны с перемещениями законом Гука [7, 12]:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{kl} u_{k,l} . \quad (2)$$

Здесь и всюду далее по одноименным индексам производятся тензорные свертки. Частные производные по соответствующей координате обозначаются индексом после запятой: $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; $\delta_{ij} = \delta_i^j$ - символ Кронекера. Тензор упругих констант обладает свойствами симметрии по индексам:

$$C_{ij}^{kl} = C_{ji}^{kl} = C_{ij}^{lk} = C_{kl}^{ij} \quad (3)$$

Рассматривается установившееся движение: $\in (-\infty, \infty)$, что позволяет перейти в подвижную систему координат, связанную с транспортной нагрузкой. Далее обозначаем $x = (x_1, x_2)$, $z = x_3 - ct$. Предполагается, что компоненты транспортной нагрузки допускают преобразование Фурье, т.е. представимы в виде интегралов Фурье:

$$P_j(x_2, z) = \sigma_{j1}(0, x_2, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \bar{p}_n(\eta, \zeta) \exp(-i(x_2 \eta + \zeta z)) d\eta d\zeta$$

$$\bar{p}_n(\eta, \zeta) = \int_{R^2} p_n(x_2, z) \exp(i(x_2 \eta + \zeta z)) dx_2 dz$$

Уравнения движения для перемещений упругого полупространства в подвижной системе координат имеют вид:

$$C_{ij}^{kl} u_{k,lj} - \rho c^2 u_{i,zz} = 0 \quad (4)$$

Далее этот оператор будем обозначать $\text{Lij}(\partial_1, \partial_2, \partial_z)$. Удобно перейти к безразмерным упругим константам, взяв в качестве единицы измерения напряжений ρc^2 : $\tilde{C}_{ij}^{kl} = C_{ij}^{kl} / (\rho c^2)$.

В анизотропной упругой среде скорость распространения упругих волн зависит от направления фронта волны [11]. Обозначим c_* минимальную из них. Возможны разные случаи движения транспортной нагрузки, в частности: дозвуковой ($c < c_*$) и сверхзвуковой ($c > c_*$). Здесь рассмотрим дозвуковой случай, характерный для транспортных задач, т.к. скорости распространения волн в упругих твердых средах очень высоки (порядка 1 км/с), что пока недостижимо для современных наземных транспортных средств. Требуется найти решение задачи, удовлетворяющее условию затухания на бесконечности:

$$u \rightarrow 0, \text{ при } x_1 \rightarrow +\infty \text{ либо } z \rightarrow \pm\infty \quad (5)$$

и условиям излучения, которые пока конкретизировать не будем, так как они, в зависимости от скорости, имеют специальный вид.

Тензор Грина краевой задачи. Для решения поставленной задачи построим тензор Грина краевой задачи в подвижной системе координат, связанной с транспортной нагрузкой. Для его определения имеем следующую краевую задачу.

Найти тензорное решение уравнений (3):

$$\tilde{C}_{ij}^{kl} \Pi_{k,lj}^m - \Pi_{i,zz}^m = 0, \quad i, j, k, m = 1, 2, 3, \quad (6)$$

в области $x_1 < 0$, которое должно удовлетворять условию затухания на бесконечности:

$$\Pi_j^i(x, z) \rightarrow 0 \quad \text{при } \|(x, z)\| \rightarrow 0 \quad (7)$$

Порождаемый им тензор напряжений Σ_{jk}^m вычисляется на основе закона Гука (2):

$$\Sigma_{jk}^m(x_1, x_2, z) = \tilde{C}_{jk}^{il} \Pi_{i,l}^m = S_{jk}^i(\partial_1, \partial_2, \partial_z) \Pi_i^m(x_1, x_2, z), \quad (8)$$

где введен тензорный дифференциальный оператор

$$S_{jk}^i(\partial_1, \partial_2, \partial_z) = \tilde{C}_{jk}^{il} \partial_l, \quad \partial_l = \partial / \partial x_l$$

Он должен удовлетворять следующим условиям на свободной поверхности $x_1 = 0$:

$$\Sigma_{j1}^m = S_{j1}^i(\partial_1, \partial_2, \partial_z) \Pi_i^m(x_1, x_2, z) = \delta_j^m \delta(x_2) \delta(z), \quad i, j, m, k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Здесь $\delta(z)$ – сингулярная дельта-функция Дирака. Доказана следующая

Теорема 1. Если тензор Π_j^i известен, то решение поставленной краевой задачи имеет вид следующей свертки на границе полупространства:

$$u_j(x_1, x_2, z) = \Pi_j^i(x_1, x_2, z) *_{x_2, z} p_n(x_2, z), \quad j, n = 1, 2, 3.$$

которая для регулярных нагрузок имеет интегральное представление:

$$u_j(x_1, x_2, z) = \int_{R^3} \Pi_j^n(x_1, x_2 - y_2, z - y_3) p_n(y_2, y_3) dy_2 dy_3, \quad j, n = 1, 2, 3.$$

Для сингулярных сосредоточенных нагрузок следует использовать правила вычисления свертки в пространстве обобщенных функций [17].

Зная тензор $\Pi(x, z)$, формула теоремы 1 позволяет определить перемещения в полупространстве при любой дозвуковой нагрузке на ее поверхности. Тензор напряжений в любой точке упругого полупространства определяются формулой

$$\sigma_{jk}(x, z) = \int_{R^q} \sum_{kj}^n (x_1, x_2 - y_2, z - y_3) p_n(y_2, y_3) dy_2 dy_3. \quad (10)$$

Напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{m}$ вычисляются по формуле

$$\mathbf{P}(x, z, \mathbf{m}) = m_k e_j \int_{R^q} \sum_{kj}^n (x_1, x_2 - y_2, z - y_3) p_n(y_2, y_3) dy_2 dy_3.$$

Таким образом, определение фундаментального тензора перемещений определяет решение поставленной задачи.

Построим тензор $\Pi(x, z)$, используя неполное преобразование Фурье по двум координатам.

Определение Фурье-трансформант тензора Грина. Для построения решения воспользуемся преобразованием Фурье по x_2, z . В пространстве преобразований Фурье им соответствуют переменные η, ζ . Трансформанта Фурье и ее оригинал определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_k^m(x_1, \eta, \zeta) &= \int_{R^2} \Pi_k^m(x_1, x_2, z) \exp(i\eta x_2 + i\zeta z) dz dx_2 \\ \Pi_k^m(x_1, x_2, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{R^2} \bar{\Pi}_k^m(x_1, \eta, \zeta) \exp(-i\eta x_2 - i\zeta z) d\zeta d\eta \end{aligned} \quad (11)$$

В пространстве Фурье-преобразований уравнения для $\bar{\Pi}_i^m(x_1, \eta, \zeta)$ имеют вид системы из трех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которую запишем в виде

$$D_{ik}(\partial_1, \eta, \zeta) \bar{\Pi}_k^m(x_1, \eta, \zeta) = 0, \quad i, k, m = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где через $D_{ik}(\partial_1, \eta, \zeta)$ обозначен дифференциальный оператор системы (12):

$$\begin{aligned} D_{ik}(\partial_1, \eta, \zeta) &= \tilde{C}_{i1}^{k1} \partial_1 \partial_1 - i \left(\eta \tilde{C}_{i1}^{k2} + 2\zeta \tilde{C}_{i1}^{k3} \right) \partial_1 + \eta \left(\eta \tilde{C}_{i2}^{k2} + 2\zeta \tilde{C}_{i2}^{k3} \right) + \\ &+ \zeta^2 \left(\tilde{C}_{i3}^{k3} + \tilde{C}_i^k \delta_i^k \right) = 0, \quad i, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь мы использовали свойства симметрии тензора упругих констант по индексам. Граничные условия, с учетом свойства преобразования Фурье дельта-функции [17], преобразуются к виду:

$$S_{j1}^k(\partial_1, -i\eta, -i\zeta) \bar{\Pi}_k^m(x_1, \eta, \zeta) = \delta_j^m, \quad m, j, k = 1, 2, 3. \quad \text{при } x_1 = 0 \quad (14)$$

Условия затухания на бесконечности: для $\forall(\eta, \zeta)$

$$\bar{\Pi}_k^m(x_1, \eta, \zeta) \rightarrow 0 \quad \text{при } x_1 \rightarrow -\infty$$

Система ОДУ (14) имеет 6 линейно независимых решений. Среди них три решения затухают при $x_1 \rightarrow -\infty$:

$$f_j(x_1, \eta, \varsigma) = d_j^k(\eta, \varsigma) \exp(x_1 \alpha_j(\eta, \varsigma)) e_k, \quad \operatorname{Re} \alpha_j(\eta, \varsigma) \geq 0 \quad (15)$$

Здесь $\alpha_j(\eta, \varsigma)$ корни характеристического уравнения системы (13):

$$|S_{j1}^k(\alpha, -i\eta, -i\varsigma)| = 0, \quad \alpha = \pm \alpha_j(\eta, \varsigma), \quad j = 1, 2, 3$$

Векторные компоненты $d_j^k(\eta, \varsigma)$ определяются из решения соответствующей однородной системы уравнений для каждого $j = 1, 2, 3$:

$$D_{ik}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) d_{[j]}^{[k]} = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Полагая, например, $d_3^j = 1$, из этой системы получим уравнения для определения d_1^j, d_2^j

$$\begin{aligned} D_{11}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) d_{[j]}^1 + D_{12}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) d_{[j]}^2 &= -D_{13}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \\ D_{21}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) d_{[j]}^1 + D_{22}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) d_{[j]}^2 &= -D_{23}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \end{aligned}$$

Откуда, по правилу Крамера, находим

$$d_{[j]}^1 = \frac{\Omega_{j1}(\eta, \varsigma)}{\Omega_j(\eta, \varsigma)}, \quad d_{[j]}^2 = \frac{\Omega_{j2}(\eta, \varsigma)}{\Omega_j(\eta, \varsigma)}$$

где $\Omega_j(\eta, \varsigma)$ – детерминант матрицы системы

$$\begin{aligned} \Omega_j(\eta, \varsigma) &= \begin{vmatrix} D_{11}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{12}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \\ D_{21}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{22}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \end{vmatrix} \\ \Omega_j(\eta, \varsigma) &= \begin{vmatrix} D_{11}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{12}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \\ D_{21}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{22}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \end{vmatrix} \\ \Omega_{j2}(\eta, \varsigma) &= - \begin{vmatrix} D_{11}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{13}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \\ D_{21}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma), & D_{23}(\alpha_j(\eta, \varsigma), \eta, \varsigma) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Представим искомый тензор Грина в виде их линейной комбинации:

$$\bar{\Pi}_l^m(x_1, \eta, \varsigma) = b_j^m d_l^j(\eta, \varsigma) \exp(x_1 \alpha_j(\eta, \varsigma)) \quad (17)$$

Неизвестные коэффициентные функции $b_j^m(\eta, \varsigma)$ определяются из граничных условий (13), которые, с учетом этих формул, имеют вид

$$\sum_{j,k=1}^3 b_j^m S_{l1}^k(\alpha_j(\eta, \varsigma), -i\eta, -i\varsigma) d_k^j(\eta, \varsigma) = \delta_l^m \quad (18)$$

Обратная матрица этой системы дает ее решение:

$$\left\{ \sum_{k=1}^3 S_{\Pi}^k(\alpha_j(\eta, \zeta), -i\eta, -i\zeta) d_k^j(\eta, \zeta) \right\}^{-1} = \{b_l^m\}$$

Она существует, если

$$\Delta(\eta, \zeta) = \left| \sum_{k=1}^3 S_{\Pi}^k(\alpha_j(\eta, \zeta), -i\eta, -i\zeta) d_k^j(\eta, \zeta) \right| \neq 0. \quad (19)$$

В изотропной упругой среде этот определитель не обращается в ноль при дорелеевских скоростях движения [1], которая меньше, но близка к скорости поперечных (сдвиговых волн) в упругой среде. Здесь также предположим, что скорость транспортной нагрузки не превосходит скоростей свободных поверхностных волн в упругом анизотропном полупространстве, аналогичных волнам Релея в изотропной упругой среде. В этом случае для любых (η, ζ) выполняется (19).

Формулы (17), (19) разрешают поставленную задачу при дорелеевских скоростях транспортной нагрузки, которая является дозвуковой для упругого полупространства.

Восстановление оригиналов Π_k^m и Σ_{jk}^m при дорелеевской скорости движения. Используя обратное преобразование Фурье, получим тензор Грина краевой задачи.

Теорема 2. Тензор Грина дозвуковой транспортной краевой задачи для анизотропного упругого полупространства имеет следующее интегральное представление:

$$\Pi_l^m(x_1, x_2, z) = (2\pi)^{-2} \int_{R^2} b_j^m(\eta, \zeta) d_l^j(\eta, \zeta) \exp(x_1 \alpha_j(\eta, \zeta) - i\eta x_2 - i\zeta z) d\zeta d\eta$$

При $c < c_R$ все подынтегральные функции непрерывны и при $x_1 > 0$ экспоненциально стремятся к нулю по (η, ζ) на бесконечности. Поэтому интегралы существуют и удовлетворяют условиям затухания на бесконечности.

Для вычисления напряжений используем Σ_{jk}^m (8). В результате получим

$$\Sigma_{ik}^m(x, z) = (2\pi)^{-2} \tilde{C}_{ik}^{ln} \int_{R^2} b_j^m(\eta, \zeta) d_l^j(\eta, \zeta) \left\{ \exp(x_1 \alpha_j(\eta, \zeta) - i\eta x_2 - i\zeta z) \right\}_{,n} d\zeta d\eta \quad (20)$$

где индекс после запятой у правой фигурной скобки означает частную производную по x_1, x_2, z , соответственно $n = 1, 2, 3$ (по повторяющимся индексам берутся тензорные свертки). Он описывает напряжения в упругом полупространстве при движении сосредоточенной силы по оси Z .

Используя теорему 1, получим решение поставленной краевой задачи. По формуле (10) находим тензор напряжений в среде.

Заключение. Полученное решение позволяет исследовать динамику породного массива для широкого класса транспортных нагрузок, в широком диапазоне скоростей как низкоскоростных, так и при высоких скоростях, и оценить прочностные свойства породного массива при воздействии дорожного транспорта. В частности, определить допустимые скорость его движения и грузоподъемность. Кроме того, исследование на его основе движения дневной поверхности вдоль трассы позволит установить кри-

терии на сейсмостойкость наземных сооружений и допустимые расстояния их расположения от трассы.

Работа должна найти применение в области геофизики, транспортного строительства, сейсмостойкого строительства, динамики сооружений и конструкций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Респ. Казахстан (грант № AP05132272, 2018-2020 гг.)

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов – Алма-Ата: Наука. – 1989 – 240 с. [Erzhanov ZH.S., Ajtaliev SH.M., Alekseeva L.A. Dinamika tonnelej i podzemnyh truboprovodov – Alma-Ata: Nauka. – 1989 – 240 s.]
- 2 Alexeyeva L.A., Kayshibayeva G.K. Transport solutions of Lamé equations, Shock waves // Computational mathematics and mathematical physics. – 2016. – V. 56.-No 7.-P.1343-1354.
- 3 Alekseyeva L.A. Boundary value problems of elastodynamics under stationary moving forces using boundary integral equation method//Engineering Analysis with Boundary Element. -1998.-V.22.-No. 11. –P.327-331.
- 4 Alexeyeva L.A. Singular border integral equations of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads// Differential equations. 2010. V. 46. No.4 . P.512-519.
- 5 Alexeyeva L.A. Singular Boundary Integral Equations of Boundary Value Problems of the Elasticity Theory under Supersonic Transport Loads// Differential equations, 53:3 (2017), 317-332.
- 6 Alexeyeva L.A. General Functions Method in Transport Boundary Value Problems of Elasticity Theory. – IntechOpen: Differential equations. Theory and current researches.2018.Chapter 8. P. 129-161.
- 7 Новацкий В. Теория упругости. – М: Мир. – 1970. [Novackij V. Teoriya uprugosti. – М: Mir. – 1970.]
- 8 Cole J., Huth J. Stresses produced in a half plane by moving loads// Applied Mechanics.– 25(1958).– 433-436.
- 9 Alexeyeva L.A. Dynamics of elastic half-space by the action of running load// Applied mathematics and mechanics.2007.v. 71.No 4.P. 561-569.
- 10 Alexeyeva L.A. Green tensor of subsonic transport boundary value problem for elastic halfspace //Kazakh mathematical journal. 2019. No 3. P.6-19.
- 11 Mita Chatterjee, Amares Chattopadhyay. Effect of moving load due to irregularity in ice sheet floating on water//Acta Mechanica. 2017.V.228.No5.P.1749-1765.
- 12 Петрашень Г.И. Распространение волн в анизотропных упругих средах – М.:”Наука”.- 1980. – 280 с. [Petrashen' G.I. Rasprostraneniye voln v anizotropnyh uprugih sredah – М.:”Nauka”.- 1980. – 280 s.]
- 13 Brehovskih L.M. Waves in multilayered media. – Moscow: Nauka. – 1973.
- 14 Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K. Generalized solutions of boundary value problems of dynamics of anisotropic elastic media // Journal of the Mechanical Behavior of Materials. 2005.№ 4-5. P.259-267
- 15 Zakir'yanova G.K. Wave dynamics of orthotropic elastic media under the action of impulse forces and lacuna // Proceedings of the World Congress on Engineering. 2018. Vol I. P.14-18.
- 16 Дуйшеналиев Т.Б., Закирьянова Г.К. Метод граничных интегральных уравнений в стационарных задачах для анизотропной упругой среды// Бишкек – Материаловедение. 2013. №2. С.146-149. [Dujshenaliev T.B., Zakir'yanova G.K. Metod granichnyh integral'nyh uravnenij v stacionarnykh zadachah dlya anizotropnoj uprugoj sredy// Bishkek – Materialovedenie. 2013. №2. С.146-149.]
- 17 Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М: Наука. – 1978. [Vladimirov V.S. Obobshchennye funkcii v matematicheskoy fizike. – М: Nauka. – 1978.]

Л. А. АЛЕКСЕЕВА, Г. К. ЗАКИРЬЯНОВА

ҚР БЖҒМ Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы, Қазақстан
e-mail: alexeeva@math.kz, gulmzak@mail.ru

ДЫБЫСҚА ДЕЙІНГІ КӨЛІК ЖҮКТЕМЕЛЕРІНІҢ ӘСЕРІ КЕЗІНДЕГІ АНИЗОТРОПТЫ СЕРПІМДІ ЖАРТЫЛАЙ КЕҢІСТІК ДИНАМИКАСЫНЫҢ БІРІНШІ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІ

Беті бойынша көлік жүктемесінің қозғалысы кезінде анизотропты серпімді жартылай кеңістікке арналған серпімділік теориясының бірінші шекаралық (шеткі) есебі шешілді. Қозғалыс жылдамдығы көлемді және беткі серпімді толқындардың таралу жылдамдығынан аз болған кезде дыбысқа дейінгі дорелеев жағдайы қаралды. Көліктік шекаралық (шеткі) есептің Грин тензоры салынды және оның негізінде бөлінген көлік жүктемелерінің кең классы үшін шекаралық (шеткі) есептерді шешімі берілді. Есепті шешу үшін тензорлық және сызықты алгебра әдістері, Фурье интегралды түрлендіру, дифференциалдық теңдеулер жүйесін шешудің операторлық әдісі қолданылды.

Алынған шешім кең классты көлік жүктемелеріне арналған жыныс массивінің динамикасын, төмен жылдамдықтағы және жоғары жылдамдықтағы жылдамдықтардың кең диапазонында зерттеуге және жол көлігінің әсері кезінде жыныс массивінің беріктілік қасиеттерін бағалауға мүмкіндік береді. Атап айтқанда, оның қозғалыс жылдамдығын және жүк көтергіштігін анықтау. Бұдан басқа, оның негізінде трассаның бойындағы жер бетінің қозғалысын зерттеу жер үсті құрылыстарының сейсмикалық төзімділігіне және олардың трассада орналасуының рұқсат етілген қашықтығына критерийлерін анықтауға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: серпімділік, анизотроптық орта, Грин тензоры, Фурье түрленуі, көлік жүктемесі, дыбысқа дейінгі жылдамдық, шекаралық есеп

L. A. ALEXEYEVA, G. K. ZAKIR'YANOVA

Institute of mathematics and mathematical modeling of MES RK, Almaty, Kazakhstan
e-mail: alexeeva@math.kz, gulmzak@mail.ru

THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE DYNAMICS OF AN ANISOTROPIC ELASTIC HALF-SPACE UNDER THE ACTION OF SUBSONIC TRANSPORT LOADS

The first boundary value problem of the theory of elasticity for an anisotropic elastic half-space is solved when a transport load moves along its surface. The subsonic Raleigh case is considered, when the velocity of motion is less than the velocity of propagation of bulk and surface elastic waves. The Green's tensor of the transport boundary value problem is constructed and on its basis the solution of boundary value problems for a wide class of distributed traffic loads is given. To solve the problem, the methods of tensor and linear algebra, integral Fourier transform, and operator method for solving systems of differential equations were used.

The obtained solution makes it possible to investigate the dynamics of the rock mass for a wide class of transport loads, in a wide range of velocities, both low velocities and high velocities, and to evaluate the strength properties of the rock mass under the influence of road transport. In particular, determine the permissible velocities of its movement and carrying capacity. In addition, an investigation on its basis of the movement of the day surface along the route will make it possible to establish criteria for the seismic resistance of ground structures and the permissible distances of their location from the route.

Key words: elasticity, anisotropic medium, Green's tensor, Fourier transform, transport load, subsonic velocity, boundary value problem.