Б. О. БОСТАНОВ^{*}1, Е. С. ТЕМИРБЕКОВ², А. А. АДАМОВ¹

¹Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан

e-mail:bostanov_bayandy@mail.ru

БЕЗУДАРНАЯ КОМБИНИРОВАННАЯ ТРАЕКТОРИИ РОБОТА

Рассматривается задача о формировании плавной комбинированной траектории движения робота и об определении положения точек соединения, обеспечивающие кинематические и динамические условия гладкости.

Установлены математические соотношения, выражающие условия соединения дуг траектории без скачка радиусов кривизны в местах стыковки. Предлагаемый метод позволяет сформировать сложные технические формы и создать на их основе новые модели комбинированной траектории робота непрерывной кривизны.

Ключевые слова: коника, излом, гладкость, переходная кривая, скачок кривизны.

Постановка задачи. Рассмотрим движение робота по сложной траектории, составленной из дуг кривых $F(x, y) = 0$ и $G(x, y) = 0$. Возникает два важнейших аспекта задач, решению которой посвящена настоящая исследовательская работа.

Во-первых, в точке стыковки S не имеется общая касательная (рис. 1а). Место стыковки является точкой излома, обладающая тем свойством, что ветви дуг, на которые эта точка делит исходную траекторию робота, имеют в этой точке различные касательные.

Таким образом, при переходе через точку излома скорость движения робота скачком меняет своё значение. Скорость робота до точки излома будет одна, после – другая, так что в самой точке излома скорость имеет разрыв. На практике требуется, чтобы стыковка была гладкой.

Во-вторых, в точке стыковки S имеется также разрыв по нормальному ускорению, так как в этой точке соединяемые кривые имеют различные радиусы кривизны. Возникают нежелательные ударные эффекты.

Для исключения этих двух видов скачка при движении робота по формируемой траектории [1,2] предлагается метод вставки переходного участка, математической моделью которого является кривая второго порядка (коника) (рис. 1б).

Рисунок 1

а) скачки скорости и ускорения, б) переходная коника

Искомый переходной участок $L(x, y) = 0$ в виде конической дуги должен удовлетворять следующим условиям:

а) дуга должна проходить через точки стыковки A (стартовая точка) и B (финишная точка);

б) соединяющая и соединяемая дуги должны иметь общие касательные AT и BT в этих точках соответственно;

в) соединяющая и соединяемая дуги должны иметь радиусы кривизны в этих точках соответственно.

Условия а) и в) определяют гладкостью первого порядка, а выполнение всех трех условий – гладкостью второго порядка (плавность).

Условия, обеспечивающие движение робота без скачка. Изучая свойства коник, были установлены ранее неизвестные опорные свойства, которые связывают радиус кривизны с элементами самой коники [3].

Утверждение. Если имеем две точки A и B эллипса радиусами кривизны ρ_A и ρ_B , то отношения между соответствующими элементами опорного треугольника $\triangle ATB$, составленного из касательных AT , BT и хорды AB , равны показателю искривленности

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}} \text{ (рис.2а):}$$

$$\frac{l_A}{l_B} = \frac{d_B}{d_A} = \frac{h_A}{h_B} = \eta$$

Рисунок 2

а) опорный треугольник, б) инженерный дискриминант.

Элементами опорного треугольника являются: $l_A = AT$, $l_B = BT$, – длины касательных, d_A , d_B – расстояние от центра эллипса до касательных, h_A , h_B – расстояние от стартовых и финишных точек до касательных.

По инженерному коэффициенту $f = \frac{CM}{CT}$ можно определить, к какому типу коники относится данная кривая: $f < 0,5$ – эллипс (точка M_1), $f = 0,5$ – парабола (точка M_2), $f > 0,5$ – гипербола (точка M_3).

Радиус кривизны в точке определяется по формуле $\rho_A = \frac{2f^2}{(1-f)} \frac{l_A^2}{h_B}$.

Кинематическая модель для определения финишной точки. Для определения положения финишной точки сконструируем качающийся кулисный механизм (рис.3а). Суть модели состоит в следующем: при качении кулисного механизма кулиса TD скользит по кривой $F(x, y) = 0$ и приводит в движение камень T , который, свою очередь, двигаясь вдоль прорези TD и вдоль направляющей Ax , изменяет расстояния AT и BT в зависимости от угла γ .

Рисунок 3 – Кулисный механизм
а) со скользящей и б) жесткой кулисой

Когда кривая $F(x, y) = 0$ представляет собой окружность, кинематическая модельная схема упрощается. В этом случае точки B и D совпадают, длина кривошипа OD и радиус окружности будут одинаковы, т.е. $OD = OB$, $d_B = r_B = r$. Полученная кинематическая модель (рис.3б) полностью совпадает с ранее рассмотренными нами случаями [4].

Используя усовершенствованный вариант модели (рис.3а), получим систему для нахождения финишной точки B

$$\begin{cases} \frac{l_A}{l_B} = \frac{m_A k \sqrt{1+k^2} - d_A \sqrt{1+k^2} + d_B (1+k^2)}{\sqrt{1+k^2} (\Delta l k + d_A \sqrt{1+k^2} - d_B)} = \eta, \\ \frac{d_B}{d_A} = \eta. \end{cases}$$

$$k = \tan \gamma, \quad BD = \Delta l, \quad \tan \theta = \frac{r}{r'_\phi} = \frac{d_B}{\Delta l}.$$

Уравнение конического сечения, имеющее две заданные касательные в двух точках и проходящее через третью точку, определяется с помощью уравнения Лайминга [3]

$$(1-\lambda)L_{A\tau}L_{B\tau} - \lambda L_{AB}^2 = 0,$$

где L_{At} – уравнение касательной AT , L_{Bt} – уравнение касательной BT , L_{AB} – уравнение хорды AB (рис.2б).

Параметр λ определяется заданием некоторой произвольной точки $M(x_M, y_M)$

$$\lambda = \frac{L_{At}(x_M, y_M)L_{Bt}(x_M, y_M)}{L_{At}(x_M, y_M)L_{Bt}(x_M, y_M) - L_{AB}^2(x_M, y_M)}$$

Координаты точки $M(x_M, y_M)$ находятся с использованием соотношения инженерного дискриминанта

$$f = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2l^2}{h \cdot \rho}}}$$

Иллюстрации и варианты. Рассмотрим траекторию робота, которая комбинирована из дуг кривых второго и четвертого порядков $G(x, y) = (x - 9.6812)^2 + (y + 7.0905)^2 - 36 = 0$ и лемнискаты Бернулли $F(x, y) = [x^2 + (y - 7)^2]^2 - 2a^2[x^2 - (y - 7)^2] = 0$, $a = 5$.

Выберем некоторую произвольную стартовую точку $A(4,8621; -3,5157)$ на дуге кривой второго порядка $G(x, y) = 0$.

а) *Гладкое соединение.* Пусть нам требуется соединить кривую $F(x, y) = 0$ в точке $B(6; 9)$. Имеем опорный треугольник со сторонами (рис.4а):

Рисунок 4

а) Уравнение Лайминга и б) варианты гладкой коники

$$L_{At} = 1.38x - y - 10.24 = 0, L_{Bt} = -0.69x - y + 13.15 = 0, L_{AB} = 11x - y - 57 = 0$$

Уравнения переходной коники в виде уравнении Лайминга (рис.4б).

$$L_1(x, y) = 5.0435x^2 + 1.14y^2 - 1.8251xy - 36.1414x + 2.6397y + 20.98 = 0, \lambda = 0.05 \text{ — эллипс;}$$

$$L_2(x, y) = (1 + \lambda)(1.38x - y - 10.24)(-0.69x - y + 13.15) + \lambda(11x - y - 57)^2 = 0, \lambda = 0.0055 \text{ — гипербола}$$

Проверяем условие плавности соединения.

$$\text{Радиус кривизны лемнискаты } \rho_B = \frac{2a^2}{3r_B} = \frac{50}{3 \cdot 6.3246} = 2.635$$

$$\text{Показатель искривленности } \eta = \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}} = \sqrt[3]{\frac{6}{2.635}} = 1.316$$

$$\text{Найдем } \frac{l_A}{l_B} = \frac{10.94}{6.4126} = 1.7 \neq \eta. \text{ Условие не выполняется. Это означает, что не най-}$$

дется ни одна коника, обеспечивающая плавность стыковки. Все переходные коники создают только гладкие сопряжения.

в) плавное соединение.

Используя модель кулисного механизма и решая систему уравнений, найдем угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \gamma = -1.9155$ и далее, выполняя все математические выкладки, найдем финишную точку $B(6.8; 8.1)$. Стартовая точка $A(4.8621; -3.5157)$.

$$\text{Радиус кривизны лемнискаты } \rho_B = \frac{2a^2}{3r_B} = 2.4195 \text{ и } \eta = \sqrt[3]{\frac{\rho_A}{\rho_B}} = 1.35.$$

Опорный треугольник (рис.5а)

$$L_{AT} = 1.383x - y - 10.24 = 0, \quad L_{AT} = -1.916x - y + 21.126 = 0,$$

$$L_{AB} = 5.994x - y - 32.659 = 0.$$

$$\text{Отношение длин касательных } \frac{l_A}{l_B} = \frac{7.93}{5.86} = 1.35 \text{ равно показателю искривленности}$$

η , и внутри опорного треугольника найдется точка $M(x_M; y_M)$, по которой определяем уравнение переходной коники.

Инженерный дискриминант (рис.2b):

$$f = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2l^2}{h \cdot \rho}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 7.93^2}{5.2357 \cdot 6}}} = 0.07, \quad \sigma = \frac{f}{1 - f} = 0.075,$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C + \sigma x_T}{1 + \sigma} = 6.0876 \\ y_M = \frac{y_C + \sigma y_T}{1 + \sigma} = 2.335 \end{cases}, \Rightarrow \lambda = 0.9298.$$

Уравнение переходной коники в виде уравнении Лайминга

$$L(x, y) = (1.383x - y - 10.24)(-1.916x - y + 21.126) + 0.4818(5.994x - y - 32.659)^2 = 0$$

или

$$L(x, y) = 28.2928x^2 - 10.1189xy + 2.8596y^2 - 269.7894x + 39.7249y + 574.2621 = 0$$

Рисунок 5

а) плавная переходная коника и б) зеркальный вариант

Полученное уравнение представляет собой эллипс, и дуга этой конической кривой обеспечивает плавный переход из одного участка в другой участок траектории робота. На (рис.5б) представлен зеркальный вариант траектории робота.

Заключение. Предложен новый метод формирования сложной траектории робота, состоящего из дуг кривых высокого более второго порядка, со вставным переходным элементом, моделью которой является коника. Разработанный для определения положения финишной точки кулисный механизм является усовершенствованным вариантом и отличается от предыдущего случая тем, что кулиса все время движения скользит по дуге кривой высокого порядка.

Предложенный алгоритм создания безударной траектории позволяет получать новые технические формы комбинированной траектории робота, которые обеспечивают кинематическую и динамическую гладкость.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитета науки МОН РК, грант AP05135609.

ЛИТЕРАТУРА

1 Погорелов А.Д. Обзор алгоритмов планирования траектории движения манипуляторов // Молодежный научно-технический вестник. 2016. №8. С. 2-2. Болдырев В.И. Метод кусочно-линейной аппроксимации для решения задач оптимального управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. – №1. – С. 28-123 [Pogorelov A.D. Obzor algoritmov planirovaniya traektorii dvizheniya manipulyatorov // Molodezhnyj nauchno-tekhnikeskij vestnik. 2016. №8. S. 2-2. Boldyrev V.I. Metod kusochnolinejnoj approksimacii dlya resheniya zadach optimal'nogo upravleniya // Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya. 2004. – №1. – S. 28-123]

2 Е.С. Темирбеков, Б.О. Бостанов. Аналитическое определение плавного перехода контуров деталей одежды. Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности – Иваново, 2016. – № 5 (365). – С.160-165. [E.S. Temirbekov, B.O. Bostanov. Analiticheskoe opredelenie plavnogo perekhoda konturov detalej odezhdy. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Tekhnologiya tekstil'noj promyshlennosti – Ivanovo, 2016. – № 5 (365). – S.160-165.]

3 Bayandy O. Bostanov, Erbol S. Temirbekov, Dauren T. Matin. The Model of a Transition Region with Smoothness Conditions of the Second Order. AIP Conference Proceedings 1997, 020038 (2018); doi: 10.1063/1.5049032.

4 Temirbekov, E.S. , Bostanov, B.O. , Dudkin, M.V. , Kaimov, S.T. , Kaimov, A.T. Combined trajectory of continuous curvature (2019) Mechanisms and Machine Science, 2019., 68, pp . 12-19.

Б. О. БОСТАНОВ¹, Е. С. ТЕМИРБЕКОВ², А. А. АДАМОВ¹

¹Л. Н. Гумилев ат-ғы Еуразиялық ұлттық университеті, Қазақстан

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Қазақстан
e-mail:bostanov_bayandy@mail.ru

РОБОТТЫҢ ҚҰРАМАЛЫ СОҚҚЫСЫЗ ТРАЕКТОРИЯСЫ

Роботтың кинематикалық және динамикалық тегістік шарттарын қамтамасыз ететін құрамалы жатық траекториясын құру және түйісетін жерлерін анықтау мәселелері қарастырылады.

Түйіскен жерлерде қисықтық радиустарында секіріс болдырмайтын математикалық қатынастар табылған. Ұсынылып отырған әдіс күрделі техникалық формаларды дайындауға және солардың негізінде қисықтығы үздіксіз болатын құрамалы траекториялардың жаңа модельдерін жасауға мүмкіншілік береді.

Түйін сөздер: коника, омырылым, тегістік, өтпелі қисық, қисықтық секірісі.

B. O. BOSTANOV¹, Y. S. TEMIRBEKOV², A. A. ADAMOV¹

¹ L.N.Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan

² al-Farabi Kazakh National University, Kazakhstan
e-mail:bostanov_bayandy@mail.ru

UNSTRESSED COMBINED TRAJECTORY OF ROBOT

The problem of forming a smooth combined trajectory of the robot and determining the position of the connection points, providing kinematic and dynamic smoothness conditions, is considered.

Mathematical relations are obtained that express the conditions for connecting arcs of a trajectory without a jump in the radii of curvature at the joints.

The proposed method provides the formation of complex technical forms and creates on their basis new models of the combined trajectory of a robot of continuous curvature.

Key words: conic, kink, smoothness, transition curve, curvature jump.