УДК 517

<https://doi.org/10.47533/2020.1606-146X.122>

А. М. АБЫЛАЕВА*, Б. Н. СЕЙЛБЕКОВ, А. О. БАЙАРЫСТАНОВ

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,

г. Нур-Султан, Казахстан

e-mail: abylayeva_b@mail.ru, bolat_3084@mail.ru, oskar_62@mail.ru

КОМПАКТНОСТЬ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

В статье устанавливается характеристика компактности дробных операторов общего класса, включающих операторы Римана-Лиувилля, Адамара и Эрдейи-Кобера. В работе рассматривается интегральный оператор дробного интегрирования типа Харди с неотрицательными ядрами и с переменным пределом интегрирования (функцией в качестве верхнего предела интегрирования), для которого при определенных условиях на ядро получен критерий компактности оператора в весовых пространствах Лебега, когда параметры пространств удовлетворяют условиям: $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ и $\beta \geq 0$. При этом для весового дифференциального неравенства

типа Харди на множестве локально абсолютно непрерывных функций, обращающихся в нуль и в бесконечность на концах интервала, получены более общие результаты, охватывающие ранее известные, и даны более точные оценки для наилучшей постоянной. При доказательстве основной теоремы использовались метод локализации, теорема Шаудера, признак Канторовича и теорема о равномерном пределе компактных операторов. Полученные результаты исследования вопроса компактности операторов дробного интегрирования могут быть применены в оценке решений дифференциальных уравнений, моделирующих различные процессы в математике. В частности, из этих результатов вытекают новые результаты в теории неравенств типа Харди.

Ключевые слова: интегральный оператор, пространство Лебега, компактность, весовая функция.

Введение. Пусть $1 < p, q < \infty$ и v, w – весовые функции, т.е. неотрицательные, измеримые и локально суммируемые на $I = (0, +\infty)$, т.е. $v \in L_1^{loc}(I)$, $w \in L_1(0, t)$, $\forall t > 0$. Положим $W(x) = \int_0^x w(s)ds$, $x > 0$. Пусть функция φ неотрицательная, строго возрастающая, локально абсолютно непрерывная функция: $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ и $\varphi(x) \leq x$, $\forall x \in I$.

* E-mail корреспондирующего автора: abylayeva_b@mail.ru

В этой работе рассмотрим вопрос о компактности из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ интегрального оператора

$$T_{\varphi} f(x) = \int_0^{\varphi(x)} \frac{u(s)W^{\beta}(s)f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I, \quad (1)$$

где $L_{p,w}$ – пространство всех измеримых на I функции таких, что

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^{\infty} |f(s)|^p w(s)ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 < p < \infty.$$

Если весовая функция $u(s) = 1$ и $\beta = 0$, тогда интегральный оператор (1) имеет вид:

$$K_{\alpha,\varphi} f(x) := \int_0^{\varphi(x)} \frac{f(s)w(s)ds}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I$$

ограниченность и компактность этого оператора из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ исследованы в работе [1]. Случай, когда верхний предел интеграла $\varphi(x) = x$, критерий ограниченности и компактности интегрального оператора (1) из $L_{p,w} \equiv L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v} \equiv L_{q,v}(I)$ получены в работе [2].

В работе [3] мы получили ограниченность оператора (1) из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$.

При $\varphi(x) = x$ и $\alpha \geq 1$ вопрос ограниченности оператора типа (1), содержащего оператор Римана-Лиувилля из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$, вытекает из результатов работы [4-6] и поэтому в этой работе мы рассматриваем случай $0 < \alpha < 1$.

Для любого линейного оператора $T_{\varphi} : L_{p,w} \rightarrow L_{q,v}$ для удобства положим $\|T_{\varphi}\| = \|T_{\varphi}\|_{L_{p,w} \rightarrow L_{q,v}}$.

В рамках работы неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю, соотношение вида $A \ll B$ означает $A \leq \beta B$, где некоторая положительная постоянная β , быть может, зависит от фиксированных параметров, а соотношение $A \approx B$ интерпретируется, как $A \ll B \ll A$. Z – множество всех целых чисел, p' – число, сопряженное к числу $1 < p < \infty$, т.е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных утверждений нам необходимы некоторые факты. Наряду с оператором (1), рассмотрим оператор

$$H_{\varphi} f(x) = \frac{1}{W^{1-\alpha}(x)} \int_0^{\varphi(x)} u(s)W^{\beta}(s)f(s)w(s)ds, \quad \varphi(x) \leq x, \quad \forall x \in I.$$

Легко видеть, что для $f \geq 0$

$$T_{\varphi} f(x) \geq H_{\varphi} f(x). \quad (2)$$

Из результатов работы [7] следует:

Лемма А: Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\alpha > 0$. Оператор H_Φ ограничен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда и только тогда, когда $A_\Phi = \sup_{z \in I} A_\Phi(z) < \infty$,

где $A_\Phi(z) = \left(\int_0^{\Phi(z)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$, при этом $A_\Phi \approx \|H_\Phi\|$.

Лемма В: Пусть $0 < \beta < 1$ и функция $\gamma(\cdot)$ определена на I , причем $0 < \gamma(x) \leq 1$, $\forall x \in I$. Тогда

$$\int_0^{\gamma(x)} \frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}} \leq \frac{\gamma(x)}{\beta}, \quad \forall x \in I.$$

Действительно, используя неравенство $(1-\gamma(x))^\beta \geq 1-\gamma(x)$, имеем

$$\int_0^{\gamma(x)} \frac{dz}{(1-z)^{1-\beta}} = \frac{1}{\beta} [1 - (1-\gamma(x))^\beta] \leq \frac{1}{\beta} [1 - (1-\gamma(x))] = \frac{\gamma(x)}{\beta}.$$

Основные результаты.

Теорема 1: Пусть $0 < \alpha < 1$, $\frac{1}{\alpha} < p \leq q < \infty$, $\beta \geq 0$. Пусть u – невозрастающая функция на I . Оператор T_Φ компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ тогда и только тогда, если

а) $A_\Phi = \sup_{s>0} A_\Phi(s) < \infty$ и б) $\lim_{s \rightarrow 0+} A_\Phi(s) = \lim_{s \rightarrow \infty-} A_\Phi(s) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Условие а) тривиально следует из теоремы [3], то есть из (2) следует неравенство $\|T_\Phi\| \geq \|H_\Phi\|$. Тогда в силу леммы А $\|T_\Phi\| \gg A_\Phi$.

Теперь докажем условие б) Для $0 < s < \infty$ рассмотрим семейство функций $\{f_s\}_{s>0}$, где

$$f_s(x) = \chi_{(0;\Phi(s))}(x) u^{p'-1}(x) W^{(p'-1)\beta}(x) \left(\int_0^{\Phi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{-\frac{1}{p}}, \quad x \in I. \quad (3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|f_s\|_{p,w} &= \left(\int_0^\infty |f_s(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\Phi(s)} |f_s(x)|^p w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{\Phi(s)} u^{(p'-1)p}(x) W^{p(p'-1)\beta}(x) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^{\Phi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{-1} w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(x) W^{p'\beta}(x) w(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1$$

Покажем, что семейство функции (3) слабо сходится к нулю в $L_{p,w}$. В силу теоремы ([8], VI, §2)) об общем виде линейных непрерывных функционалов на $L_{p,w}$, что имеют вид: $\int_0^{\varphi(s)} f(x)g(x)dx$, где $g \in L_{p',w^{1-p'}}$.

Поэтому, используя неравенство Гельдера с показателями p и $p' = \frac{p}{p-1}$ и с учетом (4), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi(s)} f_s(x)g(x)dx &= \int_0^{\varphi(s)} f_s(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^{\varphi(s)} |f_s(x)|^p w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\int_0^{\varphi(s)} |f_s(x)|^p w(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^{\varphi(s)} |g(x)|^{p'} w^{1-p'}(x)dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $g \in L_{p',w^{1-p'}}$ то последний интеграл в (5) стремится к нулю, при $s \rightarrow 0$, что означает слабую сходимость $f_s \rightarrow 0$, при $s \rightarrow 0$.

Так как компактный оператор в банаховом пространстве всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся, ([9], VI, 5.), то

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|T_\Phi f_s\|_{q,v} = 0. \quad (6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \|T_\Phi f_s\|_{q,v}^q &= \int_0^\infty v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t)W^\beta(t)f_s(t)w(t)dt}{(W(x)-W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx \geq \int_s^\infty v(x) \left(\int_0^{\varphi(x)} \frac{u(t)W^\beta(t)f_s(t)w(t)dt}{(W(x)-W(t))^{1-\alpha}} \right)^q dx \\ &\geq \int_s^\infty \frac{v(x)dx}{W^{q(1-\alpha)}(x)} \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t)W^{p'\beta}(t)w(t)dt \right)^{-\frac{q}{p}} \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(\tau)W^{p'\beta}(\tau)w(\tau)d\tau \right)^q \\ &= \int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(x)v(x)dx \left(\int_0^{\varphi(s)} u^{p'}(t)W^{p'\beta}(t)w(t)dt \right)^{\frac{q}{p'}} = A_\Phi^q(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\varphi(x) \leq x$, из (6) и (7) следует, что $\lim_{s \rightarrow 0} A_\Phi(s) = 0$.

Осталось показать, что $\lim_{s \rightarrow \infty} A_\Phi(s) = 0$.

Из компактности оператора $T_\Phi : L_{p,w} \rightarrow L_{q,v}$ следует компактность сопряженного оператора

$$T_\Phi^* g(s) = u(s)W^\beta(s)w(s) \int_{\varphi^{-1}(s)}^\infty \frac{g(x)dx}{(W(x)-W(s))^{1-\alpha}}, \quad x \in I \text{ из } L_{q',v^{1-q'}} \text{ в } L_{p',w^{1-p'}}.$$

Для $0 < s < \infty$ введем семейство функций:

$$g_s(x) = \chi_{[s; \infty)}(x) \left(\int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{-\frac{1}{q'}} W^{(q-1)(\alpha-1)}(x) v(x), \quad x \in I. \quad (8)$$

Эти функции корректно определены, поскольку интегралы, входящие в них, конечны в силу условия $A_\Phi < \infty$. Покажем, что для любого $s > 0$ функции $g_s \in L_{q', v^{1-q'}}$, более того, что g_s слабо сходится к нулю, при $s \rightarrow \infty$.

Также как в (4), находим норму функции (8), то есть $\|g_s\|_{q', v^{1-q'}}$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|g_s\|_{q', v^{1-q'}} &= \left(\int_0^\infty |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\int_s^\infty |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \left(\int_s^\infty \left(\int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{-1} W^{q(q-1)(\alpha-1)}(x) v^{q'}(x) v^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} = 1. \end{aligned}$$

Как и в (5), в силу (8) для $f \in L_{q, v}$, получим:

$$\int_0^\infty g_s(x) f(x) dx \leq \left(\int_s^\infty |f(x)|^q v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^\infty |g_s(x)|^{q'} v^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\int_s^\infty |f(x)|^q v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $f \in L_{q, v}$, то последний интеграл стремится к нулю, при $s \rightarrow \infty$, что показывает слабую сходимости $g_s \rightarrow 0$ в $L_{q', v^{1-q'}}$, при $s \rightarrow \infty$.

В силу компактности $T_\Phi^* : L_{q', v^{1-q'}} \rightarrow L_{p', w^{1-p'}}$, следует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \|T_\Phi^* g_s\|_{p', w^{1-p'}} = 0. \quad (9)$$

К тому же

$$\begin{aligned} \|T_\Phi^* g_s\|_{p', w^{1-p'}} &= \left(\int_0^\infty w^{1-p'}(t) \left| u(t) W^\beta(t) w(t) \int_{\Phi^{-1}(t)}^\infty \frac{g_s(x) dx}{(W(x) - W(t))^{1-\alpha}} \right|^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\geq \left(\int_0^{\Phi(s)} u^{p'}(t) W^{p'\beta}(t) w(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_s^\infty W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = A_\Phi(s). \end{aligned}$$

Из (9) вытекает: $\lim_{s \rightarrow \infty} A_\Phi(s) = 0$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Для $0 < a < b < \infty$ и для всех $f \geq 0$ положим

$$P_a f = \chi_{(0;a]} f, \quad P_{ab} f = \chi_{(a;b]} f, \quad Q_b f = \chi_{[b;\infty)} f.$$

Тогда $f = P_a f + P_{ab} f + Q_b f$ и

$$\begin{aligned} T_\varphi f &= (P_a + P_{ab} + Q_b) T_\varphi f = (P_a + P_{ab}) T_\varphi (P_a + P_{ab} + Q_b) f + Q_b T_\varphi Q_b f \\ &= P_a T_\varphi P_a f + P_a T_\varphi P_{ab} f + P_a T_\varphi Q_b f + P_{ab} T_\varphi P_a f + P_{ab} T_\varphi P_{ab} f + P_{ab} T_\varphi Q_b f + Q_b T_\varphi Q_b f \end{aligned}$$

Так как $P_a T_\varphi P_{ab} \equiv 0$, $P_a T_\varphi Q_b \equiv 0$, $P_{ab} T_\varphi Q_b \equiv 0$, то

$$T_\varphi f = P_a T_\varphi P_a f + P_{ab} T_\varphi P_a f + P_{ab} T_\varphi P_{ab} f + Q_b T_\varphi Q_b f. \quad (10)$$

Покажем, что оператор $P_{ab} T_\varphi P_{ab}$ компактен из $L_{p,w}(I)$ в $L_{q,v}(I)$.

Так как $P_{ab} T_\varphi P_{ab} f(x) = P_{ab} T_\varphi \chi_{(a;b]}(x) f(x) \neq 0$ при $x \in (a;b]$, то достаточно показать, что оператор $P_{ab} T_\varphi P_{ab}$ компактен из $L_{p,w}(a,b)$ в $L_{q,v}(a,b)$, а это в свою очередь эквивалентно компактности оператора $Tf(x) = \int_a^b K(x,s) f(s) ds$ из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$ с ядром

$$K(x,s) = \frac{u(s) W^\beta(s) v^{\frac{1}{q}}(x) \chi_{(a;b]}(s) \theta(\varphi(x) - s) w^{\frac{1}{p'}}(s)}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}},$$

где $\theta(z)$ – функция Хевисайда, (это означает что $\theta(z) = 1$ для $z \geq 0$ и $\theta(z) = 0$ для $z < 0$).

Пусть $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ – последовательность точек, определенные в доказательстве теоремы 1 из [3]. Есть точки x_i , x_{n+1} , $x_i < x_{n+1}$ такие, что $x_i \leq a < x_{i+1}$, $x_n < b \leq x_{n+1}$. Мы предполагаем, что числа a, b выбраны так, что $x_i < x_n$. Поэтому, сделав замену переменной $W(s) = W(x)t$ в приведенном ниже интеграле и применив лемму В:

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,s)|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx &= \int_a^b v(x) \left(\int_a^{\varphi(x)} \frac{\chi_{(a;b]}(s) u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{q}{p'}} dx \\ &\leq \sum_{k=i}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left(\int_0^{\varphi(x_{k-1})} \frac{u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds}{(W(x) - W(\varphi(x_{k-1})))^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{q}{p'}} dx \\ &+ \sum_{k=i}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) u^q(\varphi(x_{k-1})) W^{q\beta}(\varphi(x)) \left(\int_{\varphi(x_{k-1})}^{\varphi(x)} \frac{w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{(1-\alpha)p'}} \right)^{\frac{q}{p'}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq A_{\varphi}^q \mu(n-i+1) + \sum_{k=i}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx u^q(\varphi(x_{k-1})) (W^{\beta p'+1}(\varphi(x_{k+1})))^{\frac{q}{p'}} \\
 &\leq A_{\varphi}^q \mu(n-i+1) + (\beta p'+1) 2^{2\beta q + \frac{q}{p'}} \sum_{k=i}^n \left(\sup_{x_k > 0} \left(\int_{x_k}^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{\varphi(x_k)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \right)^q \\
 &<< \mu(n-i+1) A_{\varphi}^q < \infty, \text{ где } \sum_{k=i}^n 1 = \mu(n-i+1).
 \end{aligned}$$

Следовательно, по признаку Канторovichа ([8], XI, §3), оператор T компактен из $L_{p,w}(a,b)$ в $L_{q,v}(a,b)$, что равносильно компактности из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$ оператора $P_{ab} T_{\varphi} P_{ab}$.

Из (10) имеем

$$\|T_{\varphi} - P_{ab} T_{\varphi} P_{ab}\| \leq \|P_a T_{\varphi} P_a\| + \|P_{ab} T_{\varphi} P_a\| + \|Q_b T_{\varphi} Q_b\| \quad (11)$$

Покажем, что правая часть (11) стремится к нулю при $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. Тогда оператор T_{φ} , как равномерный предел компактных операторов ([9], VI.12) будет компактен из $L_{p,w}$ в $L_{q,v}$.

$$\begin{aligned}
 \|P_a T_{\varphi} P_a f\|_{q,v}^q &= \int_0^a v(x) \left| \int_0^{\varphi(x)} \frac{u(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} \right|^q dx \\
 &= \sum_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(x) \left| \int_0^{\varphi(x_{k-1})} \frac{u(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} + \int_{\varphi(x_{k-1})}^{\varphi(x)} \frac{u(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} \right|^q dx := F_1 + F_2.
 \end{aligned}$$

На основании теоремы 1 из работы [3] известно, что $F_1 << \sup_{z \in I} A_{\varphi}^q(z) \|f\|_{p,w}^q$, $F_2 << \sup_{z \in I} A_{\varphi}^q(z) \|f\|_{p,w}^q$. Тогда получаем оценку

$$\|P_a T_{\varphi} P_a f\|_{q,v} << \sup_{0 < z < a} A_{\varphi}(z) \cdot \|f\|_{p,w}.$$

Следовательно, $\|P_a T_{\varphi} P_a\| << \sup_{0 < z < a} A_{\varphi}(z)$. Откуда

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \|P_a T_{\varphi} P_a\| << \lim_{a \rightarrow 0+} \sup_{0 < z < a} A_{\varphi}(z) = \lim_{z \rightarrow 0+} A_{\varphi}(z) = 0. \quad (12)$$

Далее, также оцениваем следующее слагаемое

$$\|Q_b T_{\varphi} Q_b f\|_{q,v} = \left(\int_b^{\infty} v(x) \left| \int_0^{\varphi(x)} \frac{u(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$<< \sup_{b < z < \infty} \left(\int_0^{\varphi(z)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_b^{\infty} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_{p,w} = \sup_{b < z < \infty} A_{\varphi}(z) \cdot \|f\|_{p,w}.$$

В результате имеем:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \|Q_b T_{\varphi} Q_b\| << \lim_{z \rightarrow \infty} A_{\varphi}(z) = 0. \quad (13)$$

Теперь мы докажем, что $\lim_{a \rightarrow 0+} \|P_{ab} T_{\varphi} P_a\| = 0$.

Положим $v_{\varepsilon}(x) = \varepsilon v(x)$ для $x \in (0; a)$, $v_{\varepsilon}(x) = v(x)$ для $x \in [a; b]$ и $u_{\varepsilon}(x) = u(x)$ для $x \in (0; a]$ и $u_{\varepsilon}(x) = \varepsilon \cdot u(x)$ для $x \in (a; \varphi(b)]$, где $\forall \varepsilon > 0$. По условию $\varphi(x) \leq x$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$. Поэтому, в силу непрерывности φ , существует $b_1 = b_1(a) \geq a$ такой, что $\varphi(b_1) = a$. Не ограничивая общности, предположим $a \leq b_1 < b$. Из свойства функции φ следует $\lim_{a \rightarrow 0+} b_1(a) = 0$ и $\lim_{a \rightarrow 0+} \varphi(b_1) = 0$. Пусть $\theta(z)$ – функция Хевисайда, (это означает что $\theta(z) = 1$ для $z \geq 0$ и $\theta(z) = 0$ для $z < 0$). Очевидно, что функция u_{ε} – невозрастающая на I . Тогда, согласно теореме 1, в работе [3] имеем

$$\begin{aligned} \|P_{ab} T_{\varphi} P_a f\|_{q,v} &= \left(\int_a^b v(x) \left| \int_0^{\varphi(x)} \frac{\theta(a-s) u(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_0^b v_{\varepsilon}(x) \left| \int_0^{\varphi(x)} \frac{u_{\varepsilon}(s) W^{\beta}(s) f(s) w(s) ds}{(W(x) - W(s))^{1-\alpha}} \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} << A_{\varphi}^{(\varepsilon)} \|f\|_{p,w}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } A_{\varphi}^{(\varepsilon)} = \sup_{0 < z < b} \left(\int_0^{\varphi(z)} u_{\varepsilon}^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v_{\varepsilon}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь оценим $A_{\varphi}^{(\varepsilon)}$ сверху

$$\begin{aligned} A_{\varphi}^{(\varepsilon)} &\leq \sup_{b_1 < z < b} \left(\int_0^{\varphi(z)} u_{\varepsilon}^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \sup_{0 < z < b_1} \left(\int_0^{\varphi(z)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v_{\varepsilon}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = A_{\varphi,1}^{(\varepsilon)} + A_{\varphi,2}^{(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим $A_{\varphi,1}^{(\varepsilon)}$ и $A_{\varphi,2}^{(\varepsilon)}$ по отдельности

$$A_{\Phi,1}^{(\varepsilon)} \leq \sup_{b_1 < z < b} \left(\int_{\Phi(b_1)}^{\Phi(z)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon + \left(\int_0^{\Phi(b_1)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \times \\ \times \left(\int_{b_1}^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\Phi(b_1)}^{\Phi(b)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{b_1}^b W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon + A_{\Phi}(b_1). \quad (16)$$

Теперь оценим $A_{\Phi,2}^{(\varepsilon)}$:

$$A_{\Phi,2}^{(\varepsilon)} \leq \left(\int_0^{\Phi(b_1)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{b_1}^b W^{q(\alpha-1)}(x) v_{\varepsilon}(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ + \sup_{0 < z < b_1} \left(\int_0^{\Phi(z)} u^{p'}(s) W^{p'\beta}(s) w(s) ds \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^{b_1} W^{q(\alpha-1)}(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{q}} = A_{\Phi}(b_1) + \sup_{0 < z < b_1} A_{\Phi}(z) \cdot \varepsilon^{\frac{1}{q}}.$$

Так как левая часть (14) не зависит от $\varepsilon > 0$, поэтому в (14), устремив $\varepsilon \rightarrow 0$ из (15), (16) и (17), имеем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_{\Phi}^{(\varepsilon)} \leq 2A_{\Phi}(b_1)$. Следовательно, из (14) получим $\|P_{ab} T_{\Phi} P_a\| < A_{\Phi}(b_1)$. Откуда

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \|P_{ab} T_{\Phi} P_a\| < \lim_{a \rightarrow 0+} A_{\Phi}(b_1) = 0. \quad (18)$$

Из (12), (13) и (18) следует, что правая часть (11) стремится к нулю при $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow \infty$. Теорема полностью доказана.

Работа над статьей выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки РК, проект: ИРН AP08856339 (приоритетное направление "Научные исследования в области естественных наук").

ЛИТЕРАТУРА

1 Abylayeva A. Boundedness and compactness of the Hardy type operator with variable upper limit in weighted Lebesgue spaces. // Mathematical Inequalities Applications. V.23, №3 (2020), 805-819; doi: 10.7153/mia-2020-23-66.

2 Abylayeva A., Oinarov R., and Persson L.-E. Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.

3 Абылаева А.М., Сейлбеков Б.Н., Ограниченность одного оператора дробного интегрирования с переменным верхним пределом. КазНПУ вестник №3 (67), 2019. -С.7-11.

4 Ойнарлов Р. Двусторонние оценки нормы некоторых классов интегральных операторов // Труды МИ РАН. - 1993. Т. 204, - С. 240-250.

5 Степанов В.Д. Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля// Изв. АН СССР. Серия физ.-мат. 1990. Е.54, №3, -С.645-655.

6 Степанов В.Д. О весовом неравенстве типа Харди для дробных интегралов Римана-Лиувилля// Сиб. мат. Журнал 1990. Т.31, №3, -С.186-197.

7. Stepanov V.D., Ushakova E.P. Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl., –2010. 13:3. –P. 449–510.
8. Канторович Л.В., Акилов Г.Р. Функциональный анализ. М.: Наука 1977.
9. Рид М. Сайман Б. Методы современной математической физики. М. Мир. Т.1.1977.

REFERENCES

- 1 Abylayeva A. Boundedness and compactness of the Hardy type operator with variable upper limit in weighted Lebesgue spaces. // Mathematical Inequalities Applications. V.23, №3 (2020), 805-819; doi: 10.7153/mia-2020-23-66.
- 2 Abylayeva A., Oinarov R., and Persson L.-E. Boundedness and compactness of a class of Hardy type operators. Journal of Inequal. and Appl. (JIA), № 324, 2016.
- 3 Abylayeva A.M., Sejlbekov B.N., Ogranichennost' odnogo operatora drobnogo integrirovaniya s peremennim verhnim predelom. KazNPU vestnik №3 (67), 2019. -S.7-11.
- 4 Ojnarov R. Dvustoronnie ocenki normy nekotoryh klassov integral'nyh operatorov // Trudy MI RAN. - 1993. T. 204, - S. 240-250.
- 5 Stepanov V.D. Dvuhvesovye ocenki integralov Rimana-Liuvillya// Izv. AN SSSR. Seriya fiz.-mat. 1990. E.54, №3, -S.645-655.
- 6 Stepanov V.D. O vesovom neravenstve tipa Hardi dlya drobnih integralov Rimana-Liuvillya// Sib. mat. Zhurnal 1990. T.31, №3, -S.186-197.
- 7 Stepanov V.D., Ushakova E.P. Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl., –2010. 13:3. –P. 449–510.
- 8 Kantorovich L.V., Akilov G.R. Funktsional'nyj analiz. M.: Nauka 1977.
- 9 Rid M. Sajman B. Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki. M. Mir. T.1.1977.

А. М. АБЫЛАЕВА, Б. Н. СЕЙЛБЕКОВ, А. О. БАЙАРЫСТАНОВ

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

БІР КЛАСТАҒЫ ЖОҒАРҒЫ ШЕГІ АЙНЫМАЛЫ БОЛАТЫН БӨЛШЕК РЕТТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ КОМПАКТЫЛЫҒЫ

Мақалада жалпы кластың бөлік ретті интегралдық операторларының, оның ішінде Риман-Лиувиль, Адамар және Эрдейи-Кобер операторларының компакттылық сипаттамасы алынады. Бұл жұмыста Харди типтес бөлік ретті интегралдық операторының ядросы теріс емес және шегі айнымалы болатын интеграл қарастырылған (интегралдың жоғарғы шегі ретінде функция), ол үшін кеңістіктің параметрлері мынадай шарттарды қанағаттандыратын: $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ және $\beta \geq 0$ салмақты Лебег кеңістігінде оператордың ядросына белгілі бір жағдайларға байланысты компакттылық критерийі алынған. Сонымен қатар, интервал соңында нөлге және шексіздікке айналатын локальды абсолютті үзіліссіз функциялар жиынында Харди типтес салмақты дифференциалды теңсіздігі үшін бұрын белгілі болған нәтижелер қамтылып және де ең жақсы тұрақты үшін дәлірек бағалаулар алынады. Негізгі теореманы дәлелдеу үшін локализация әдісі, Шаудер теоремасы, Канторович қасиеті және компакттылық операторлардың бірқалыпты шегі туралы теорема қолданылды. Бөлік ретті интегралдау операторларының компакттылығы туралы мәселені зерттеуден алынған нәтижелерін математикадағы әр түрлі процестерді модельдейтін дифференциалдық теңдеулер шешімдерін бағалауда қолдануға болады.

Атап айтқанда, бұл нәтижелер Харди типіндегі теңсіздіктер теориясында жаңа нәтижелер береді.

Түйін сөздер: интегралдық оператор, Лебег кеңістігі, компактылық, салмақты функция.

A. M. ABYLAYEVA, B. N. SEILBEKOV, A. O. BAIARYSTANOV

L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

COMPACTNESS OF ONE CLASS OF FRACTIONAL INTEGRATING OPERATOR WITH VARIABLE UPPER LIMIT

The paper establishes a characterization of the compactness for fractional operators of a general class, including the Riemann-Liouville, Hadamard and Erdelyi-Kober operators. The paper considers an integral fractional integration operator of Hardy type with nonnegative kernels and a variable limit of integration (a function as the upper limit of integration) and under certain conditions on the kernel, a criterion of the compactness in weighted Lebesgue spaces is obtained for this operator, when the parameters of the spaces satisfy the conditions $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} < \alpha < 1$ and $\beta \geq 0$. Moreover, more general results are

obtained for the weighted differential inequality of Hardy type on the set of locally absolutely continuous functions that vanish at infinity at the ends of the interval, covering the previously known results, and more precise estimates for the best constant are given. The localization method, Schauder's theorem, the Kantorovich test, and the theorem on the uniform limit of compact operators were used in the proof of the main theorem. The obtained results of the study the compactness of fractional integration operators can be used in the estimation of solutions of differential equations that model various processes in mathematics. In particular, these results yield new results in the theory of Hardy-type inequalities.

Keywords: integral operator; Lebesgue space, compactness, weighted function.