CAPÍTULO XI

INFINITO, INDETERMINADO O NO EXISTE: ¿QUÉ DICEN LOS ESTUDIANTES?

Sebastián Francisco Herrera de la Piedra.

Magister (c) en didáctica de la Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Académico de la Universidad Tecnológica de Chile y ayudante de investigación de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. sebastian.herrera.d@mail.pucv.cl ORCID: 0000-0001-8468-8428.

Elisabeth Ramos Rodríguez.

Doctora en Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Académica de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. elisabeth.ramos@pucv.cl ORCID: 0000-0002-8409-4125.

Resumen

En distintos contextos de la matemática se pueden encontrar expresiones como $a/0$ o $0/0$. En textos escolares, las respuestas sobre el significado de estas expresiones se mencionan en términos de indefinición, no existe o no hay posibilidad de resolver ¿cuál es su acepción correcta? El presente reporte tiene como objetivo indagar si el hecho de que estudiantes interpreten como indeterminada aquellas expresiones fraccionarias donde al valorizar resulta que el divisor es 0, es un buen candidato a fenómeno. La investigación se lleva a cabo bajo un enfoque cualitativo, en la que se desarrolla un estudio de tipo descriptivo e interpretativo, aplicando un test a estudiantes de primer año de una universidad chilena. Los hallazgos evidencian que los estudiantes estudiados no asocian necesariamente a indeterminado cuando obtienen expresiones de la forma $a/0$. Además, ellos demuestran una deficiente habilidad de argumentación matemática y no comprenden que estas expresiones no están definidas en el conjunto de los números reales, lo que se condice con las dificultades históricas que se han tenido con estas expresiones.

Palabras clave: expresiones fraccionarias, indefinido, indeterminado, infinito, no existe.

INFINITE, INDETERMINATE, OR DOES NOT EXIST. WHAT DO THE STUDENTS SAY?

Abstract

In different contexts of mathematics, expressions such as ∞ or $\frac{0}{0}$ can be found. In school texts, the answers about the meaning of these expressions are mentioned in terms of indefiniteness, there is no or there is no possibility of solving what is their meaning is correct? The objective of this report is to investigate whether the fact that students interpret as indeterminate those fractional expressions where, when evaluating, the divisor is 0, is a good candidate for a phenomenon. The research is carried out under a qualitative approach, in which a descriptive and interpretive study is developed, applying a test to first-year students of a Chilean university. The findings show that the studied students do not necessarily associate indeterminate when they obtain expressions of the form $a/0$. In addition, they demonstrate a poor ability in mathematical argumentation and do not understand that these expressions are not defined in the set of real numbers, which is consistent with the historical difficulties that have been had with these expressions.

Keywords: fractional expressions indefinite, indeterminate, infinite, does not exist.

Identificación del proyecto

Este capítulo es resultado de una investigación financiada por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo ANID (Chile, a través del proyecto 11190553). Además, contó con la Beca de Reconocimiento Académico del programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Introducción

El cero es un objeto matemático controvertido y relevante en la historia de la humanidad. Las antiguas civilizaciones (babilonios, egipcios, antiguo oriente, mayas, incas, por nombrar algunas) le daban distintos usos, ya sea como sistema numérico referencial para base de conteo (base 20 para los mayas o, 60 para los babilonios o, 10 en China), como un sentido filosófico (equilibrio, perfección o plenitud) o como ausencia de elementos (Villamil y Riscanevo, 2020), pero ninguna de ellas lo consideró como un número (Villamil y Riscanevo, 2019). Pasaron muchos años para que ello ocurriera y así, el cero fuera objeto de estudio; uno de los precursores es Brahmagupta, quien definió la multiplicación cero por cero y utilizando aquella definición, concluyó que la expresión $n/0$ es 0 (Cataño, 2007). Dos siglos después, Mahavira entrega

un nuevo acercamiento definiendo a la expresión que tenga esta forma con resultado n ; pasaron tres siglos para que Bhaskara afirmara que esa misma expresión tiene como resultado infinito (Cataño, 2007). Todas estas afirmaciones son erradas.

El cero es considerado como un obstáculo epistemológico (D'Amore y Fandiño, 2012), debido a las diversas interpretaciones, las que dependen del contenido o unidad en estudio. En este trabajo se analizará la interpretación que otorga estudiantes a las expresiones del tipo $a/0$.

En los planes y programas educativos en Chile en educación básica y media (alumnos de 6 a 17 años), y dentro de los descriptores de asignaturas de matemática en Universidades e Institutos de Formación Técnica Profesional, se encuentran contenidos y unidades en el que expresiones de la forma $a/0$. Estas, pueden tomar un papel fundamental para la comprensión de la indefinición.

Por ejemplo, en el concepto de función, podemos hablar del dominio de ésta (función racional) o en la pendiente de las rectas paralelas al eje Y , o en trigonometría con la tangente de y , o en límites tendiendo al infinito. Estos, son algunos de los contenidos que causan dificultad en los estudiantes a la hora de justificar y argumentar sus respuestas con relación a este tipo de expresiones indefinidas (D'Amore y Fandiño, 2012).

El objetivo de esta investigación es indagar si el hecho de que los estudiantes interpreten como indeterminada aquellas expresiones fraccionarias donde al valorizar resulta que el divisor es 0, es un buen candidato a fenómeno. Dicho propósito emerge a raíz de las siguientes interrogantes:

- ¿Los estudiantes conocen la diferencia entre indeterminado e indefinido? y
- ¿El evento descrito es propio del estudio en valorización de expresiones algebraicas o se presenta en otros contextos?

Fundamentación Teórica

El estudio se fundamenta en la noción de obstáculo didáctico en el aprendizaje de la matemática, la que se describe como supuestos conocimientos que impiden lograr o avanzar en un

nuevo conocimiento, y que terminan siendo un impedimento para el aprendizaje del estudiante (Mena et al., 2015). Brousseau (1989), afirma que los errores no necesariamente son el producto de la ignorancia o de la inexactitud; puede tener sus orígenes en un obstáculo que surge de un conocimiento o se comporta como tal en un cierto hábitat, pero que, al modificarlo, puede ser insuficiente e inadaptado y ser fuente de errores.

Según este autor, los obstáculos pueden ser clasificados según su proveniencia en tres categorías: ontogenéticos, epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1989). Los obstáculos ontogenéticos tienen su origen en las características del desarrollo del alumno que aprende, los didácticos surgen del proceso de enseñanza, y los epistemológicos tiene su causa en el objeto matemático implicado en él (Mena et al., 2015).

Dado que el fenómeno imbricado en nuestro estudio tiene que ver con un obstáculo epistemológico pasaremos a detallar su definición. Estos obstáculos, en particular, los podemos entender como un conocimiento que es generalizado en una comunidad, que permite dar respuestas válidas en un contexto o dominio particular, e incorrectas en fuera de éstos (Bohórquez y Hernández, 2003); estos obstáculos se pueden reconocer estudiando la historia, observando las dificultades que tuvieron los matemáticos en abordar situaciones similares a los que pretendemos dar solución (Mena et al, 2015). Se debe agregar que estos obstáculos son persistentes, y a pesar de que se sabe su inexactitud, siguen apareciendo en la actividad matemática (Bohórquez y Hernández, 2003).

En el caso de la división, donde el divisor es 0, tema de controversia y discusión, se considera un obstáculo epistemológico (Veiga, 2014). Según Veiga (2014), “desde punto de vista cognitivo, las concepciones previas de los alumnos ponen en evidencia la asociación del cero al concepto de nada o vacío” (p. 1657). Esto puede llevar a definir la división por cero como sin solución o que no existe.

Una categorización de los obstáculos y dificultades asociadas a la división por cero es presentada por Veiga (2014), la que se desglosa a continuación:

- Dificultades asociadas al concepto de división aritmética: la idea arraigada de que la división es un reparto equitativo y que debe tener un resultado.

- Dificultades asociadas al concepto de infinito: los alumnos conciben al infinito como número y realizar operaciones con él. Otros, en cambio, asocian la expresión del infinito como equivalente a algo que no tiene solución.
- Dificultades asociadas al concepto de ecuación: en general, no admiten la posibilidad de que una ecuación pueda no tener solución o infinitas.

Metodología

El estudio se realiza bajo un enfoque cualitativo y es de tipo descriptivo e interpretativo, dado que se analiza el hecho o fenómeno, explorando desde la mirada de los sujetos en el ambiente natural y en relación con su contexto (Hernández et al., 2014).

La investigación se llevó a cabo con 43 estudiantes de la asignatura de Matemática I de la Universidad Tecnológica de Chile (INACAP) sede Puente Alto de Santiago. Para lograr el objetivo de la investigación, se ha considerado estudiantes que estén comenzando estudios de educación superior, de manera que se tenga certeza que tengan los conocimientos necesarios para fundamentar una expresión del tipo . Además, se ha considerado estudiantes de distintas procedencias (educación pública, semi-pagada y particular), de manera de garantizar que el hecho observado no es un evento puntual para un segmento de estudiantes específico.

Instrumento

El instrumento fue diseñado por dos académicos y posteriormente validado por expertos en didáctica de la matemática. El diseño utilizado es una encuesta del tipo semi-abierto, que consta de un ejercicio de valoración que se responde con la información que se entrega en el enunciado del instrumento, y para contestar se tienen dos recuadros: uno para el cálculo de la expresión matemática y el otro, para argumentar la respuesta obtenida.

El instrumento implementado se presenta en la Figura 1.

Figura 1.

Instrumento de Evaluación.

<u>Trabajando con fracciones</u>					
<p>Estimado estudiante desarrolla estos ejercicios con lápiz de pasta; si te equivocas en algo, no borres, puedes tachar y seguir escribiendo abajo o al lado.</p> <p>Considerando a = 3 y b = 0 evalúa, siempre que tenga sentido, la siguiente expresión, justificando:</p> $\frac{2a}{b}$					
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">Cálculo</th> <th style="padding: 5px;">Justificación de tu respuesta</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="height: 100px;"></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Cálculo	Justificación de tu respuesta			
Cálculo	Justificación de tu respuesta				
<p><i>Gracias por tu colaboración. Tus respuestas serán usadas exclusivamente para una investigación en educación matemática.</i></p>					

Fuente: elaboración propia (2020).

Protocolo de aplicación

El instrumento de recogida de datos se aplicó vía online de forma sincrónica debido a la situación mundial (pandemia), para esto se utiliza la plataforma Microsoft Teams que está disponible para todos los estudiantes y académicos de la Universidad INACAP. En la clase anterior ellos firmaron una carta de consentimiento de participación, además se les explicó sobre la importancia de la investigación y que sus respuestas y resultados no serían publicadas con sus identidades.

Las instrucciones fueron entregadas por el profesor al inicio de la reunión (clase), ellas fueron:

- El trabajo es individual.
- El tiempo para resolver el instrumento es de 10 minutos.
- Responder en los recuadros entregados (primer recuadro, colocar el cálculo y en el segundo recuadro, la justificación de su respuesta).
- Las respuestas se deben enviar al mail de su profesor, en un Word o una foto.

Categoría de Análisis

El análisis se realiza bajo el método de análisis de contenido (Flick 2004), donde las unidades de análisis corresponden a las respuestas de cada alumno. Las categorías de análisis se establecen de acuerdo a los tipos respuestas esperadas y a las dificultades y obstáculos epistemológicos que se presentan en el marco de referencia, las que se presentan en la Tabla 1, dejando abierta la posibilidad a categorías emergentes.

Tabla 1.

Categorías de Análisis.

<i>Categorías de Análisis</i>		
<i>Sigla</i>	<i>Categoría</i>	<i>Descripción</i>
C1	Indeterminado	Al evaluar la expresión, el estudiante considera que cuando se obtiene un denominador igual a 0, es indeterminado.
C2	No existe	Al evaluar la expresión, el estudiante considera que cuando se obtiene un denominador igual a 0, no existe.
C3	Cero	Al evaluar la expresión, el estudiante considera que cuando se obtiene un denominador igual a 0, es cero.
C4	Indefinido	Al evaluar la expresión, el estudiante considera que cuando se obtiene un denominador igual a 0, es indefinida.
C5	Uno	Al evaluar la expresión, el estudiante considera que cuando se obtiene un denominador igual a 0 el resultado es uno.

Fuente: elaboración propia (2020).

Resultados

En la Tabla 2 se muestra un resumen de la categorización de las respuestas de los 43 alumnos, asociadas a las categorías declaradas y emergentes.

Tabla 2.

Categorías de análisis

<i>Categorías de análisis</i>	
<i>Categoría</i>	<i>Frecuencia de Categoría</i>
Cero (declarada)	13
No existe (declarada)	4
No se puede (emergente)	7
Infinito (declarada)	2
Seis (emergente)	11
No real (emergente)	1
0,6 (emergente)	1
6/0 (emergente)	2
Error (emergente)	1
cinco (emergente)	1
Total	43

Fuente: elaboración propia (2020).

Se puede observar que ningún estudiante entregó la respuesta correcta, lo que es esperado según el objetivo de estudio, además se destaca que hay 7 categorías emergentes, donde “seis” es una de las que tiene mayor frecuencia junto con la categoría “cero”. A continuación, se desarrolla el análisis en profundidad según categoría.

Categoría Cero: Una de las respuestas entregadas por los estudiantes en el instrumento es cero,

como se visualiza en la Figura 2.

Figura 2. Ejemplo de
alumno concluye

$$\frac{2.3}{0} = \frac{6}{0} = 0 //$$

de respuesta donde el
que es cero

Fuente: estudiante entrevistado (2020).

Se puede observar que el estudiante valoriza la expresión de forma correcta, lo que nos da a entender que tiene nociones del álgebra y lógicamente de multiplicaciones de números enteros, pero llegado el momento de realizar la división por cero, se encuentra con un problema, asu-

Porque todo número dividido en 0 es cero como resultado.

miendo que la expresión $6:0$ es cero.

Figura 3. Ejemplo de respuesta donde el alumno argumenta porque es cero.

Fuente: estudiante entrevistado (2020).

El estudiante justifica su respuesta diciendo “todo número dividido en cero es cero”, esto llevará a evaluar su respuesta: “Como el resultado de multiplicar algo por cero es siempre cero, dividiendo algo por cero nos da el mismo resultado”.

Categoría no existe: otra respuesta mencionada por los estudiantes, la división por cero no

③ $\frac{2a}{b} = \frac{6}{0}$ no existe respuesta para este ejercicio

existe como se muestra en la siguiente imagen.

Figura 4. Ejemplo de respuesta donde el alumno concluye que no existe

Fuente: estudiante entrevistado (2020).

Al igual que el análisis anterior se evidencia que el estudiante conoce la valorización y la división por cero, la cual menciona que es inexistente. Se puede deducir que para él no tiene sentido dividir por cero.

Categoría no se puede (emergente): en esta categoría emergente, los estudiantes concordaron, en su mayoría, que la división por cero no podía realizarse como muestra la siguiente imagen.

Figura 5.

Ejemplo de
cluye que no

respuesta donde el alumno con-
es posible calcular

Fuente: estudiante entrevistado (2020).

Los sujetos en estudio mencionan esta categoría la cual no se había tomado en consideración a la hora de realizar la investigación. Para ellos no tiene sentido dividir por cero, como no manejan vocabulario técnico se llega a la conclusión que falta uso del término indefinido, indeterminado o imposible de resolver.

Categoría infinita: esta categoría es declarada por los investigadores, los estudiantes men-

cionan que la división con denominador cero da como respuesta “infinito”.

Figura

Ejemplo
donde el
cluye

Handwritten student work on a piece of paper. It shows a division problem: $3) \frac{2 \cdot 3}{0} = \frac{6}{0} = \infty$. To the right of the equation, the student has written in Spanish: "todo número que se divide en 0 es infinito".

6.

de respuesta
alumno con-
que es infinito

Fuente: estudiante entrevistado (2020).

Parece ser que el estudiante menciona esta respuesta porque el cero es el límite de los resultados, llegando a esta conclusión desde sus conocimientos de la matemática avanzada.

De los resultados que arrojan la aplicación de los instrumentos se puede afirmar que los estudiantes, tienen una noción errada de las expresiones del tipo $a/0$, lo que los lleva a argumentos erróneos, o puede que sea un obstáculo epistemológico (D'Amore y Fandiño, 2012), considerando que sus respuestas son cercanas o congruentes con las que entregan matemáticos a lo largo de la historia.

Por lo anterior, estamos de acuerdo con Toro y Castro (2020), quienes afirman que la argumentación es esencial para la construcción del conocimiento y debe estar presente en la planificación y en las aulas. Esto se puede lograr utilizando el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), estrategia que permiten la comprensión y la profundización de situaciones de aprendizaje que el docente pretende implementar en el aula, (Hernández et al., 2018), fomentando el aprendizaje colaborativo, y con ello el desarrollo de habilidades como la argumentación (Valenzuela, 2017). La investigación abrió otras vertientes, tales como verificar qué entienden los estudiantes al contestar “no se puede” o, “no existe” ¿los estudiantes al no recordar el con-

cepto “indefinido”? ¿le atribuyen las concepciones anteriores para referirse a este?

Conclusiones

A la luz de los hallazgos se puede concluir que el hecho de que los estudiantes interpreten como indeterminada aquellas expresiones fraccionarias donde al valorizar, resulta que el divisor es 0, no califica para ser un buen candidato a fenómeno. Esto se puede desprender de las respuestas obtenidas y resumidas en la Tabla 2, que los estudiantes, en su mayoría, no consideran la expresión del tipo $a/0$ como indeterminada, sino que lo asocian con mayor frecuencia a “cero” o a “seis”.

Se puede considerar, según estos datos, que un gran número de estudiantes cuentan con pocas habilidades de argumentación, ya que no profundizan explicando las soluciones que dan a expresiones del tipo $a/0$. Además, las respuestas asociadas a algunas categorías evidencian que los estudiantes tienen escasas nociones matemáticas, lo que pudo observar, por ejemplo, en relación a las respuestas asociadas a la categoría seis. Este estudio pretende aportar con evidencias sobre un tema relevante en relación con la enseñanza del cálculo que puede dar luces a otros investigadores o formadores de educación superior para tomar decisiones en torno a esta temática tan presente en la vida escolar y universitaria.

Referencias

- Bohórquez, H y Hernández, A. (2003). El razonamiento común: un obstáculo epistemológico en geometría. *Revista de Pedagogía*, 24(69), 7-37. Recuperado en 28 de junio de 2021, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0798-97922003000100002&lng=es&tlng=es
- Brousseau, G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*. Construction des savoirs, 41-63.
- Cataño, A. (2007). *Estudio Didáctico Del Cero*. Maestría en Ciencias en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional.

- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2012). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y Didácticos del número más misterioso*. Bogotá: Magisterio.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.
- Hernández, E., Barbera, N., Vega, A. y Osnamir, B. (2018). *Aprendizaje basado en el problema: Una estrategia pedagógica para la formulación de proyectos de investigación en el aula*. (Ed.), *Tendencia en la Investigación Universitaria. Una visión desde Latinoamérica* (pp. 146 – 165). Venezuela: Fondo Editorial Servando Garcés. https://www.alinin.org/alininwp/wp-content/uploads/2019/06/tendencias_investigacion_universitaria_3.pdf
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. 6th ed. México: McGraw-Hill.
- Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya-Delgadillo, E., Morales, A., y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(3), 329-358. <https://doi.org/10.12802/reime.13.1832>
- Toro, J. y Castro, W. (2020). Condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas en clase. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(1), 35-44.
- Valenzuela, E. (2017). *Educación Cooperativa: una alternativa para generar conocimiento social transformador*. (Ed.), *Tendencia en la investigación Universitaria. Una visión desde Latinoamérica* (pp. 146 – 165). Venezuela: Fondo Editorial Servando Garcés. <https://www.alinin.org/alininwp/wp-content/uploads/2019/06/PRIMER-LIBRO-DE-TENDENCIAS-EN-INVESTIGACION-VOL1.pdf>
- Veiga, D. (2014). Análisis socioepistemológico de los obstáculos asociados a la división por cero. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27(1), pp.1655-1663.
- Villamil, J. y Riscanevo, L. (2019). *Número Cero: algunas interpretaciones desde el aula*.