УДК 004.94

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА В СРЕДЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ANYLOGIC

Осипов Геннадий Сергеевич

д.т.н., зав кафедрой информатики

ФГБОУ ВО «Сахалинский государственный университет»

Аннотация. Проведено качественное исследование эволюции динамической консервативной системы Лоренца со странным аттрактором в терминах современного формально-математического аппарата. Для оценки достоверности результатов качественного анализа произведено имитационное моделирование исследуемой системы на базе современной среды имитационного моделирования *Anylogic*, которая обеспечивает поддержку всех известных в настоящее время парадигм моделирования.

Компьютерное моделирование выполнено для широкого круга экспериментов при различных параметрах исследуемой модели. Выполнена визуализация результатов анализа модели в виде интегральных и фазовых траекторий на плоскости и в пространстве.

Ключевые слова: динамическая система Лоренца, исследование на асимптотическую устойчивость, имитационное моделирование.

INVESTIGATION OF THE LORENTZ DYNAMIC SYSTEM IN THE ANYLOGIC SIMULATION ENVIRONMENT

Osipov Gennady Sergeyevich

Abstract. A qualitative study of the evolution of a dynamic conservative Lorentz system with a strange attractor in terms of a modern formal mathematical apparatus is carried out. To assess the reliability of the results of qualitative analysis, a simulation of the system under study was performed on the basis of the modern AnyLogic simulation environment, which provides support for all currently known modeling paradigms.

Computer modeling is performed for a wide range of experiments with different parameters of the model under study. Visualization of the results of the model analysis in the form of integral and phase trajectories on the plane and in space is performed.

Keywords: Lorentz dynamical system, research on asymptotic stability, simulation.

Введение

Одна из известнейших лекций метеоролога Эдвард Н. Лоренца «Может ли взмах крыльев бабочки в Бразилии вызвать торнадо в Техасе?» в свое время вызвала колоссальный резонанс в научном обществе. И ответом на этот вопрос является: «Да, действительно может». Эдвард Лоренц, основоположник теории хаоса, назвал это явление эффектом бабочки. Взмах крыльев бабочки

символизирует мелкие изменения в первоначальном состоянии системы, которые вызывают цепочку событий, ведущих к крупномасштабным изменениям.

Макро-суть этого эффекта в том, «действия одного человека или группы людей вызывают конфликт между целыми нациями и странами, приводят к глобальным военным операциям, которые затем могут привести к уничтожению жизни на огромных территориях, а в современном мире — и на всей планете» [1]. Даже небольшие изменения в нашем мире приводят к непредсказуемым последствиям в другом месте и в другое время.

В настоящее время общеизвестно, что невозможен, например, долгосрочный прогноз погоды или котировок активов на фондовой бирже. Системы такого класса относятся к хаотическим, эволюция которых описывается странными аттракторами и характеризуется тем, что малые изменения начальных условий (например, обусловленные погрешностями измерений) приводит к абсолютно непредсказуемым, «катастрофическим» последствиям.

Качественный анализ системы Лоренца достаточно полно описан в научных публикациях (например, [2, 3]), однако появление современных инструментальных средств символьных вычислений и имитационного моделирования позволяет применить инновационные методы исследования хаотических систем, переосмыслить фундаментальные основы качественного анализа и получить практически значимые результаты в описании эволюции таких систем.

Целью настоящего исследования является формализация оценки устойчивости системы Лоренца и выполнение проверочных вычислительных экспериментов в среде *Anylogic*, поддерживающей все известные парадигмы моделирования.

1. Постановка задачи

Исследуется нелинейная автономная динамическая система Лоренца:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z)x - y; (a, b, c > 0) \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases}.$$

Стационарные точки находятся из решения системы уравнений:

$$\begin{cases} -ax + ay = 0 \\ bx - xz - y = 0 \\ xy - cz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(b - 1 - z) = 0 \\ x^2 = cz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \\ z = b - 1 \\ x = y \end{cases}.$$

Таким образом, система Лоренца при любых значениях параметров имеет нулевое положение равновесия $O(0,0,0)$, а при $b > 1$ еще два ненулевых

$$E_{1,2} \left(\pm \sqrt{c(b-1)}, \pm \sqrt{c(b-1)}, b-1 \right).$$

Очевидно, $E_{1,2} \xrightarrow{b \rightarrow 1} O$ и значение $b=1$ является бифуркационным.

Таким образом исследованию на асимптотическую устойчивость подлежат три стационарные точки.

2. Оценка устойчивости в нулевой стационарной точке

2.1. Качественный анализ

Составим Якобиан:

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b-z & -1 & -x \\ y & x & -c \end{pmatrix}.$$

В нулевой точке

$$J_0 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{pmatrix}; |J_0| = ac(b-1); \text{tr}(J_0) = -(a+c+1)$$

и характеристическое уравнение примет вид:

$$(\lambda + c)((\lambda + 1)(\lambda + a) - ab) = 0,$$

$$\text{или } (\lambda + c)(\lambda^2 + \lambda(a+1) + a(1-b)) = 0.$$

Значит имеется три собственных числа: $\lambda_1 = -c < 0$,

$$\lambda_{2,3} = -\left(\frac{a+1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + a(b-1)} = -\left(\frac{a+1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + ab},$$

и, соответственно три собственных вектора:

$$\xi_1 = \{0, 0, 1\}, \xi_{2,3} = \left\{ -\frac{a-1 \pm \sqrt{(a-1)^2 + 4ab}}{2b}, 1, 0 \right\}$$

Таким образом:

✓ при $b < 1 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$ (стационарная точка $O(0,0,0)$ является

устойчивым узлом, при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории будут стремиться к началу координат);

✓ при $b > 1 \Rightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ (неустойчивая точка равновесия типа седло);

✓ при $b = 1$ существует корень, равный 0 (состояние «на грани устойчивости»).

При переходе через значение параметра $b^* = 1$ стационарная точка теряет устойчивость.

2.2. Имитационное моделирование

Имитационное моделирование выполнялось в среде *Anylogic* с использованием парадигмы системно-динамического моделирования.

1) Пусть $b = 0,5 < b^*$; $a = 10$; $c = 8/3$.

На рисунке 1 представлена структура имитационной модели в среде *Anylogic* и графики $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ для исследуемого набора параметров.

Рис. 1 Структура модели и временные графики

В данном случае система из начальной точки $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ переходит к стационарной $O(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = O(0, 0, 0)$, которая является устойчивым узлом.

На рисунке 2 приведены две фазовые плоскости с траекториями $y(x)$, $z(x)$ и $x(z)$, $y(z)$.

Рис. 2 Фазовые плоскости при $b=0,5$

На рисунке 3 представлена фазовая траектория системы в 3-х мерном пространстве (цвет меняется от красного к зеленому).

Рис. 3 Фазовое пространство

2) Пусть $b = 1.5 > b^*$; $a = 10$; $c = 8/3$

В этом случае стационарная точка классифицируется как седло. На рисунках 4 и 5 представлены соответствующие временные графики и фазовые плоскости.

Рис. 4 Временные графики при $b=1,5$

Фазовые траектории сначала приближаются к началу координат, а потом отдаляются от него.

Рис. 5 Фазовые плоскости при $b=1,5$

На рисунке 6 изображены соответствующие фазовые траектории в 3-мерном пространстве координат

Рис. 6 Фазовое пространство при $b=1,5$

3. Оценка устойчивости в ненулевых стационарных точках

3.1. Качественный анализ

Исследуем поведение системы
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (b - z)x - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases}$$
 в малой окрестности

стационарной точки $E_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = E_1(\sqrt{c(b-1)}, \sqrt{c(b-1)}, b-1)$, т.е. положим $x = \bar{x} + \tilde{x}; y = \bar{y} + \tilde{y}; z = \bar{z} + \tilde{z}$

Тогда получим

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -a\tilde{x} + a\tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} - \tilde{y} - \bar{x}\tilde{z} \\ \dot{\tilde{z}} = \bar{x}\tilde{x} + \bar{x}\tilde{y} - c\tilde{z} \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{vmatrix} -a-\lambda & a & 0 \\ 1 & -1-\lambda & -\bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & -c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 + (a+c+1)\lambda^2 + c(a+b)\lambda + 2ac(b-1) = 0$$

Устойчивость или неустойчивость положения равновесия определяется знаками действительных частей собственных значений.

В соответствии с критерием устойчивости систем Рауса-Гурвица (в случае системы третьего порядка) для того, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$a_i > 0 (i = \overline{0,3}); a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0. \quad \text{Здесь } a_i - \text{коэффициент при } \lambda^i \text{ в}$$

характеристическом многочлене. Первые четыре ограничения представляют собой необходимое условие устойчивости.

В нашем случае

$$a_3 = 1 > 0, a_2 = (a+c+1) > 0, a_1 = c(a+b) > 0, a_0 = 2ac(b-1)$$

$$a_2 a_1 - a_3 a_0 = (a+c+1)(a+b) - 2a(b-1)$$

Тогда необходимое и достаточное условие примет вид:

$$\begin{cases} b > 1 \\ a(a+c+3) + b(c-a+1) > 0 \end{cases}$$

Координаты второй точки бифуркации b^{**} найдутся из условия

$$a(a+c+3) + b(c-a+1) > 0 \Rightarrow a(a+c+3) > b(a-(c+1))$$

$$\text{Окончательно } b^{**} = \frac{a(a+c+3)}{(a-(c+1))}; (a > c+1)$$

Таким образом, при $b < b^{**}$ стационарная точка будет асимптотически устойчива, а при $b > b^{**}$ – нет (по критерию Рауса-Гурвица).

3.2. Компьютерный эксперимент

Пусть $a=10$, $c=8/3$, тогда $b^{**}=24,737$.

1) Положим $b=15 < b^{**}$, $x_0, y_0, z_0 = 10$

Получили устойчивый фокус $F \begin{pmatrix} \bar{x} \approx 6,1 \\ \bar{y} \approx 6,1 \\ \bar{z} = 14 \end{pmatrix}$.

На рисунке 7 нанесены соответствующие асимптоты.

Рис. 7 Интегральные кривые

Фазовые портреты системы представлены на рисунке 8.

Рис. 8 Фазовые портреты при $b=15$

На рисунке 9 изображено фазовое пространство и траектория системы.

Рис. 9 Фазовое пространство при $b=15$

1) Положим $b = 28 > b^{**}$, $x_0, y_0, z_0 = 10$

Результаты исследования показаны на рисунках 10, 11 и 12.

Рис. 10 Интегральные траектории при $b=28$

В том случае имеем странный аттрактор при $E_{1,2} = E_{1,2}(\pm 8,485; \pm 8,485; 27)$

Рис. 11 Фазовые траектории при $b=28$

На рисунке 12 представлен начальный участок фазовой траектории системы.

Рис. 12 Фазовая траектория при $b=28$

Система Лоренца имеет высокую чувствительность к изменению исходных данных. Так на рисунке 13 приведены результаты численного эксперимента при $b=27,9$ и $b=28$.

Рис. 13 Результаты имитационного эксперимента

Даже при небольших изменениях исходных данных фазовые траектории достаточно быстро расходятся.

При больших значениях b появляются сочетания хаотических и периодических поведений (см. рисунок 14).

Рис. 14 Фазовые траектории при больших значениях параметра b

Выводы

Изложена методология современного качественного анализа динамической системы Лоренца. Практическая апробация формальных зависимостей выполнена в универсальной среде имитационного моделирования *Anylogic*. Проведенный имитационный эксперимент подтверждает корректность полученных формальных зависимостей и свидетельствует о достоверности результатов качественного анализа системы.

Список литературы

1. Что такое «Эффект бабочки»? Объясняем простыми словами. <https://zen.yandex.ru/media/scienceliferu/chto-takoe-effekt-babochki-obiasniaem-prostymi-slovami-5c8b86d4b1d4aa00b363de46>
2. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
3. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение / Предисл. Г.Г. Малинецкого. М.: КомКнига. 2006. 208 с. (Синергетика: от прошлого к будущему).

©Г.С. Осипов. 2020