УДК 519.624.2

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ
ДИФФУЗИИ ОКОЛО КАПЛИ В ПОТОКЕ С УЧЕТОМ ОБЪЕМНОЙ
ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ**

Кириллова Ирина Владимировна

студентка института физики,
математики, цифровых и нанотехнологий
ФГБОУ ВО БГПУ им. М.Акмиллы

Научный руководитель: **Ахметов Рустям Гилимович**

д. ф-м. н., профессор кафедры ПиВМ
ФГБОУ ВО БГПУ им. М.Акмиллы

Аннотация: Статья посвящена краевой задаче квазилинейного эллиптического уравнения в частных производных. Уравнение описывает процесс конвективной диффузии около капли в потоке с учетом объемной химической реакции. Для рассматриваемой задачи асимптотическое разложение решения получается около сферической капли.

Ключевые слова: краевая задача, метод согласования, седловая точка, диффузионный пограничный слой, асимптотическое разложение.

**AN ASYMPTOTIC SOLUTION TO THE PROBLEM OF CONVECTIVE
DIFFUSION NEAR A DROP IN THE FLOW, TAKING INTO ACCOUNT
THE VOLUME CHEMICAL REACTION**

Kirillova Irina Vladimirovna

Scientific adviser: **Akhmetov Rustyam Gilimovich**

Abstract: The article is devoted to the boundary value problem of a quasi-linear elliptic partial differential equation. The equation describes the process of convective diffusion near a drop in the flow, taking into account the volume chemical reaction. For the problem under consideration, the asymptotic expansion of the solution is obtained near a spherical drop.

Key words: boundary value problem, matching method, saddle point, the diffusion boundary layer, asymptotic expansion.

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача

$$\Delta u = Pe(\bar{V}, \nabla)u + k_v F(u), \quad (1.1)$$

$$u = 1 \text{ при } r = 1; u \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

где $\bar{V} = (V_r, V_\theta, 0)$, $V_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $V_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $\psi(r, \theta)$ – функция тока, r, θ – сферические координаты ($0 \leq \theta \leq \pi$), Δ – оператор Лапласа, Pe – число Пекле и k_v – константа скорости объемной химической реакции. Угол θ отсчитывается от направления потока на бесконечности.

В линейном случае, то есть $F(u) \equiv u$, задача рассматривается в работе [1].

Функция тока имеет вид:

$$\psi(r, \theta) = \frac{\sin^2 \theta (r-1) \left(2r - \frac{\lambda}{\lambda+1} \left(1 + \frac{1}{r} \right) \right)}{4}, \text{ где } \lambda - const. \quad (1.3)$$

Предположим, что

$$F(u) \in C^k, F(0) = 0, F'(0) = 0, F''(0) > 0, k > 9, \quad (1.4)$$

и имеет разложение

$$F(u) = u^2 + F_2 u^4 + F_3 u^6 + F_4 u^8 + O(u^{10}) \text{ для } u \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

2. Диффузионный пограничный слой

В диффузионном слое введем параметр $\varepsilon = Pe^{-\frac{1}{2}}$ и перепишем уравнение (1.1) в виде:

$$L_\varepsilon u - \mu F(u) = \varepsilon^2 \Delta u - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \mu F(u) = 0. \quad (2.1)$$

В том случае, когда введенный параметр будет равен нулю, уравнение (2.1) имеет седловые точки: $O_1(1, \pi), O_2(1, 0)$.

Вблизи поверхности капли естественные переменные $x = \varepsilon^{-1}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}(r - 1), \theta$. Асимптотика решения строится как

$$u(x, \theta, \varepsilon) = u_0(x, \theta) + O(\varepsilon). \quad (2.2)$$

Для определения $u_0(x, \theta)$ в переменных x, θ с использованием (1.1) – (1.2), (2.1) получаем задачу:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - x \cos \theta \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u_0}{\partial \theta} - \mu(\lambda + 1)F(u_0) = 0, \quad (2.3)$$

$$u_0(0, \theta) = 1; u_0(x, \theta) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Асимптотика решения $u_0(x, \theta)$ при $\theta \rightarrow \pi$ изучена в работе [2].

3. Асимптотика функции $u_0(x, \theta)$ при $\theta \rightarrow 0$

Асимптотическое разложение $u_0(x, \theta)$ при $\theta \rightarrow 0$ будем искать в виде:

$$u_0(x, \theta) = v_0(x) + O(\theta^2), \quad (3.1)$$

где функция $v_0(x)$ построена как решение задачи

$$v_0''(x) - xv_0'(x) - \mu(\lambda + 1)F(v_0(x)) = 0, \quad (3.2)$$

$$v_0(0) = 1; v_0(x) = O(1) \text{ при } x \geq 0. \quad (3.3)$$

Теорема. Пусть для функции $F(u)$ справедливы условия (1.4), (1.5), тогда для решения задачи (3.2)-(3.3) существует асимптотика при $x \rightarrow \infty$, имеющая вид:

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^n \frac{C_{0,k}}{(\mu \ln(x) + c)^k} + \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^m \frac{C_{1,k}}{(\mu \ln(x) + c)^k} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad (3.4)$$

для некоторого $c \in R$, где

$$C_{0,1} = 1; C_{0,2} = \text{const}; C_{0,3} = C_{0,2}^2 + F_2; C_{0,4} = \frac{1}{2}(2C_{0,2}C_{0,3} + 4F_2C_{0,2});$$

$$C_{0,5} = \frac{1}{3}(2C_{0,2}C_{0,4} + 6F_2C_{0,2}^2 + 4F_2C_{0,3} + F_3 + C_{0,3}^2);$$

$$C_{0,6} = \frac{1}{4}(2C_{0,2}C_{0,5} + 2C_{0,3}C_{0,4} + 4F_2C_{0,2}^3 + 12F_2C_{0,2}C_{0,3} + 4F_2C_{0,4} + 6F_3C_{0,2});$$

$$C_{0,7} = \frac{1}{5}(2C_{0,2}C_{0,6} + 2C_{0,3}C_{0,5} + F_2C_{0,2}^4 + 6F_2C_{0,3}^2 + 12F_2C_{0,2}^2C_{0,3} +$$

$$12F_2C_{0,2}C_{0,4} + 4F_2C_{0,5} + 15F_3C_{0,2}^2 + 6F_3C_{0,3} + F_4 + C_{0,4}^2);$$

$$C_{1,2} = -\frac{\mu}{2}; \quad C_{1,3} = -\frac{\mu}{2}(2C_{0,2} + 2\mu); \quad C_{1,4} = -\frac{\mu}{2}(3C_{0,3} + 6\mu C_{0,2} + C_{1,3} - 2C_{1,2}C_{0,2});$$

$$C_{1,5} = -\frac{\mu}{2}(4C_{0,4} + 12\mu C_{0,3} + 2C_{1,4} - 2C_{1,3}C_{0,2} - 2C_{1,2}C_{0,3} - 4F_2C_{1,2});$$

$$C_{1,6} = -\frac{\mu}{2}(5C_{0,5} + 20\mu C_{0,4} + 3C_{1,5} - 2C_{0,4}C_{1,2} - 2C_{0,2}C_{1,4} - 2C_{0,3}C_{1,3} - 12F_2C_{0,2}C_{1,2} - 4F_2C_{1,3}).$$

$$v_0(x) > 0; v_0'(x) < 0 \text{ для } x > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1 работы [Error! Reference source not found.]. Решение $v_0(x)$ ищем в виде:

$$v_0(x) = v_n(x) + w(x), \quad (3.6)$$

где $v_n(x) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=1}^n C_{i,k} x^{-2i} \left(\frac{1}{\mu \ln(x) + c} \right)^k$, при $x \geq 2, n \geq 8, m \geq 1, v_n(x) \in$

$C^2(x \geq 0)$. Подставляя сумму (3.6) в уравнение (3.2), получаем задачу

$$Lw - \mu(F(w + v_3) - F(v_3)) = H_3(x), \quad (3.7)$$

$w(x) \rightarrow 0, w'(x) \rightarrow 0$, для $x \rightarrow \infty$, где $|H_3(x)| \leq M(\ln(x))^{-9} + Mx^{-2}(\ln(x))^{-4} + Mx^{-4}$.

Аналогично теореме 1 [3] для решения уравнения (3.7) получаем неравенство:

$$|w(x)| \leq M_1(\ln(x))^{-9} + M_1x^{-2}(\ln(x))^{-4} + M_1x^{-4}$$

для некоторого $M_1 > 0$.

4. Область задней критической точки

Решение в окрестности задней критической точки строится в переменных $x = \varepsilon^{-1}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}(r - 1), \xi = \varepsilon^{-1}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}\theta$. Главный член строится как решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(3)}(x, \xi)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^{(3)}(x, \xi)}{\partial x^2} - t \frac{\partial u^{(3)}(x, \xi)}{\partial x} + \left(\frac{\xi}{2} + \frac{1}{\xi} \right) \frac{\partial u^{(3)}(x, \xi)}{\partial \xi} \\ - \mu(\lambda + 1)F(u^{(3)}(x, \xi)) = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u^{(3)}(0, \xi) = 1; \frac{\partial u^{(3)}(x, \xi)}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0, \quad (4.2)$$

и условию согласования:

$$u^{(3)}(x, \xi) - v_0(x) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Функция $v_0(x)$, построенная в теореме 1, удовлетворяет всем требуемым условиям (4.1) – (4.3).

5. Численное решение

Заметим, что постоянная c – произвольная. Уравнение (1.1) перепишем в виде системы:

$$\begin{cases} y'(t) = z(x) \\ z'(x) = xz(x) + \mu F(u) \end{cases} \quad (5.1)$$

Из условий устойчивости явной схемы Рунге-Кутты следует, что начальные условия необходимо задавать при большом значении x и интегрировать назад (то есть, с шагом $h < 0$), например, в точке $x_0 = 150$:

$$y(150) = y_0, z(150) = z_0, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 y_0 \approx & \frac{C_{0,1}}{(\mu * \ln(x) + c)} + \frac{C_{0,2}}{(\mu * \ln(x) + c)^2} + \frac{C_{0,3}}{(\mu * \ln(x) + c)^3} \\
 & + \frac{C_{0,4}}{(\mu * \ln(x) + c)^4} + \frac{C_{0,5}}{(\mu * \ln(x) + c)^5} + \frac{C_{0,6}}{(\mu * \ln(x) + c)^6} \\
 & + \frac{C_{0,7}}{(\mu * \ln(x) + c)^7} + \frac{C_{0,8}}{(\mu * \ln(x) + c)^8} + \dots \\
 & + \frac{1}{x^2} \left(\frac{C_{1,2}}{(\mu * \ln(x) + c)^2} + \frac{C_{1,3}}{(\mu * \ln(x) + c)^3} + \frac{C_{1,4}}{(\mu * \ln(x) + c)^4} \right. \\
 & \left. + \frac{C_{1,5}}{(\mu * \ln(x) + c)^5} + \frac{C_{1,6}}{(\mu * \ln(x) + c)^6} + \frac{C_{1,7}}{(\mu * \ln(x) + c)^7} \right. \\
 & \left. + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
 z_0 \approx & -\frac{\mu * C_{0,1}}{x(\mu * \ln(x) + c)^2} - \frac{2 * \mu * C_{0,2}}{x(\mu * \ln(x) + c)^3} - \frac{3 * \mu * C_{0,3}}{x(\mu * \ln(x) + c)^4} \\
 & - \frac{4 * \mu * C_{0,4}}{x(\mu * \ln(x) + c)^5} - \frac{5 * \mu * C_{0,5}}{x(\mu * \ln(x) + c)^6} - \dots \\
 & - \frac{2}{x^3} \left(\frac{C_{1,2}}{(\mu * \ln(x) + c)^2} + \frac{C_{1,3}}{(\mu * \ln(x) + c)^3} + \dots \right) \\
 & - \frac{\mu}{x^3} \left(\frac{2 * C_{1,2}}{(\mu * \ln(x) + c)^3} + \frac{3 * C_{1,3}}{(\mu * \ln(x) + c)^4} + \dots \right)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Постоянные a, b задаются в качестве интервала для нахождения константы c методом половинного деления. Выберем $a = 0.0001, b = 10$. После задания вида функции $F(u)$ задачу (1.1) – (1.2) решаем численно.

Рассмотрим случай, когда $F(u) = u * \sin(u)$, находя последовательные приближения $c_{0,n}$, $n = 2, 3, \dots$ и $c_{1,n}$, $n = 2, 3, \dots$ для c при помощи использования метода половинного деления.

Для численного решения задачи (5.1) – (5.2) был использован метод Рунге-Кутты.

Результаты вычислений для различных μ :

$\mu = 0.5$: $c = 6.1536$; $y = 0.99997$; $z = -0.00517$.

$\mu = 1$: $c = 3.64813$; $y = 1.0001$; $z = -0.01034$.

$\mu = 1.5$: $c = 1.14267$; $y = 1.0002$; $z = -0.01552$.

С помощью компьютерного моделирования в данном случае мы решили задачу о нахождении решения дифференциального уравнения $u'' - \chi u' - \mu F(u) = 0$, которое удовлетворяет краевым условиям $u(0) = 1, u(x) = O(1)$ на интервале $(0.0001; 10)$ при $x \geq 0$ для различных значений μ .

Список литературы

1. Zhivotyagin A.F., Influence of a Homogeneous Chemical Reaction on the Distribution of Concentration in a Diffusion Wake of a Droplet // Vestn. Mosk. Gos. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh. 1980. №6. P. 73-78.
2. R. G. Akhmetov, Asymptotics of solution for a problem convective diffusion with volume reaction near a spherical drop, in: Proceedings of the Steklov institute of mathematics, vol. Suppl. 2003, pp. S8-S12.
3. R. G. Akhmetov, The asymptotic expansions of the solution for the boundary value problem to a convective diffusion equation with volume chemical reaction near a spherical drop: Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 16 (2011), 2308-2312.