УДК 519.218.28

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ СО СКРЫТЫМ ИНКУБАЦИОННЫМ ПЕРИОДОМ ЗАРАЖЕНИЯ

Боровский Андрей Викторович

д.ф.-м.н., профессор

ФГБОУ ВО «Байкальский Государственный Университет»

кафедра математических методов и цифровых технологий

Галкин Андрей Леонидович

д.ф.-м.н.

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

Аннотация: рассмотрена математическая модель эпидемии, обладающей скрытым инкубационным периодом заражения. Показано, что в отличие от известных моделей SIR, SIS, SEIR, MSEIR такая эпидемия описывается системой уравнений эпидемической кинетики, содержащей дополнительные слагаемые, учитывающие запаздывание во времени. Решение уравнений эпидемической кинетики с запаздыванием затруднено и возможно только численными методами. Разработан авторский численный метод решения системы уравнений с запаздыванием, который показал хорошую эффективность. Установлен выход решения на квазистационарный режим развития эпидемии.

Ключевые слова: теоретические модели эпидемий, вспышка коронавирусной инфекции.

MATHEMATICAL MODEL OF AN EPIDEMIC WITH A LATENT INCUBATION PERIOD OF INFECTION

A. V. Borovsky

A. L. Galkin

Abstract: a mathematical model of an epidemic with a latent incubation period of infection is considered. It is shown that, in contrast to the well-known SIR, SIS, SEIR, MSEIR models, such an epidemic is described by a system of epidemic kinetics equations containing additional terms that take into account the time delay. The solution of the epidemic kinetics equations with a delay is difficult and possible only

by numerical methods. The authors developed a numerical method for solving a system of equations with a delay, which showed good efficiency. The output of the solution to the quasi-stationary mode of epidemic development is established.

Key words: theoretical models of epidemics, outbreak of coronavirus infection.

В настоящее время большую актуальность представляет исследование эпидемических моделей. Ссылки на ранние работы имеются в [1]. Вопросы современной эпидемии коронавируса представлены в интернет-статьях [2-3]. Авторы последних, считают, что эпидемия коронавируса плохо поддаётся теоретическому описанию при помощи известных моделей (SIR, SIS, SEIR, MSEIR).

Изучим распространение эпидемии в замкнутой популяции. Примером может служить населённый пункт (город, посёлок, вахтовое производство). Особенностью эпидемии является длительный инкубационный период, предшествующий заболеванию.

Пусть N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 — численность популяции, состоящей из здоровых, заражённых, выздоровевших и умерших членов популяции. В соответствии с предположением о замкнутости популяции

$$\sum_{i=1}^4 N_i(t) = N_0 \equiv Const \quad (1)$$

Далее будем предполагать, что заболевание обладает инкубационным периодом с длительностью τ . К заражению окружающих приводят контакты заболевших, находящихся в инкубационном периоде, со здоровыми людьми, не обладающими иммунитетом. Длительность инкубационного периода для коронавирусной инфекции $\tau = 7 - 10$ дней.

Запишем математическое выражение для скорости уменьшения здоровых членов популяции

$$\frac{dN_1}{dt}(t) = -\kappa - \left| \int_{t-\tau}^t \frac{dN_2}{dt'}(t') dt' \right| - A. \quad (2)$$

К заражению здоровых людей приводят члены популяции, которые уже заразились, но находятся в инкубационном периода роста заболевания. Рассматриваемый модельный подход предполагает, что по истечении инкубационного периода человек заболевает в явном виде, медики его

изолируют и он перестаёт участвовать в заражении окружающих. Поэтому в (2) интегрирование ведётся только по интервалу времени, равному инкубационному периоду. Количество инфицированных членов популяции, участвующих в заражении окружающих, всегда больше нуля и не должно зависеть от направления интегрирования. Поэтому в (2) появляется модуль.

Запишем математическое выражение для скорости изменения количества заражённых членов популяции

$$\frac{dN_2}{dt}(t) = \kappa^- \left| \int_{t-\tau}^t \frac{dN_2}{dt'}(t')dt' \right| - \kappa^+ \int_0^t \frac{dN_2}{dt'}(t')dt' - \kappa^c \int_0^{t-\tau} \frac{dN_2}{dt'}(t')dt' + A \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое описывает скорость появления новых заражённых членов популяции, второе и третье слагаемые описывают убыль количества заражённых вследствие выздоровления и смертности. Коэффициенты κ^- , κ^+ , κ^c – частоты заражения, выздоровления и смертности в расчёте на одного человека. Измеряются в обратных днях.

Скорости увеличения количества выздоровевших и умерших членов популяции определяются выражениями

$$\frac{dN_3}{dt}(t) = \kappa^+ \int_0^t \frac{dN_2}{dt'}(t')dt', \quad \frac{dN_4}{dt}(t) = \kappa^c \int_0^{t-\tau} \frac{dN_2}{dt'}(t')dt'. \quad (4)$$

Сумма выражений (2)-(4) равна нулю, что является отражением закона сохранения количества членов популяции (1).

Раскроем интегралы в (2-4)

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt}(t) &= -\kappa^- |N_2(t) - N_2(t - \tau)| - A, \\ \frac{dN_2}{dt}(t) &= \kappa^- |N_2(t) - N_2(t - \tau)| - \kappa^+ N_2(t) - \kappa^c N_2(t - \tau) + A, \\ \frac{dN_3}{dt}(t) &= \kappa^+ N_2(t), \quad \frac{dN_4}{dt}(t) = \kappa^c N_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Постановку задачи (5) следует дополнить условием неотрицательности искомых функций и начальными условиями, например,

$$N_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, 4, \quad N_1(0) = N_0, \quad N_2(0) = 1, \quad N_3(0) = 0, \quad N_4(0) = 0. \quad (6)$$

Если опустить в (5) слагаемые с запаздыванием $N_2(t - \tau)$, то получится модель SIR, известная в эпидемиологии. В этой модели используются другие обозначения - $N_1, N_2, N_3 \rightarrow S, I, R$.

В работе [1] система (5) решается аналитически с учётом разложения члена с запаздыванием в ряд Тейлора.

В данной работе система эпидемической кинетики (5) исследуется численно. Реализована явная разностная схема с запоминанием предыстории к данному моменту уже полученных решений. При шаге 0.1 суток на протяжении всего расчета сумма (1) сохраняется с относительной погрешностью $2,5 \cdot 10^{-6}$.

Коэффициенты в системе (1) приняты равными: частота выздоровления $\kappa^+ = 1/15$; частота смертности $\kappa^c = 1/50$; длительность инкубационного периода $\tau = 7$ суток; частота заражения (зависит от времени в том числе вследствие возможного принятия карантинных мер)

$$\kappa^-(t) = p(t)\Delta n(t) = p(t)\Delta n_0(t) \frac{N_1(t)}{N_0}, \quad \sum_{i=1}^4 N_i(t) = N_0.$$

В работе используются следующие выражения для частоты контактов и вероятности заражения, соответствующие плавному введению санитарных норм

$$\Delta n_0(t) = \begin{cases} 34.5, & 0 < t < t' \\ 34.5 - 11.5 \frac{t-t'}{t''-t'}, & t' \leq t \leq t'' \\ 23, & t'' \leq t \end{cases}, \quad p(t) = \begin{cases} 0.01; & 0 < t < t' \\ 0.01 - 0.005 \frac{t-t'}{t''-t'}; & t' \leq t \leq t'' \\ 0.005; & t'' \leq t \end{cases} \quad (7)$$

На Рис.1 показан ход эпидемии во времени. \

Рис.1. (а) Решение системы (5) без источника ($A=0$) $N_0 = 6 \cdot 10^5$ (Иркутск) с $t'=30$, $t''=60$ в коэффициентах (6), (7) (сплошная линия). (б) Развитие эпидемии без введения санитарных мер (точки).

В стационарном случае решение имеет вид

$$\frac{dN_2}{dt} = 0, \quad N_2(t) = N_2(t - \tau), \quad N_2 = \frac{A}{(k^+ + k^c)}. \quad (8)$$

Источник $A = \text{const} > 0$ приводит к постоянному суточному приросту зараженных (9), что может быть использовано для определения величины источника заражения по наиболее достоверной части эпидемической статистики.

Заключение. Получена система уравнений эпидемической кинетики с запаздыванием (5). Исключительно важным для понимания эпидемических процессов является выход решения на квазистационарные значения (8). Наличие постоянного источника заражения после первой волны эпидемии это именно то, что произошло в России и странах Европы. Был открыт выезд туристов на отдых и перестали выполняться санитарные нормы в населённых пунктах. К концу лета люди перестали носить маски, заработали школы, ВУЗы и увеселительные заведения. В результате всплеск эпидемии повторился.

Список литературы

1. Боровский А.В. Модель эпидемии с запаздыванием. Системный анализ и математическое моделирование. Изд. БГУ, 2020, Т.2, №4.
2. Тамм М. Коронавирусная инфекция в Москве: прогнозы и сценарии <https://meduza.io/feature/2020/03/30>
3. Иванов М.В. Математическое моделирование процесса пандемии. Теория и практика. <https://indsi.ru/2020/04/30>