СЕКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.3

**ПОПЕРЕЧНЫЙ УДАР ПРИТУПЛЕННЫМ КЛИНОМ ПО
ВЯЗКОУПРУГОЙ НИТИ ПРИ ДОЗВУКОВОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ**

Мамедов Тахир Джалил

доктор философии по математике, доцент
Гянджинский Государственный Университет

Аннотация: В работе определяется напряженное состояние линейно-вязкоупругой (типа Максвелла) нити при поперечном ударе клином, имеющим плоскую переднюю часть (рис.1). Когда материал нити подчиняется линейно-упругому закону Гука, подобная задача исследована в работе [2].

Ключевые слова: напряжение, поперечный удар, дозвуковой вязкоупругая нить, клин, обрыв, гибкий.

**BLANKED WEDGE TRANSVERSE IMPACT ON
VISCOELASTIC THREAD WITH SUBSONOUS MOTION MODE**

Mamedov Tahir Jalil

Abstract: in this paper, the stress state of a linear-viscoelastic (Maxwell type) thread is determined by a transverse impact with a wedge having a flat front part (Fig.1). When the filament material obeys the linear elastic Hooke law, a similar problem is investigated in [2].

Key words: stress, transverse shock, subsonic viscoelastic thread, wedge, breakage, flexible.

Рис. 1. Напряженное состояние линейно-вязкоупругой нити при поперечном ударе клином

1. Пусть по бесконечно длинной прямолинейной гибкой нити производится поперечный удар с постоянной скоростью V вышеуказанным притупленным клином.

В процессе соударения прогибная часть нити облегает щеку "клина", а скорость точки излома A меньше скорости звука в нити ($b \operatorname{ctg} \gamma < a_0$). Длину BB_1 обозначим $2l$ (рис.1). Поведение нити относительно точки "О" симметрично.

Уравнение движения нити перед и за точкой излома A будет [1,2].

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.1)$$

Закон деформирования по модели Максвелла имеет вид [1].

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\mu} \sigma = E \dot{\varepsilon} \quad (1.2)$$

или

$$\sigma = \varepsilon - k e^{-kt} \int_0^t e^{k\tau} \varepsilon(x, \tau) d\tau \quad (1.3)$$

Здесь точки над буквами означают производные по времени от ε и σ . Также приняты безразмерные обозначения в виде

$$\bar{u} = uR^{-1}; \bar{x} = xR^{-1}; \bar{v}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}; \bar{v}_i = \frac{v_i}{a_0}, \quad (i = 1, 2),$$

$$\bar{b} = ba_0^{-1}; \bar{b} = \frac{V \cdot \operatorname{ctg} \gamma}{a_0}; \bar{\sigma} = \sigma(\rho a^2)^{-1}; a^2 = \frac{E}{\rho}; \bar{t} = \frac{a_0 t}{R}; k = ER(\mu a)^{-1}; \quad (1.4)$$

В дальнейшем черточки над буквами опускаем. R - const, имеющая размерность длины, (радиус кругового поперечного сечения нити) E - модуль Юнга, ρ - плотность, остальные обозначения заимствованы из работы [1].

Уравнения движения (1.1), с учетом (1.2) примет вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{E}{\mu}$$

или в безразмерном виде будем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.5)$$

При решении задачи будем считать, что " k " малая величина, т.е. $0 \leq k < 1$.

Условия в точке излома A (рис.1) в безразмерном виде будут [1]

$$\frac{b - v_1}{1 + \varepsilon_1} = \frac{b \sec \gamma - v_2}{1 + \varepsilon_2} = z \quad (1.6)$$

$$z \cdot (v_2 - v_1 \cos \gamma - M \sin \gamma) = \sigma_1 \cos \gamma - \sigma_2 - F; \quad (1.7)$$

$$z \cdot (M \cos \gamma - v_2 \sin \gamma) = \sigma_1 \sin \gamma + Q; \quad (1.8)$$

Волновая схема движения в плоскости (x, t) показана на рис.2.

Все параметры неавтономной задачи в областях 1, 2, 3, ..., 11, 21, ... будем обозначать соответствующими индексами. Задачу исследуем для интервал времени $0 \leq t < \frac{l}{a}$.

В работе [2] доказано, что в теории поперечного удара при дозвуковом режиме на волне сильного имеются два режима. В первом режиме за фронтом волны сильного разрыва имеется условие [1].

$$F < \mu_* Q \quad (1.9)$$

т.е. частица, примыкающая к точке излома со стороны облегания, прилипает к щеке "клина" и, следовательно, скорость частицы в этой точке равна нулю

$$v_2 = 0 \quad (1.10)$$

Во втором режиме частицы нити, попадающие на фронт волны сильного разрыва, проскальзывают по щеке клина, и это соответствует условию [2].

$$F = \mu_* Q. \quad (1.11)$$

Здесь F , Q - сосредоточенные силы в точке излома, μ_* - коэффициент трения в этой точке.

В точке B (рис.1) имеем кинематическое условие

$$v_3 = v_2 \cos \gamma. \quad (1.12)$$

Из условия симметрии в точке O скорость частицы тоже равна нулю.

Рис. 2. Волновая схема движения в плоскости

2. Решение уравнения (1.5) в областях 1, 2, 3, соответственно, представим в виде

$$u_1 = \varepsilon_1^0 x_1 + v_1^0 t + k \left[a_{01}(t - x_1)^2 + b_{01}(t + x_1)^2 - \frac{v_1^{(0)}}{4}(t^2 - x_1^2) \right], \quad (2.1)$$

$$u_2 = (\varepsilon_2^0 + 1)x_1 + v_2^0 t + k \left[a_{02}(t - x_1)^2 + b_{02}(t + x_1)^2 - \frac{v_2^{(0)}}{2} x_1(t - x_1)^2 \right] \quad (2.2)$$

$$u_3 = \varepsilon_3^0 x_1 + v_3^0 t + k \left[a_{03}(t - x_1)^2 + b_{03}(t + x_1)^2 - \frac{v_3^{(0)}}{2} x_1(t + x_1) \right] \quad (2.3)$$

где

$$x_1 = x - l; \quad (2.4)$$

неизвестную траекторию волны сильного разрыва ищем в виде

$$x_*(t) = z_0 t + k z_1 t^2 \quad z = \frac{dx_*(t)}{dt} = z_0 + 2k z_1 t \quad (2.5)$$

Здесь $\varepsilon_1^{(0)}, v_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, v_2^{(0)}, \varepsilon_3^{(0)}, v_3^{(0)}, z_0$ -решения задачи соответствуют линейно упругому случаю; $a_{01}, b_{01}, a_{02}, b_{02}, a_{03}, b_{03}, z_1$ неизвестные коэффициенты и все эти константы определяются из краевых условий.

Отметим, что при разложении $u(x, t), z(t)$ по малому параметру k , ограничиваемся двумя членами.

Также имеем условия

$$u_1(x_1, t) = 0 \text{ при } x_1 = t \quad (2.6)$$

$$u_3(x_1, t) = 0 \text{ при } x_1 = -t \quad (2.7)$$

Кроме того, для первого режима имеем условие (1.10), т.е.

$$\nu_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 \quad \text{при } x_1 = x_*(t). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.1)-(2.3) в условиях (1.6), (1.12), (2.6), (2.7), (2.8) с учетом (2.5) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, определяем неизвестные константы в виде

$$\begin{aligned} \nu_3^0 = a_{03} = b_{03} = 0; \quad \nu_2^0 = 0; \quad a_{02} = b_{02} = 0; \\ \nu_1^0 = -\varepsilon_1^0; \quad b_{01} = 0; \quad z_1 = 0; \\ \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = b(\sec \gamma - 1); \quad a_{01} = -\frac{\nu_1^0}{4} \cdot \frac{1+z_0}{1-z_0} \\ z_0 = b[(1 - \cos \gamma) + \cos \gamma]^{-1}; \quad b = V \operatorname{ctg} \gamma \\ \sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 \end{aligned}$$

Тогда параметры задачи в областях 1, 2, 3 (рис.1, рис.2) определяются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + k\varepsilon_1^0 \cdot \frac{1}{2}[b_1(t-x_1) + x_1], \\ \sigma_1 &= \varepsilon_1^0(1-kt) + \frac{k}{2}\varepsilon_1^{(0)}[b_1(t-x_1) - x_1], \\ \nu_1 &= \nu_1^{(0)} - \frac{k}{2}\varepsilon_1^0[b_1(t-x_1) - t] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0; \nu_2 = 0; \quad \sigma_2 = \varepsilon_2^0(1-kt); \quad \nu_1 = \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_3 = 0; \nu_3 = 0; \quad \sigma_3 = 0; \quad \nu_2 = \frac{\partial u_2}{\partial t}; \nu_3 = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad b_1 = \frac{1+z_0}{1-z_0}; \quad (2.11)$$

Таким образом, из полученных решений следует, что если на фронте волны сильного разрыва удовлетворяется первый режим, то за этим фронтом (в области 2,3) (рис.1), нить прилипает к щеке ударяющего клина.

Теперь пусть в точке излома A выполняется условие (1.11), т.е. происходит проскальзывание частицы нити на этой точке. Следует отметить, что проскальзывания происходят и в точке B (рис.1) и принимается условие непрерывности деформации в этой точке, т.е. условие

$$[\varepsilon] = 0 \quad \text{при } x_1 = 0. \quad (2.12)$$

Решение задачи в этом случае в областях 1, 2, 3 снова представляется в виде (2.1), (2.2), (2.3), но константы, участвующие в этих решениях, определяются из условий (1.6), (1.11), (1.12), (2.6), (2.7), (2.12) с учетом (2.5)/

Из условия (2.6), (2.7) следует, что

$$\nu_1^0 = -\varepsilon_1^0; \quad b_{01} = 0; \quad (2.13)$$

$$\nu_3^0 = \varepsilon_3^0; \quad a_{03} = 0;$$

Учитывая решения (2.1), (2.2),

(2.3), (2.5) в условиях (1.6), (1.11), (1.12), (2.12) получаем следующие соотношения для определения неизвестных константов.

$$\left. \begin{aligned} b \sec \gamma - \nu_2^0 &= (1 + \varepsilon_2^0) z_0 \\ b - \nu_1^0 &= z_0 (1 + \varepsilon_1^0) \\ \nu_3^0 &= \nu_2^0 \cos \gamma \\ \varepsilon_2^0 &= \varepsilon_3^0; \\ \nu_3^0 &= \varepsilon_3^0; \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$b = z_0 \cdot f_1(\gamma, z_0, \gamma_k); \quad b = M \operatorname{ctg} \gamma \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_{02} - a_{02} &= b_{03} + (\nu_3^0 + \nu_2^0) \frac{1}{2}; \\ (a_{02} + b_{02}) \cos \gamma &= b_{03}; \\ a_{01} &= -z_1 \frac{(1 + \varepsilon_1^0)}{(1 - z_0)^2} + \frac{\nu_1^0 (1 + z_0)}{4 (1 - z_0)}; \\ a_{02} &= (1 - z_0)^2 + b_{02} (1 + z_0)^2 = \frac{\nu_2^0}{2} \cdot z_0 (1 - z_0) - z_1 (1 + \varepsilon_2^0) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\cos \gamma \left[-z_0 + \nu_1^0 z_0 - 4a_{01} (1 - z_0) \right] + \varepsilon_2^0 + 4a_{02} (1 - z_0) - \\ &- 4b_{02} (1 + z_0) + \nu_2^0 (1 - 2z_0) - 2z_1 (\nu_2^0 - \nu_1^0 \cos \gamma - M \sin \gamma) - \\ &- z_0 \left[2a_{02} (1 - z_0) + 2b_{02} (1 + z_0) - \frac{\nu_2^0}{2} z_0 + \cos \gamma \left(\frac{\nu_1^0}{2} - 2a_{01} (1 - z_0) \right) \right] = \\ &= \mu_* \left\{ \sin \gamma \left[\varepsilon_1^0 - \nu_1^0 z_0 + 4a_{01} (1 - z_0) \right] + 2z_1 (M \cos \gamma - \nu_2^0 \sec \gamma) - \right. \\ &\left. - z_0 \sin \gamma \left[2a_{02} (1 - z_0) + 2b_{02} (1 + z_0) - \frac{\nu_2^0}{2} z_0 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Из (2.14) и (2.15) получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{z_0}{1 - z_0} b_1 \left[\beta_2 (1 - \cos \gamma) + z_0 \beta_3 \frac{1}{2} \sin 2\gamma \right]^{-1}; \\ \varepsilon_2^0 = \varepsilon_3^0 &= \frac{z_0}{z_0 + \operatorname{tg} \gamma} b_1 [\beta_1 (1 - \cos \gamma) + z_0 \beta_3 \sin \gamma]; \\ \nu_2^0 &= \varepsilon_2^0 \sec \gamma; \quad \nu_3^0 = \varepsilon_3^0; \quad \nu_1^0 = -\varepsilon_1^0 \\ f_1 &= (\beta_2 + \beta_1 \cos \gamma) (\beta_1 \cos \gamma + \beta_2 \sec \gamma + z_0 \beta_3 \sec \gamma)^{-1}; \\ \beta_1 &= 1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \gamma; \quad \beta_2 = \frac{1 + z_0 \sec \gamma}{z_0 + \sec \gamma}; \\ \beta_3 &= \mu_* - \operatorname{tg} \gamma; \quad b_1 = \left[\beta_2 + \beta_1 \cos^2 \gamma + z_0 \frac{\beta_3}{2} \sin 2\gamma \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Уравнение (2.17) служит определению константов $a_{02}, b_{02}, b_{03}, a_{01}, z_1$ из (2.16)

$$\begin{cases} b_{02} = n_{11} - z_1 n_{12}; & a_{02} = n_{13} - z_1 n_{14}; \\ b_{03} = (n_{11} + n_{13}) \cos \gamma - z_1 (n_{12} + n_{14}) \cos \gamma; \\ a_{01} = -z_1 \frac{1 + \varepsilon_1^0}{(1 - z_0)^2} + \frac{\nu_1^0}{4} \frac{1 + z_0}{1 - z_0}; \end{cases} \quad (2.19)$$

$$z_1 = (m_{21} - n_{21})(n_{22} - m_{22})^{-1} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} n_{01} &= (1 - \cos \gamma)(1 - z_0)^2 + (1 + \cos \gamma)(1 + z_0)^2 = n_{03}; \\ n_{02} &= \frac{\nu_2^0 + \nu_3^0}{2}(1 - z_0)^2 + \frac{\nu_2^0}{2} z_0 (1 - z_0)(1 + \cos \gamma); \\ n_{04} &= -\frac{\nu_2^0 + \nu_3^0}{2}(1 + z_0)^2 + \frac{\nu_2^0}{2} z_0 (1 - z_0)(1 - \cos \gamma); \\ n_{05} &= -(1 + \cos \gamma)(1 + \varepsilon_2^0); \\ n_{06} &= (1 + \varepsilon_2^0)(1 - \cos \gamma); \\ n_{11} &= n_{02} \cdot n_{01}^{-1}; & n_{12} &= n_{05} \cdot n_{01}^{-1}; \\ n_{13} &= n_{04} \cdot n_{03}^{-1}; & n_{14} &= n_{06} \cdot n_{03}^{-1}; \\ n_{15} &= \frac{\nu_1^0}{4} \frac{1 - z_0}{1 + z_0}; & n_{16} &= \frac{1 + \varepsilon_1^0}{(1 - z_0)^2} \\ n_{17} &= \nu_2^0 - \nu_1^0 \cos \gamma - M \sin \gamma; & n_{18} &= M \cos \gamma - \nu_2^0 \sin \gamma; \\ n_{21} &= \cos \gamma \left[-\varepsilon_1^0 (1 + z_0) - 4(1 - z_0)n_{15} \right] + \varepsilon_2^0 + \nu_2^0 (1 - 2z_0) + \\ &+ 4n_{13}(1 - z_0) - 4(1 + z_0)n_{11} + z_0^2 \frac{\nu_2^0}{2} - z_0 \frac{\nu_2^0}{2} \cos \gamma - \\ &- 2z_0(1 - z_0)n_{13} - 2z_0(1 + z_0)n_{11} + z_0(1 - z_0)2n_{15}; \\ n_{22} &= 4 \cos \gamma (1 - z_0)n_{16} - 4n_{14}(1 - z_0) + 4n_{12}(1 + z_0) - 2n_{17} + \\ &+ 2n_{14}z_0(1 - z_0) + 2z_0(1 + z_0)n_{12} - 2n_{16}z_0 \cos \gamma (1 - z_0); \\ m_{21} &= \mu_* \left[(1 + z_0)\varepsilon_1^0 \sin \gamma + 4(1 - z_0)m_{15} - 2z_0(1 - z_0)n_{13} \sin \gamma - \right. \\ &\left. - z_0 2(1 + z_0)n_{11} \sin \gamma + z_0^2 \frac{\nu_2^0}{2} \sin \gamma \right]; \\ m_{22} &= \mu_* \left[2n_{18} - 4(1 - z_0)n_{16} + 2z_0(1 - z_0)n_{14} \sin \gamma + 2z_0(1 + z_0)n_{12} \sin \gamma \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Таким образом, определены все неизвестные коэффициенты формулами (2.13), (2.19), (2.20). Теперь представим решение задачи в точке В для интервала времени $0 \leq t < \frac{l}{a_0}$.

Из формулы (2.2) – (2.4) определяются деформация и скорость частицы в точке В в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_2(o, t) = \varepsilon_2^0 + k \left[2(b_{02} - a_{02}) - \frac{v_2^{(0)}}{2} \right] t; \\ v_2(o, t) = v_2^{(0)} + k \left[2(b_{02} + a_{02}) - \frac{v_2^{(0)}}{2} \right] t; \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_3(o, t) = \varepsilon_3^0 + k \left[2b_{03} + \frac{v_3^0}{2} \right] t; \\ v_3(o, t) = v_3^0 + kb_{03}t; \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь $\varepsilon_2^0, v_2^0, \varepsilon_3^0, v_3^0$ соответствуют решениям линейно упругой задачи и выражаются формулами (2.14), (2.15).

Учитывая (2.21), величины $b_{02} - a_{02}, b_{02} + a_{02}, b_{03}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} b_{02} + a_{02} &= \frac{1}{n_{01}} \{ v_2^0 z_0 (1 - z_0) - 2z_1 (1 + \varepsilon_2^0) - 2z_0 v_2^0 (1 + \cos \gamma) \}; \\ b_{03} &= \frac{1}{n_{01}} [v_2^0 z_0 (1 - z_0) - 2z_1 (1 + \varepsilon_2^0) - 2z_0 v_2^0 (1 + \cos \gamma)] \cos \gamma; \\ b_{02} - a_{02} &= \frac{1}{n_{01}} \{ v_2^0 z_0 (1 - z_0) - 2z_1 (1 + \varepsilon_2^0) - 2z_0 (1 + \cos \gamma) v_2^0 \} \cos \gamma + \\ &+ \frac{v_2^0 (1 + \cos \gamma)}{4}; \end{aligned} \quad (2.24)$$

Подставляя формулы (2.24) в выражения (2.22) и (2.23) определяем $\varepsilon_2(o, t), \varepsilon_3(o, t), v_2(o, t), v_3(o, t)$ в виде:

$$\varepsilon_2(o, t) = \varepsilon_3(o, t) = \varepsilon_2^0 + kmt; \quad (2.25)$$

$$v_2(o, t) = v_2^0 + km_1 t \quad (2.26)$$

$$v_3(o, t) = v_2^0 \cos \gamma + km_1 t \cos \gamma \quad (2.27)$$

Здесь

$$m = \frac{2}{n_{01}} \left\{ \nu_2^0 z_0 [1 - z_0 - 2(1 + \cos \gamma) - 2z_1(1 + \varepsilon_2^0)] \right\} \cos \gamma + \frac{\nu_2^0(1 + \cos \gamma)}{4}; \quad (2.28)$$

$$m_1 = b_{02} + a_{02};$$

$n_{01}(n_{01} > 0)$ - выражается формулой (2.21). Безразмерное напряжение в точке В определяется по формуле (1.3) (с учетом (2.25) и имеет вид

$$\sigma_2(o, t) = \sigma_3(o, t) = \varepsilon_2^0(1 - kt) + kmt \quad (2.29)$$

Здесь при определении напряжения по формуле (1.9) функция e^{-kt} была разложена в ряд Маклорена и мы ограничились двумя членами этого разложения.

Отметим, что в точке В нить направо и налево растягивается одинаковым напряжением $\sigma_2, \sigma_3 (\sigma_2 = \sigma_3)$, соответственно, и естественно при этом напряжение удваивается. Следовательно, в точках клина В и В₁ возникает максимальное напряжение в нити что приводит к её разрушению.

Список литературы

1. Рахматуллин Х.А., Демянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматиз, М, 1961, с.399.
2. Муталлимов Ш.М. Волновая динамика гибких связей. Изд. "Елм", Баку, 2001, с.267.

© Т.Д. Мамедов, 2020