УДК 541.123

**ДИССИПАТИВНЫЕ СОЛИТОНЫ БРИЗЕРНОГО ТИПА СКАЛЯРНОГО
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА
С ПРИТЯГИВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Муминов Хикмат Халимович

д.ф.-м.н., академик национальной академии наук Таджикистана,
профессор,
вице-президент, национальная академия наук Таджикистана

Мухамедова Шоира Файзуллоевна

к.ф.-м.н, доцент
заведующая, кафедра информационно-коммуникационные
технологии и программирование, ТГУПБП

Аннотация: Методами численного моделирования проведен анализ бризерной динамики нелинейных возбуждений многосолитонного типа, описываемых скалярным нелинейным уравнением Шредингера с потенциалом притяжения при наличии диссипации и подкачки внешними полями. Наблюдается формирование когерентных диссипативных структур и появление классического аттрактора в фазовом пространстве скалярного нелинейного уравнения Шредингера с притягивающим потенциалом.

Ключевые слова: n-солитон, бризерная динамика, когерентные структуры, классический аттрактор, скалярное нелинейное уравнение Шредингера с потенциалом притяжения, диссипация, подкачка.

**DISSIPATIVE SOLITONS OF BREATHER TYPE OF A SCALAR NON-
LINEAR SCHRÖDINGER EQUATION WITH POTENTIAL OF
ATTRACTION**

Muminov Hikmat Halimovich

Muhamedova Shoir Fayzulloevna

Abstract: Numerical simulation methods are used to analyze the breather dynamics of nonlinear excitations of the multisoliton type described by the scalar nonlinear Schrödinger equation with the potential of attraction taking into account dissipation and pumping by external fields. Formation of coherent dissipative

structures and the manifestation of a classical attractor in the phase space of the scalar nonlinear Schrödinger equation with the potential of attraction are observed.

Key words: coherent structures, breather dynamics, classical attractor, scalar nonlinear Schrödinger equation with the potential of attraction, dissipation, pumping.

Одним из наиболее интригующих явлений нелинейной физики, наблюдающихся в средах с диссипацией при наличии подкачки, является формирование долгоживущих (в пределах - бесконечно) диссипативных когерентных структур, что свидетельствует о проявлении самоорганизации в подобных средах. Особо интенсивно исследованиями образования диссипативных структур, или так называемых автоструктур, начали заниматься в семидесятых годах XX в. Процессы формирования и эволюции диссипативных структур в комплексных системах было предложено называть самоорганизацией [1]. Самоорганизация имеет место в коллективных, кооперативных, явлениях в неравновесных системах при наличии диссипации и изучается сравнительно новой областью науки, известной как синергетика [1]. Формирование диссипативных структур проявляется в процессе самоорганизации в неравновесных системах совершенно различной природы. Известны процессы самоорганизации в химических, гидродинамических, биологических, экологических системах, в таких физических системах как плазма, конденсированное состояние вещества [2], в магнитных явлениях, сверхпроводимости, при распространении света в оптических средах [3]. Наличие нелинейности и дисперсии в волновых процессах физики конденсированного состояния, гидродинамики и плазмы привело к появлению концепции солитона в качестве физических структур, обладающих свойствами частиц при их взаимодействиях. Как известно солитоны образуются в результате нелинейного взаимодействия волн, проявляющегося в качестве притяжения составляющих линейных мод, или сжатия солитона, и дисперсии, которая приводит к уширению солитона. В результате совместного действия нелинейности и дисперсии образуется устойчивая долгоживущая структура. Взаимодействие между солитонами происходит аналогично взаимодействию между частицами, поэтому солитоны называют частицеподобными нелинейными возбуждениями. Вместе с тем, в диссипативных структурах, как было показано в работе [4], возможен процесс формирования диссипативных солитонов, в которых, наряду с нелинейностью и дисперсией, выдающую роль играет диссипация и подкачка. В результате взаимного проявления диссипации и подкачки образуется устойчивая, долгоживущая, локализованная когерентная

структура – диссипативный солитон. Таким образом, могут существовать как динамические солитоны, образующиеся в результате взаимодействия нелинейности и дисперсии, так и диссипативные солитоны, проявляющиеся как результат взаимодействия диссипации и подкачки при распространении уединённых волн в нелинейных средах с дисперсией. В консервативных системах также могут существовать топологические солитоны, представляющие собой весьма устойчивые образования благодаря топологической неэквивалентности на противоположных границах этого солитона. Топологические солитоны в многомерии представляет собой вихревые структуры, обладающие нетривиальным топологическим зарядом, благодаря чему они проявляют чрезвычайную устойчивость. Взаимодействие топологических солитонов может носить весьма нетривиальный характер, вплоть до проявления нецентрального взаимодействия при их столкновениях (рассеянии топологических солитонов друг на друге), а также свойств аннигиляции при взаимодействиях топологических солитонов с противоположными топологическими зарядами [5].

Таким образом, имеется два основных класса солитонов, консервативные и диссипативные солитоны. Консервативные солитоны возникают в средах, в которых можно пренебречь диссипацией и притоком энергии в систему. Баланс между расплыванием волнового пакета вследствие дифракции и дисперсии компенсируется наличием нелинейного сжатия, в результате самофокусировки. В диссипативных солитонах проявляется как эффекты консервативные, так и диссипативные.

Одними наиболее хорошо изученных систем, которые известны как в физике конденсированного состояния, так и в нелинейной оптике, является уравнение Гинзбурга-Ландау и нелинейное уравнение Шредингера. Ранее была установлена возможность формирования диссипативных солитонов в системах, описываемых этими уравнениями при наличии подкачки и диссипации [3,4].

В данной работе мы сосредоточимся на изучении скалярного нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), отличающегося от уравнения Гинзбурга – Ландау потенциалом притяжения следующего вида, имея ввиду учесть в дальнейшем эффекты диссипации и подкачки,

$$i\psi_t - \psi_{xx} - 2(|\psi|^2 - b^2)\psi = 0. \quad (1)$$

Интегралы энергии и числа частиц имеют вид:

$$N = \int |\psi|^2 dx, \quad H = \int (|\psi_x|^2 - (|\psi|^2 - b^2)^2) dx \quad (2)$$

Решение уравнения (1) были получены в работе [6] методом конечнозонного интегрирования, в следующем виде

$$\psi(\xi, t) = be^{ik'_1(\xi + k'_1 t)} \left(1 + \frac{C_3 \cos(qx + \dot{w}t + w_{02}) + C_4 e^{\beta^+ \xi}}{C_1 \operatorname{ch}(\beta^+ \xi + h_1) + C_2 \cos(qx + \dot{w}t + w_{01})} \right) \quad (3)$$

$$\text{где } \xi = x + vt \quad \dot{w} = w - qv, \quad k'_1 = k_1 - v^+ q = \alpha_2 - \alpha_1, \\ w = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_2^2 - \beta_1^2)$$

$$C_1 = \left(\frac{|C_{12}|^2 |\kappa_{12}|^2}{|\bar{\kappa}_{12}|^2 \bar{\kappa}_{11} \bar{\kappa}_{22}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_2 = - \left(\frac{C_{11} C_{22}}{\bar{\kappa}_{12} \bar{\kappa}_{21}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_3 = \left(\frac{C_{12} C_{21}}{(k_1 - \kappa_1)(k_1 - \kappa_2)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$h_1 = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{|\kappa_{12}|^2}{|C_{12}|^2 |\kappa_{12}|^2 \bar{\kappa}_{11} \bar{\kappa}_{22}} \right|, \quad w_{01} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{C_{12} \bar{\kappa}_{12}}{C_{21} \bar{\kappa}_{21}} \right|,$$

$$w_{02} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{C_{12}(k_1 - \kappa_2)}{C_{21}(k_1 - \kappa_1)} \right|,$$

$$C_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\kappa}_{21}}{(k_1 - \kappa_1) \bar{\kappa}_{12} \bar{\kappa}_{22}} - \frac{\bar{\kappa}_{12}}{(k_1 - \kappa_2) \bar{\kappa}_{21} \bar{\kappa}_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v = \frac{2(\alpha_2 \beta_2 + \alpha_1 \beta_1)}{\beta_2 + \beta_1},$$

$$\kappa_{ij} = \kappa_i - \bar{\kappa}_j, \quad \bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa}_i - \kappa_j, \quad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta^- = \beta_2 - \beta_1,$$

Ранее нами проводилось численное моделирование эволюции данного многосолитонного решения уравнения СНУШ с притягивающим потенциалом (1), то есть численно решалась задача Коши, и было показано, что при нулевой скорости солитон представляет собой нелинейное возбуждение в виде стационарного пакета волн, не проявляя бризерной динамики [7].

Приведем ниже результаты численных экспериментов демонстрирующих эволюцию решения (3) СНУШ с конденсатными граничными условиями при нулевой скорости их движения то есть при параметрах $b = 1, \alpha_1 = 0.29, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0.096, \beta_2 = 0.001, \gamma_1 = 1.95, \gamma_2 = 1.95, \lambda = 0.75, \kappa_1 = 0.5$ (рис. 1-6). Как видно, многосолитонное решение не проявляет бризерной динамики. Интеграл энергии и интеграл числа частиц в вычислительных экспериментах сохранялись с хорошей точностью $\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-5} - 10^{-6}, \quad \frac{N}{N} \sim 10^{-6} - 10^{-7}$.

Рис.1. График эволюции числа частиц солитона.

Рис.2. Графики плотности числа частиц $|\psi|^2$ в момент времени $t=0$.

Рис.3. График эволюции плотности энергии солитона.

Рис. 4. Пространственное распространение плотности энергии солитона при $t=0$.

Рис.5. Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Рис.6. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Учтём теперь в уравнении (1) подкачку и затухание в следующем виде

$$i\psi_t - \psi_{xx} - 2(|\psi|^2 - b^2)\psi = -\nu|\psi|^4\psi + i\delta\psi + i\varepsilon|\psi|^2\psi + i\mu|\psi|^4\psi. \quad (4)$$

где ν - параметр нелинейности 5-й степени, ε - коэффициент разности нелинейных усилений и потерь, δ - коэффициент диссипации, μ - насыщение нелинейного усиления (выбираются достаточно малыми).

Результаты численного моделирования решения (3) при параметрах $b = 1, \alpha_1 = 0.29, \alpha_2 = 1, \beta_1 = 0.096, \beta_2 = 0.001, \gamma_1 = 1.95, \gamma_2 = 1.95, \lambda = 0.75, \kappa_1 = 0.5, \nu = 0.0002, \delta = 0.03, \varepsilon = 0.05, \mu = 0.01$. то есть с учётом диссипации и подкачки приведены на рис. 7-13.

Рис.7. График зависимости интеграла числа частиц солитона от времени.

Рис. 8. График зависимости интеграла энергии солитона от времени.

Рис.9. Фазовый портрет системы (зависимость интеграла полной энергии системы от интеграла числа частиц).

Рис.10. Эволюция числа частиц солитона.

Рис.11. Графики плотности числа частиц $|\psi|^2$ в момент времени $t=0$.

Рис.12. Графики эволюции плотности энергии солитона.

Рис.13. Пространственное распространение плотности энергии солитона при $t=0$.

Рис.14. Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Рис.15. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Как видно из результатов вычислительных экспериментов, интеграл числа частиц и интеграл энергии солитона, изменяются периодическим образом (рис. 7-8). Вместе с тем фазовый портрет системы (рис. 9) демонстрирует плотное расположение фазовых траекторий в ограниченной области фазового пространства, что свидетельствует об устойчивости данной системы и является указанием о формировании аттрактора в указанной области фазового пространства. Как видно из рис.10-12 в процессе эволюции в результате эффектов накачки и диссипации многосолитонное решение (3) начинает проявлять бризерную динамику. Фурье-анализ временной модуляции указывает на значительный рост мощности колебаний на частотах 100 до 1600 периодов, как видно из сравнения рис. 5 и рис. 14, то есть на появление существенной бризерной динамики формирующегося диссипативного бризера. Фурье-анализ пространственной модуляции указывает на появление дополнительных мод динамики, фактически, удвоения частоты и периода, как видно из сравнения рис. 6 и рис. 15.

Далее рассмотрим численное моделирование эволюции многосолитонного решения (3) при ненулевой скорости. При указанных выше значениях параметров диссипации и подкачки и скорости пакета $v=0.19$, результаты численного моделирования приведены на рис. 16-24.

Рис.16. График зависимость интеграла числа частиц солитона от времени.

Рис. 17. График зависимости интеграла энергии солитона от времени.

Рис.18. Фазовый портрет системы (зависимость интеграла энергии от интеграла числа частиц).

Рис.19. Динамика эволюции числа частиц солитона.

Рис. 20. Графики плотности числа частиц $|\psi|^2$ в момент времени $t=0$.

Рис.21. Графики эволюции плотности энергии солитона.

Рис. 22. Пространственное распределение плотности энергии солитона при $t=0$.

Рис.23. Фурье-анализ временной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Рис.24. Фурье-анализ пространственной модуляции плотности энергии двухсолитонного решения.

Анализ результатов численного моделирования эволюции N -солитонного бризера при наличии диссипации и подкачки указывает на наличие странного аттрактора в фазовом пространстве, где фазовые траектории образуют очень плотную упаковку в ограниченной области пространства (рис.18), вместе с тем, ляпуновские показатели остаются положительными, а бризерная динамика существенно усложняется (рис.19-22). Фурье-анализ пространственной и временной модуляции (рис.23-24) плотности энергии солитона демонстрирует значительный рост мощности у основной частоты бризерной динамики и появление спутников.

Таким образом, проведенные численные эксперименты указывают на возможность формирования долгоживущих диссипативных солитонов, описываемых скалярным нелинейным уравнением Шредингера с потенциалом притяжения при наличии подкачки и диссипации, что свидетельствует об образовании когерентных структур и формировании классического аттрактора в фазовом пространстве системы.

Список литературы

1. Хакен Г. Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным явлениям. // М.: Мир. – 1991. – 240с.
2. Makhankov V.G., Fedyanin V.K. Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory. // Phys. Rep. – 1984. – 104. – p. 1-86.
3. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. // М.: Физматлит. – 2005. – 648с.
4. Nozaki K., Bekki N.- Chaos in perturbed nonlinear Shrodinger equation. // Phys. Rev. Lett. – v. 50. – n. 17. – 1226-1229 p.
5. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействий двумерных топологических солитонов в $O(3)$ нелинейной векторной сигма-модели. // Доклады Академии наук Республика Таджикистан. – 2010. – Т.53. – №9. – с. 679 – 685.
6. Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г. Двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера с конденсатными граничными условиями. // ЖТФ. – 1995. – т. 65, в. 6. – с. 191-196.