СЕКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.943

**ФУНКЦИИ РИМАНА ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Гасимова Айнур Рамазан

Доктор философии по математике

Мамедов Рауф Мамед

Кандидат физико-математических наук

Гянджинский Государственный Университет

Аннотация: В работе рассматривается некоторый класс линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа для функций от двух переменных. Эти уравнения приводятся к виду, не содержащему первых производных [1]. Несмотря на то, что приведение уравнений к компактному виду связано не только с гладкостью, но и с конструктивными свойствами его коэффициентов, оказалось, что существует много важных двумерных задач механики сплошной среды, дифференциальные уравнения которых преобразуются к виду, не содержащему первых производных, т.е. к компактному виду.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения в частных производных, компактные уравнения, функция Римана, канонический вид, формула Олевского [5].

**THE FUNCTIONS OF THE RIEMANN
ONE CLASS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS O
F HYPERBOLIC TYPE**

Gasimova Ainur Ramazan

Mammadov Rauf Mamed

Abstract: In this paper, we consider a class of second-order hyperbolic linear partial differential equations for functions of two variables. These equations are reduced to a form that does not contain the first derivatives [1]. Despite the fact that the reduced equations to compact mind is not only smooth, but also with structural properties of its coefficients, it was found that there are many important two-

dimensional problems in continuum mechanics, differential equations which are converted to the form not containing the first derivative, i.e. to compact view.

Key word: Partial differential equations, compact equations, Riemann function, canonical form, Olevsky formula [5].

1.Приведение уравнения к компактному виду. Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} + (x^\alpha + t^\alpha)K = 0. \quad (1)$$

Как известно, для того чтобы привести уравнение к каноническому виду,[2] надо составить уравнение характеристик

$$\frac{1}{4}(dt^2 - dx^2) = 0 \quad (2)$$

Уравнение характеристик (2) допускает два различных интеграла

$$\frac{t-x}{2} = c_1, \quad \frac{t+x}{2} = c_2$$

Следовательно, надо ввести новые переменные ξ, η по следующим формулам

$$\frac{t+x}{2} = \xi, \quad \frac{t-x}{2} = \eta \quad (3)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x} &= \frac{\partial K}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично находим, что

$$\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 K}{\partial \eta^2} \quad (5)$$

Полагая

$$U(\xi, \eta) = U\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = K(x, t) = K(\xi - \eta, \xi + \eta) \quad (6)$$

подставляя выражения (3), (4), (5) в (1) для функции $U(\xi, \eta)$ получим следующее уравнение [6]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \eta U(\xi, \eta) = 0 \quad (7)$$

и граничные условия

$$U(\xi, 0) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} p(x) dx, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} U(\xi, \eta) = 0,$$

при фиксированном $\eta > 0$, ($x = \xi - \eta, t = \xi + \eta, x - t = 2\eta$) [7].

Уравнение (7) есть канонический и одновременно, согласно вышеприведенному термину, компактный вид уравнения (1)

2. Построение функции Римана.

I ($\alpha=1$). Введем функцию Римана $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ уравнения (7) [2], т.е. функцию удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \eta R = 0 \quad \begin{cases} 0 < \eta < \eta_0 \\ \xi_0 < \xi < \infty \\ 0 < \eta < \xi \end{cases} \quad (8)$$

и следующим условиям на характеристиках

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\xi=\xi_0} &= 1, & 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\ R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \Big|_{\eta=\eta_0} &= 1, & \xi_0 \leq \xi \leq \infty \end{aligned}$$

Введя новые переменные по формулам

$$\xi = \xi_1, \eta = \sqrt{\eta_1}$$

после некоторых вычислений, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + R(\xi_1, \xi_1^0; \sqrt{\eta_1}, \sqrt{\eta_1^0}) &= 0 \\ R \Big|_{\xi_1=\xi_1^0} &= 1 \\ K \Big|_{\eta_1=\eta_1^0} &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что [2] решение уравнения (7), выглядит так

$$R(\sqrt{\xi_1}, \sqrt{\xi_1^0}; \sqrt{\eta_1}, \sqrt{\eta_1^0}) = J_0 \left[\sqrt{(\xi_1 - \xi_1^0)(\eta_1 - \eta_1^0)} \right]$$

J_0 -функция Бесселя нулевого рода. Возвращаясь к переменным ξ, η , получаем

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0 \left(i \sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta_0^2 - \eta^2)} \right) \quad (\alpha=1)$$

т.е. функцией Римана для уравнения (1) (при $\alpha=1$)

является функция Бесселя нулевого рода от мнимого аргумента

$$R(x, t; x_0, t_0) = J_0 \left\{ i \sqrt{\left[\left(\frac{x+t}{2} \right) - \left(\frac{x_0+t_0}{2} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{x_0-t_0}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-t}{2} \right)^2 \right]} \right\} \quad (10)$$

II ($\alpha=2$). Аналогично находится функция Римана для $\alpha=2$. При этом уравнение для функции Римана выглядит так

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + 2\xi \eta R = 0 \quad (11)$$

$$R \Big|_{\xi=\xi_1^0} = 1 \quad (12)$$

$$R \Big|_{\eta=\eta_1^0} = 1 \quad (13)$$

Введя новые переменные $\xi = \sqrt{\xi_1}, \eta = \sqrt{\eta_1}$ получим

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} + R(\sqrt{\xi_1}, \sqrt{\xi_1^0}; \sqrt{\eta_1}, \sqrt{\eta_1^0}) = 0 \quad (14)$$

Как было указано решение уравнения (14) выглядит так

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0 \left[i \sqrt{(\xi_1 - \xi_1^0)(\eta_1 - \eta_1^0)} \right]$$

Возвращаясь к переменным ξ, η , получим

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0 \left(i \sqrt{(\xi^2 - \xi_0^2)(\eta^2 - \eta_0^2)} \right)$$

Таким образом, при $\alpha = 2$ функция Римана для уравнения (1) выглядит так

$$R = J_0 \sqrt{\left[\left(\frac{x+t}{2} \right) - \left(\frac{x_0+t_0}{2} \right) \right] \cdot \left[\left(\frac{x-t}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_0-t_0}{2} \right)^2 \right]} \quad (15)$$

III ($\alpha = 3$). В этом случае функция Римана удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + 2(3\xi\eta^2 + \eta^3)R = 0 \quad (16)$$

$$(\xi - \eta)^3 - (\xi + \eta)^3 = -6\xi^2\eta - 2\eta^3$$

Предположим, что $R_1(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0), R_2(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ функции Римана для уравнений вида

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + 6\xi^2\eta R_1 = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + \eta^3 R_2 = 0, \quad (18)$$

соответственно.

Используя замену переменных

$$\xi_1 = \int \xi^2 d\xi = \frac{\xi^3}{3}, \quad \eta_1 = \int \eta d\eta = \frac{\eta^2}{2}$$

Мы получим функцию Римана для уравнения (17)

$$R_1 = J_0 \left(i \sqrt{\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi_0^3}{3} \right) \left(\frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} \right)} \right)$$

Аналогично, при

$$\eta_1 = \int \eta^3 d\eta = \frac{\eta^4}{4}$$

мы получаем функцию Римана для уравнения (18)

$$R_2 = J_0 \left(i \sqrt{(\xi - \xi_0) \left(\frac{\eta_0^4}{4} - \frac{\eta^4}{4} \right)} \right)$$

Теперь используя формулу для сложений функций [4], мы получим функцию Римана для уравнения (16)

$$R(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = J_0 \left(i \sqrt{\left(\frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi_0^3}{3} \right) \left(\frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} \right)} \right) + \int_{(\xi+\eta)-(\xi_0+\eta_0)}^{(\xi-\eta)-(\xi_0-\eta_0)} J_0 \left(i \sqrt{\left(\frac{z^3}{3} - \frac{\xi_0^3}{3} \right) \eta_0^2} \right) \frac{\partial J_0 \left(i \sqrt{(z - \xi_0) \eta_0^4} \right)}{\partial z} dz \quad (19)$$

Возвращаясь к переменным (x, t) (3) мы получим функцию Римана $R(x, t, x_0, t_0)$ для уравнения (1) при $\alpha = 3$

$$R(x, t, x_0, t_0) = J_0 \left[i \sqrt{\frac{1}{6} \left[(x+t)^3 - (x_0+t_0)^3 \right] \left[(t_0-x_0)^2 - (t-x)^2 \right]} \right] + \int_{t-t_0}^{x-x_0} J_0 \left[i \sqrt{\frac{1}{3} \left[z - (x_0+t_0)^3 \right] (t_0-x_0)^2} \right] \frac{\partial J_0 \left[i \sqrt{\left(z - \frac{x_0+t_0}{2} \right) \left(\frac{t_0-x_0}{2} \right)^4} \right]}{\partial z} dz \quad (20)$$

IV ($\alpha = 4$). В этом случае функция Римана для (1) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \xi \partial \eta} + 8(\xi^3 \eta + \xi \eta^3) R = 0 \quad (21)$$

Обозначим через R_1, R_2 функции Римана, соответственно, для уравнений

$$\frac{\partial^2 R_1}{\partial \xi \partial \eta} + 8\xi^2 \eta R_1 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 R_2}{\partial \xi \partial \eta} + 6\xi \eta^3 R_2 = 0 \quad (23)$$

Введя замену

$$\xi_1 = \int \xi^3 d\xi = \frac{\xi^4}{4}, \eta_1 = \int \eta d\eta = \frac{\eta^2}{2},$$

получим, что

$$R_1 = J_0 \left(i \sqrt{\left(\frac{\xi^4}{4} - \frac{\xi_0^4}{4} \right) \left(\frac{\eta_0^2}{2} - \frac{\eta^2}{2} \right)} \right)$$

Для R_2 при

$$\xi_1 = \int \xi d\xi = \frac{\xi^2}{2}, \eta_1 = \int \eta^3 d\eta = \frac{\eta^4}{4},$$

получим

$$R_2 = J_0 \left(i \sqrt{\left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi_0^2}{2} \right) \left(\frac{\eta_0^4}{4} - \frac{\eta^4}{4} \right)} \right)$$

Согласно формуле Олевского [5], получаем функцию Римана уравнения (21). Возвращаясь к переменным, получаем функцию Римана для уравнения (1) при $\alpha = 4$

$$R(x, t, x_0, t_0) = J_0 \left[i \sqrt{\frac{1}{6} \left[(x+t)^3 - (x_0+t_0)^3 \right] \left[(t_0-x_0)^2 - (t-x)^2 \right]} \right] + \\ + \int_{t-t_0}^{x-x_0} J_0 \left[i \sqrt{\frac{1}{3} \left[z - (x_0+t_0)^3 \right] (t_0-x_0)^2} \right] \frac{\partial J_0 \left[i \sqrt{\left(z - \frac{x_0+t_0}{2} \right) \left(\frac{t_0-x_0}{2} \right)^4} \right]}{\partial z} dz \quad (24)$$

Таким образом, при $\alpha=1$ функция Римана уравнения (1) выражается формулой (10), $\alpha=2$ выражается формулой (15), $\alpha=3$ выражается формулой (20), $\alpha=4$ выражается формулой (24).

Замечание. В формулах (20),(23) функции R_1, R_2 играют равноправную роль, т.е. наряду с формулой

$$R = R_1 + \int R_1 \frac{\partial R_2}{\partial z}$$

справедлива формула

$$R = R_2 + \int R_2 \frac{\partial R_1}{\partial z}$$

Список литературы

1. Чуриков Ф.С. Изв. АН СССР.ОТН.№3,1958
2. Кошляков Н.С.и др. Уравнения математической физики. «Высшая школа».1970
3. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. ДАН СССР т.228.№1 1976
4. Мустафаев Б.А. Муталлимов Ш.М.АзНИИНТИ-Баку.1990 №Аз-1560
5. Олевский М.Н. ДАН .СССР 1952 т.87№3
6. Ахмедова (Гасимова) А.Р. Оператор преобразования для некоторого класса возмущенных уравнений Штурма - Лиувилля. «Научные вести» Фундаментальные науки. №2, VII, (26), Гянджа. 2008. стр.82-85.
7. Гасимова А.Р. Применение метода обратной задачи теории рассеяния к осесимметрическому уравнению Кортевега де Фриза. Operator, functions and systems of mathematical Physics conference/ International conference. Khazar University. June 2019. P.151-153. 10-14.