УДК 378.5

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ И «ИГРА ХАОС» ДЛЯ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Смирнова Екатерина Андреевна

Научный руководитель: **Смирнов Евгений Иванович**

д.п.н., профессор

ФГБУ ВО «Ярославский государственный

педагогический университет им. К.Д. Ушинского»

Аннотация: в статье представлены оригинальные материалы по исследованию «игры хаос» для правильного пятиугольника, используя математическое и компьютерное моделирование фрактального объекта – пятиугольника Серпинского на основе использования кросс - платформенной среды Qt-Creator. Найдены условия, обеспечивающие «чистое касание» итерационных пятиугольников и соотношения площадей.

Ключевые слова: фрактал, пятиугольник Серпинского, компьютерное моделирование, кросс - платформенная среда.

STOCHASTIC FRACTALS AND THE "CHAOS GAME" FOR A REGULAR PENTAGON

Smirnova Ekaterina Andreevna

Abstract: the article presents original materials on the study of the "chaos game" for a regular pentagon as fractal object, using mathematical and computer modeling of Sierpinsky' pentagon based on the use of Qt-Creator cross-platform environment. Conditions are found that provide a "clean touch" of iterative pentagons and area ratios.

Key words: fractal, Sierpinski' pentagon, computer modeling, cross-platform environment.

Введение. До недавнего времени геометрические модели природных объектов строились на основе сравнительно простых предметов: линий, фигур, тел: кривых, прямоугольников, окружностей, сфер, многогранников.

Однако, этот набор, как не сложно заметить, трудно применим для описания сложных объектов, таких как, турбулентный поток жидкости, пористые материалы, форма облаков, кровеносно-сосудистая система, крона дерева и т.д., а именно так устроена наша жизнь. Поэтому возникает проблема в необходимости освоения и конструирования новых геометрических объектов и методов для описания. Одним из таких понятий и явилось понятие фрактала. Само слово «фрактал» появилось благодаря гениальному ученому Бенуа Мандельброту (1924-2010 гг.) [1]. Его еще называют отцом фрактальной геометрии. Он сам придумал этот термин в семидесятых годах прошлого века, позаимствовав слово *fractus* из латыни, где оно буквально означает «ломанный» или «дробленный». Сегодня под словом «фрактал» чаще всего принято подразумевать графическое изображение структуры, которая в более крупном масштабе подобна сама себе. Первые идеи фрактальной геометрии возникли в XIX веке. Георг Кантор одним из первых построил фрактальное множество (так называемая «Пыль Кантора») путем выбрасывания из отрезка $[0;1]$ бесконечное число интервалов, в 1904 году Хельге фон Кох рассмотрел необыкновенную кривую, получившую название «кривая Коха», в 1916 году Вацлав Серпинский придумал фигуру, получившую позднее название «ковер Серпинского» (ковер в значении «салфетка») (рис. 1).

Рис. 1. «Ковер» Серпинского и кривая Коха

Известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные

береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. Примерами стохастических фракталов являются траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве, а также плазма является типичным представителем данного класса фракталов в компьютерной графике, также целый ряд так называемых «странных» аттракторов Лоренца, Хенона, Реслера и др. [3],[4], [5].

Известная «игра хаос» [2] позволяет построить треугольник Серпинского случайно т.е. используя случайный выбор по следующему алгоритму (рис.2.):

1. Взять три точки на плоскости, и нарисовать треугольник;
2. Случайно выбрать любую точку на плоскости, и продвинуться на половину расстояния от этой точки к любой из трех вершин треугольника с вероятностью $1/3$, центры гомотетии – вершины треугольника, коэффициент гомотетии $1/2$;
3. Отметить текущую позицию;
4. Повторить с шага 2.

Рис. 2. Алгоритм построения треугольника Серпинского

Польский математик добился такой четкости изображения, чтобы треугольники, которые вырезаются из основного треугольника пересекались лишь в одной точке. Однако если взять другой коэффициент гомотетии, то картина будет «смазана», например, при $k_1 = 1/4$ и $k_2 = 3/4$ получаем следующие рисунки (рис.3.).

Рис. 3. «Игра хаос» для различных значений коэффициентов гомотетии

Также можно рассматривать реализацию «игры хаос» для «ковра» Серпинского и «губки» Менгера, причем точная картина без наложений получается только для коэффициента $k = 1/2$.

Нас интересовал следующий вопрос: можно ли найти такой коэффициент отношения стороны правильного пятиугольника к стороне вписанного в него следующего итерационного пятиугольника, чтобы вписанные правильные пятиугольники затем имели только «чистое касание» т.е. имели лишь одну точку касания между собой, так, как это было проделано традиционно с треугольником Серпинского (назовем его пятиугольником Серпинского (рис.4)).

Рис.4. Пятиугольник Серпинского

Результаты. Используя «игру хаос» можно построить пятиугольник Серпинского по следующему алгоритму:

1. Взять пять точек на плоскости, и нарисовать правильный пятиугольник. Случайно выбрать любую точку на плоскости;
2. Продвинуться на половину расстояния от этой точки к любой из пяти вершин пятиугольника с вероятностью $1/5$, центры гомотетии – вершины пятиугольника;
3. Отметить текущую позицию;
4. Повторить с шага 2 и далее до бесконечности (реально - до любого возможного для построения картины на мониторе натурального числа).

Нетрудно заметить (рис.4), что пятиугольник (при первой итерации) разделен на пять более маленьких правильных пятиугольников, но их соседние фигуры имеют, вообще говоря, некоторую общую площадь пересечения друг с другом. Нас интересует ситуация, когда картина будет достигать баланса – «чистое касание», когда при отношении длин предыдущего и последующего итерированных пятиугольников, близкого к $1,6$, внутренние пятиугольники между собой будут иметь лишь одну точку пересечения (и так далее, в итерационном процессе будет также «чистое касание»). Таким образом, задача сводится к отысканию коэффициента k гомотетии с центрами в вершинах пятиугольника, которые обеспечивают в итерационном процессе «чистое касание». Удивительно, но, если мы делаем отношение длин <1 , то пятиугольники накладываются друг на друга с большей площадью, а если отношение длин >1 , то пятиугольники отдаляются друг от друга. Отсюда уже можно сделать вывод о том, что нас интересует некоторое пограничное значение k .

Пусть нам дан правильный пятиугольник ABCDE. Проведём в нём всевозможные диагонали. Заметим, что образовалась пентаграмма. Точки пересечения диагоналей также обозначим $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 5). Есть замечательное соотношение – золотое сечение, согласно которого диагональ правильного пятиугольника относится к его стороне в золотом сечении,

которое численно равно $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (обозначается оно через Φ), то есть в нашей задаче $\frac{CE}{CB} = \Phi$.

Рис. 5. Правильный пятиугольник после дополнительного построения

Проведем прямую $MN \parallel EB$ так, что MN проходящую через точку A_1 (где $MN \cap ED = N$; $MN \cap BC = M$) (рис.5). Прямая MN разделила сторону пятиугольника BC на CM и MB , не сложно заметить, что как раз соотношение этих сторон нас и интересует для построения правильных пятиугольников таким образом, чтобы они имели одну общую точку, то есть задача сводится к нахождению соотношения $\frac{MB}{CM}$. Именно:

1) $\angle DCE = \angle ECA = \angle ACB = 108^\circ$: $3 = 36^\circ$ (так как внутренние углы правильного пятиугольника являются трисектрисами угла);

2) $\angle DCA = 36^\circ$ (п.1),

$\angle DCA = \angle MA_1C$ (внутренние накрест лежащие при $DC \parallel MN$ – по построению и секущей CE); $\Rightarrow \angle MA_1C = 36^\circ$

3) $\angle BA_1C$ – внешний угол $\triangle DA_1C \Rightarrow \angle BA_1C = \angle A_1DC + \angle A_1CD = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$ (так как эти углы образованы трисектрисами);

4) $\angle A_1CM = \angle A_1CE_1 + \angle E_1CM = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ$;

5) Рассмотрим $\triangle CE_1A$ и $\triangle A_1MC$:

1. A_1C – общая;

2. $\angle E_1A_1C = \angle MCA_1$ (по п.3 и п.4) $\Rightarrow \triangle CE_1A_1 = \triangle A_1MC$ (по стороне

3. $\angle E_1CA_1 = \angle MA_1C$ (по п.1 и п.2) и прилежащим к ней углам);

6) п.5 $\Rightarrow A_1E_1 = CM$;

7) Рассмотрим $\triangle CE_1B$:

$$\angle E_1CB = 36^\circ \text{ (п.1) ;}$$

$\angle E_1BC = 36^\circ$ (так как образован трисектрисой) $\Rightarrow \triangle CE_1B$ – равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника $\Rightarrow CE_1 = BE_1$ (по свойству равнобедренного треугольника);

8) $A_1M \cap CE_1 = P$;

Рассмотрим $\triangle A_1PE_1$ и $\triangle CPM$:

$$1. A_1E_1 = CM \text{ (п.6);}$$

$$2. \angle E_1A_1P = \angle MPC = 36^\circ \text{ (п.3 и п.5)} \Rightarrow \triangle A_1PE_1 = \triangle CPM;$$

$$3. \angle A_1E_1P = \angle CPM = 72^\circ \text{ (п.5)} \quad (\text{по стороне и прилежащим к ней углам}) \\ \Rightarrow PE_1 = PM;$$

9) п.8 $\Rightarrow \triangle E_1PM$ – равнобедренный (по определению) $\Rightarrow \angle ME_1P = \angle E_1MP$ (по свойству равнобедренного треугольника);

$$10) \quad \left. \begin{aligned} \angle BE_1M &= \angle BE_1A_1 - \angle A_1E_1C - \angle ME_1C \\ \angle BME_1 &= \angle BMC - \angle E_1MP - \angle PMC \\ \angle A_1E_1C &= \angle PMC \text{ (п.5)} \\ \angle ME_1C &= \angle E_1MP \text{ (п.9)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \angle BE_1M = \angle BME_1$$

11) п.10 $\Rightarrow \triangle E_1BM$ – равнобедренный по признаку $\Rightarrow BM = BE_1$ (по определению равнобедренного треугольника);

$$12) \quad CE_1 = E_1B \text{ (п.7)}$$

$$BM = BE_1 \text{ (п.11)}$$

$$\left. \begin{aligned} CE_1 &= E_1B \\ BM &= BE_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow CE_1 = BM;$$

13) Рассмотрим $\triangle CEB$ и $\triangle A_1CE_1$:

$$1. \angle CEB = \angle A_1CE_1 \text{ (так как образованы трисектрисами)}$$

$$2. \angle ECB = \angle CA_1E_1 \text{ (п.5)}$$

$$\Rightarrow \triangle CEB \sim \triangle A_1CE_1 \text{ (по двум углам)} \Rightarrow$$

$$\frac{CE}{CB} = \frac{A_1C}{A_1E_1}, \text{ а } \frac{CE}{CB} = \Phi \Rightarrow \frac{A_1C}{A_1E_1} = \Phi;$$

14) $\triangle A_1CE_1$: $\angle CA_1E_1 = \angle CE_1A_1 = 72^\circ$ (п.8) $\Rightarrow \triangle A_1CE_1$ – равнобедренный (по признаку) $\Rightarrow A_1C = CE_1$ (по определению равнобедренного треугольника);

$$15) \quad \frac{A_1C}{A_1E_1} = \Phi$$

$$A_1C = CE_1$$

$$CE_1 = BM$$

$$A_1E_1 = CM$$

$$\left. \begin{aligned} A_1C &= CE_1 \\ CE_1 &= BM \\ A_1E_1 &= CM \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MB}{CM} = \Phi$$

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Подставляя мы нашли соотношение сторон – «чистое касание», при котором вписанные правильные пятиугольники каждой итерации будут иметь лишь одну точку касания. Более того, легко можно найти отношение площадей данных фигур пятиугольников текущей и последующей итераций. Приходим к выводу, что площади подобных пятиугольников также относятся друг к другу, как коэффициент подобия в

квадрате, то есть Φ^2 или $\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что отношения в данных пятиугольниках периметров, высот, срединных перпендикуляров, трисектрис равно коэффициенту подобия, а значит золотому сечению (рис.6).

Рис. 6. «Игра хаос» для правильного пятиугольника с коэффициентом подобия – «золотое сечение»

Настоящее исследование проведено впервые и использует для построения оригинальную кросс - платформенную среду Gt-Creator для работы с фрактальными объектами.

Заключение. Во всем, что нас окружает, мы часто видим хаос, но на самом деле это не случайность, а идеальная форма, разглядеть которую нам помогают фракталы. Природа — лучший архитектор, идеальный строитель и инженер. Она устроена очень логично, и если где-то мы не видим закономерности, это означает, что ее нужно искать в другом масштабе. Люди все лучше и лучше это понимают, стараясь во многом подражать

естественным формам. Инженеры проектируют акустические системы в виде раковины, создают антенны с геометрией снежинок и так далее. Фракталы хранят в себе еще немало секретов, и многие из них человеку еще лишь предстоит открыть.

Список литературы

1. Балханов В.К. Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления.-Улан-Удэ. - 2013. - 224 с.
2. Козырев С.Б. Размерность и самоподобные фракталы.-IV Международные Колмогоровские чтения. - Ярославль. - 2006. - С.206-220.
3. Осташков В.Н. Диалоги о фракталах. - Тюмень. - 2012. - 312 с.
4. Секованов В.С. Фракталы История создания, приложения, построение // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. - 2003. - №2. - С.4-13.
5. Смирнов Е.И. Фундирование в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. – Ярославль. - 2012. - 654 с.