УДК 531/534

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Исмайлов Кубаймурат

д.т.н., профессор

Самаркандский Государственный
архитектурно-строительный институт

Аннотация: В рамках деформационной теории пластичности на основе новой версии метода последовательных приближений получено решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающего равновесие круглой пластины от осесимметричной поперечной нагрузки. Предполагается, что нелинейные составляющие изгибающих моментов имеют вид кусочно-гладких функций, и предполагается, что по радиусу пластины имеются две упругопластические зоны по закону треугольника, одна из которых распространяется от центра, а второй - от края.

Ключевые слова: Пластика, пластичность, жесткость, интенсивность напряжений, деформации, нелинейные компоненты.

STRESS-DEFORMED STATE OF A CIRCULAR PLATE OUTSIDE ELASTICITY

Ismayilov Kubaymurat

Abstract: Within the framework of the deformation theory of plasticity, on the basis of a new version of the method of successive approximations, the solution of a nonlinear differential equation describing the equilibrium of a circular plate from an axisymmetric transverse load is obtained. It is assumed that the nonlinear components of the bending moments are in the form of piecewise - smooth functions and it is assumed that along the radius of the plate there are two elastic - plastic zones, according to the law of a triangle, one of which propagates from the center, and the second from the edge.

Key words: Plate, plasticity, stiffness, stress intensity, deformation, nonlinear components.

Введение. Исследование напряженно - деформированного состояния упруго пластической круглой пластинки на основании нового варианта метода последовательных приближений, в котором интегрирование основного нелинейного уравнения, описывающего равновесие круглой пластинки за пределом упругости при простом нагружении, полученное А.А.Ильюшиным [1]. Частное решение в первом приближении построено для случая, когда основные нелинейные функции изгибающих моментов вдоль упруго - пластических зон меняются по закону треугольника.

Методы. Рассмотрим равновесие круглой тонкой пластинки радиусом R и толщиной h , подвергающейся изгибу за пределом упругости от осесимметричной поперечной $q(r) = q_0 r/R$ нагрузки.

Будем считать что материал пластинки несжимаем и процесс нагружения пластинки является простым. Тогда изгиб пластинки за пределом упругости происходит в рамках теории малых упруго - пластических деформаций.

Уравнения равновесия элемента пластинки записываются в виде [2]:

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2d^3 w}{rdr^3} - \frac{d^2 w}{r^2 dr^2} + \frac{dw}{r^3 dr} = \frac{q(x)}{D} - \frac{1}{D} \left(\frac{d^2 \Delta M_r}{dr^2} + \frac{2d\Delta M_r}{rdr} - \frac{d\Delta M_\theta}{rdr} \right). \quad (1)$$

где $w(r)$ - искомая функция прогиба; $D = Eh^3/9$ - цилиндрическая жесткость линейно упругой пластинки; ΔM_r и ΔM_θ - нелинейные компоненты изгибающих моментов, определяемые по формулам:

$$\Delta M_r = \left(D - \frac{4}{3} I_3 \right) \left(\chi_r + \frac{1}{2} \chi_\theta \right); \Delta M_\theta = \left(D - \frac{4}{3} I_3 \right) \left(\chi_\theta + \frac{1}{2} \chi_r \right). \quad (2)$$

$$\text{Здесь, кривизны изогнутой поверхности } \chi_r = -\frac{d^2 w}{dr^2}; \chi_\theta = -\frac{dw}{rdr}; \quad (3)$$

$$\text{изгибная жесткость сечения пластинки } I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} dz; \quad (4)$$

σ_i - интенсивность напряжений; ε_i - интенсивность деформации; h - толщина пластинки.

Выражения изгибающих моментов можно записать в следующем виде:

$$M_r = D(\chi_r + 0,5\chi_\theta) - \Delta M_r(0); \quad M_\theta = D(\chi_\theta + 0,5\chi_r) - \Delta M_\theta(0). \quad (5)$$

При интегрировании разрешающего уравнения (1) посредством метода последовательных приближений будем представлять нелинейные составляющие (2) в виде кусочно - гладких функций и предположим, что вдоль радиуса пластинки имеют место две упруго - пластические зоны, одна из которых распространяется от центра, а вторая от края.

В соответствии с этой предпосылкой общее решение уравнения (1), соответствующее решению задачи в первом приближении, записывается в виде:

$$w(r) = w(0) - 0,5\chi_r(0)r^2 + \frac{q_0 r^5}{225DR} + Y(r). \quad (6)$$

где $w(0)$, $\chi_r(0)$, - прогиб и кривизна в центре пластинки;

$Y(r)$ - частное решение основного дифференциального уравнения принимаем в виде:

$$Y(r) = \frac{R^2}{4D} \left\{ \alpha^2 \Delta M_r(0) + \int_0^\alpha [\Delta M_r(\rho) - \Delta M_\theta(\rho)] \left[1 - 2\ln \frac{\alpha}{\rho} - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \rho d\rho \right\}, \quad (7)$$

где - $\alpha = r/R$ безразмерная координата вдоль радиального направления пластинки.

Частное решение в первом приближении построим для случая, когда основные нелинейные функции $\Delta M_r(r)$ и $\Delta M_\theta(r)$ вдоль упруго - пластических зон меняются по закону треугольника: вне упруго-пластической зоны они равны нулю (рис. 1).

Рис. 1. Закон изменения деформации вдоль толщины пластинки

**Рис. 2. Закон изменения интенсивности компонентов
изгибающих моментов**

На основании формул (7) и производных записываем частное решение по участкам:

I. Первый участок $0 \leq r \leq r_1$ ($0 \leq \alpha \leq \alpha_1$)

$$\Delta M_r(r) = \Delta M_r(0) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right); \quad \Delta M_\theta(r) = \Delta M_\theta(0) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right). \quad (8)$$

При этом для центрального сечения $r = 0$ имеет место равенство:

$$\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta(0). \quad (9)$$

Тогда частные решения (7) и его производные записываются отдельно для сечений внутри упруго - пластической зоны и для сечений, расположенных вне этой зоны (рис. 1):

$$Y(r) = \frac{R^2}{9D} \Delta M_r(0) \frac{\alpha^3}{\alpha_1}. \quad (10)$$

II. Второй участок $r_1 \leq r \leq r_2$

$$Y(r) = \frac{R^2}{4D} \Delta M_r(0) \left(\alpha^2 - \frac{5}{9} \alpha_1^2 - \frac{2}{3} \alpha_1^2 \ln \frac{\alpha}{\alpha_1} \right). \quad (11)$$

III. Третий участок $r_2 \leq r \leq R$

На этом участке нелинейные компоненты изгибающих моментов определяются по формулам:

$$\Delta M_r(r) = \Delta M_r(R) \frac{\alpha - \alpha_2}{1 - \alpha_2}; \quad \Delta M_\theta(r) = \Delta M_\theta(R) \frac{\alpha - \alpha_2}{1 - \alpha_2}. \quad (12)$$

Можно записать выражения для функции $Y(r)$ в следующем виде:

$$Y(r) = \frac{R^2}{4D} \left\{ \Delta M_r(0) \left(\alpha^2 - \frac{5}{9} \alpha_1^2 - \frac{2}{3} \alpha_1^2 \ln \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) - \frac{A}{3(1 - \alpha_2)} \left[\alpha_2^3 \ln \frac{\alpha}{\alpha_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{6} (4\alpha^3 - 9\alpha^2 \alpha_2 + 5\alpha_2^3) \right] - \frac{B}{6(1 - \alpha_2)} \left(4\alpha^3 - 3\alpha \alpha_2 - \alpha_2^3 - 6\alpha^2 \alpha_2 \ln \frac{\alpha}{\alpha_2} \right) \right\}; \quad (13)$$

$$\text{Здесь, } A = \Delta M_r(R) + \Delta M_\theta(R); \quad B = \Delta M_r(R) - \Delta M_\theta(R). \quad (14)$$

Однако, построенное таким образом частное решение является строгим только для случая, когда нелинейные компоненты изгибающих моментов меняются вдоль упруго - пластической зоны по закону треугольника.

Полученное частное решение может быть обобщено на более общий случай, когда нелинейные компоненты изгибающих моментов определяются посредством кусочно линейной функции в виде ломанной линии.

Чтобы получить выражения для функции $Y(r)$ и для ее производных во втором и последующих приближениях, когда каждая из функции $\Delta M_r(r)$ и $\Delta M_\theta(r)$ определяется своим набором треугольников, показанных на рис.1, условие $\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta(0)$ использовать нельзя, поэтому запишем $Y(r)$ отдельно для каждой из этих функций.

Выражения для угла поворота и кривизны на основании (6) представляются формулами:

$$\varphi(r) = \frac{dw}{dr} = -\chi_r(0)r + \frac{q_0 r^4}{45DR} + \frac{dY(r)}{dr}. \quad (15)$$

$$\chi_r(r) = -\frac{d^2 w}{dr^2} = \chi_r(0) - \frac{4q_0 r^3}{45DR} - \frac{d^2 Y(r)}{dr^2}. \quad (16)$$

$$\chi_\theta(r) = -\frac{dw}{rdr} = \chi_r(0) - \frac{q_0 r^3}{45DR} - \frac{dY(r)}{rdr}. \quad (17)$$

Выражения для изгибающих моментов на основании (5) будут:

$$M_r(r) = D \left[-\frac{3}{2} \chi_r(0) + \frac{9q_0 r^3}{45DR} + \frac{dY(r)}{2rdr} + \frac{d^2 Y(r)}{dr^2} \right] - \Delta M_r. \quad (18)$$

$$M_\theta(r) = D \left[-\frac{3}{2} \chi_r(0) + \frac{3q_0 r^3}{45DR} + \frac{dY(r)}{rdr} + \frac{d^2 Y(r)}{2dr^2} \right] - \Delta M_\theta. \quad (19)$$

В формулах (6)- (19) остаются неизвестными константы $\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta(0)$, $\Delta M_r(R)$, $\Delta M_\theta(R)$ и длины упруго - пластических зон r_1 и r_2 .

Для этой цели составляем следующие пять уравнений.

Первые два уравнения получаем из (16-17). При $r = R$:

$$\chi_r(R) = \chi_r(0) - \frac{4q_0 R^3}{45DR} - \frac{d^2 Y(R)}{dr^2}; \quad (20)$$

$$\chi_\theta(R) = \chi_r(0) - \frac{q_0 R^3}{45DR} - \frac{dY(R)}{Rdr}. \quad (21)$$

Следующие два уравнения получаем, если потребуем, чтобы наибольшая интенсивность деформации в конце левой упруго - пластической зоны ($r = r_1$) и в начале правой упруго - пластической зоны ($r = r_2$) была бы равна деформации текучести ε_{adm} , т.е.:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{\chi_r^2(r_1) + \chi_r(r_1)\chi_\theta(r_1) + \chi_\theta^2(r_1)} = \varepsilon_{adm}. \quad (22)$$

$$\frac{h}{\sqrt{3}} \sqrt{\chi_r^2(r_1) + \chi_r(r_2)\chi_\theta(r_2) + \chi_\theta^2(r_2)} = \varepsilon_{adm}. \quad (23)$$

Последнее, пятое уравнение записывается на основании граничных условий.

Рассмотрим два типа граничных условий:

1. Если сплошная пластинка закреплена по контуру, то угол поворота на контуре должен обращаться в ноль:

$$\frac{dw}{dr}(R) = \chi_r(0)R - \frac{q_0 R^3}{45DR} - \frac{dY(R)}{dr} = 0, \quad (24)$$

это уравнение является пятым для закрепленной пластинки.

2. Если сплошная пластинка по контуру шарнирно - опёрта, то надо потребовать, чтобы радиальный изгибающий момент на контуре обращался в ноль.

На основании первой формулы соотношения (5) имеем:

$$\chi_r(R) + 0,5\chi_\theta(R) = 0. \quad (25)$$

Это уравнение является пятым для пластинки шарнирно - опёртой по контуру.

Общие решения основного уравнения (1), а также системы нелинейных алгебраических уравнений (20) - (25) могут быть использованы для расчета пластинки только после того, как будет задана функция, отражающая физические свойства материала пластинки.

Будем считать, что материал пластинки обладает свойствами линейного упрочнения, тогда эта функция принимает вид:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i = [1 - \lambda(1 - (\varepsilon_{adm}/\varepsilon_1))] \varepsilon_i > \varepsilon_{adm}, \quad \sigma_i = E\varepsilon_i; \quad \varepsilon_i < \varepsilon_{adm}, \quad \lambda = 1 - (E_0/E).$$

Интенсивность деформации ε_i вдоль толщины пластинки меняется по линейному закону (рис. 2).

Интенсивность деформации ε_i в произвольной точке с координатой z определяется через наибольшую интенсивность деформации ε_0 по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{2z}{h} \varepsilon_0; \quad z = \frac{h}{2\varepsilon_0} \varepsilon_i; \quad dz = \frac{h}{2\varepsilon_0} d\varepsilon_i. \quad (26)$$

Когда материал пластинки всюду несжимаем и подчиняется закону линейного упрочнения, формула (4) для жесткости пластинки записывается в виде [6]:

$$I_3 = \frac{Eh^3}{12} \left[1 - \lambda + \lambda \left(\frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{adm}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{adm}^3}{\varepsilon_{adm}^3} \right) \right]. \quad (27)$$

Выражения для нелинейных компонентов изгибающих моментов $\Delta M_r(r)$ и $\Delta M_\theta(r)$ представляются в виде:

$$\frac{\Delta M_r(r)}{D} = \lambda \left(1 - \frac{3}{2e} + \frac{1}{2e^3} \right) \left[\chi_r + \frac{\chi_\theta}{2} \right]; \quad \frac{\Delta M_\theta(r)}{D} = \lambda \left(1 - \frac{3}{2e} - \frac{1}{2e^3} \right) \left[\chi_\theta + \frac{\chi_r}{2} \right], \quad (28)$$

где $e = \varepsilon_0 / \varepsilon_{adm}$.

Для определения длины упруго - пластических зон с учетом (10) - (14) корни системы нелинейных алгебраических уравнений (20) и (25) записываются в следующей форме:

$$\alpha_1^3 = \frac{15}{42K} \left[\chi_r(0) - \frac{8}{15} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3 \left[84 \frac{\varepsilon_{adm}^2}{h^2} - 9 \left(\chi_r(0) - \frac{2}{9} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)^2 \right]}}{15 \left(\chi_r(0) - \frac{8}{9} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)} \right\}; \quad (29)$$

$$\alpha_2^3 = \frac{15}{42K} \left[\chi_r(0) - \frac{15 + \mu^2}{30} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right] \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3 \left[84 \frac{\varepsilon_{adm}^2}{h^2} - 9 \left(\chi_r(0) - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6} \mu \right) \frac{\Delta M_r(0)}{3D} \right)^2 \right]}}{15 \left(\chi_r(0) - \frac{15 + \mu^2}{30} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)} \right\}. \quad (30)$$

$$\text{Где} \quad \alpha_1 = \frac{r_1}{R}; \quad \alpha_2 = \frac{r_2}{R}; \quad \mu = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad K = \frac{9q_0 R^2}{45Eh^3}. \quad (31)$$

Если материал пластинки является идеально - пластическим $\lambda = 1$, система нелинейных алгебраических уравнений (29) - (30) записывается через безразмерные параметры в следующей форме:

$$\alpha_1^3 = \frac{15\varepsilon_{adm}}{42Kh} \left[e - \frac{4}{5} \beta \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3 \left[84 - 9 \left(e - \frac{1}{3} \beta \right)^2 \right]}}{15 \left(e - \frac{4}{5} \beta \right)} \right\}. \quad (32)$$

$$\alpha_2^3 = \frac{15\varepsilon_{adm}}{42Kh} \left[e - \frac{15 + \mu^2}{20} \beta \right] \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3 \left[84 - 9 \left(\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6} \mu \right) \frac{1}{2} \beta - e \right)^2 \right]}}{15 \left(e - \frac{15 + \mu^2}{20} \beta \right)} \right\}. \quad (33)$$

Где обозначены $\frac{\Delta M_r(0)}{D} = \frac{3\varepsilon_{adm}}{2h} \beta(0)$; $\beta(0) = e(0) + \frac{1}{2e^2(0)} - \frac{3}{2}$.

Разделив уравнение (32) на (33) получаем нелинейное уравнение для определения $\mu = \alpha_1/\alpha_2$:

$$\begin{aligned} \mu^3 \left[e - \frac{15 + \mu^2}{20} \beta \right] \left\{ 1 + \frac{\sqrt{3 \left[84 - 9 \left(\left(\frac{3}{2} - \frac{5}{6} \mu \right) \frac{1}{2} \beta - e \right)^2 \right]}}{15 \left(e - \frac{15 + \mu^2}{20} \beta \right)} \right\} = \\ = \left[e - \frac{4}{5} \beta \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{3 \left[84 - 9 \left(e - \frac{1}{3} \beta \right)^2 \right]}}{15 \left(e - \frac{4}{5} \beta \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим два предельных случая, вытекающих из выражений (31) - (32).

1. Интенсивность деформации в крайних волокнах центрального сечения пластинки (при $r = 0$) равна деформации текучести $\varepsilon_{adm} = \varepsilon_i$. В этом случае левая упруго - пластическая зона отсутствует $\alpha_1 = 0$ (рис.3):

$$\alpha_2^3 = \frac{15\varepsilon_{adm}}{42Kh}. \quad (35)$$

2. Упруго пластические зоны примыкают друг к другу (рис. 4). В этом случае $\alpha_1 = \alpha_2$; $\mu = 1$ и выражения под радикалом в формулах (32), которые становятся одинаковыми, должны обратиться в ноль:

$$84 - 9 \left(e - \frac{1}{3} \beta \right)^2 = 0, \quad (36)$$

или на основании (33):

$$e^3(0) - \left(\sqrt{21} - \frac{3}{4} \right) e^2(0) - \frac{1}{4} = 0. \quad (37)$$

Приближенное значение корня этого уравнения $e(0) = 3,849$.

Таким образом, для случая, когда упруго пластические зоны примыкают друг к другу, интенсивность деформации в крайних волокнах центрального сечения пластинки $e(0) = 3,849$, это значение является максимальным, т.к. при больших значениях $e_0(0)$ выражения под радикалом в (33) - (34) становятся отрицательными.

Рис. 3. Правая упруго-пластическая зона

Рис. 4. Примыкающая пластическая зона

Обобщим частное решение основного уравнения для более общего случая, когда функции $\Delta M_r(r)$ и $\Delta M_\theta(r)$ определяются посредством кусочно - линейной функции в виде ломанной (1-2-3-4-.....n) рис.5.

Эта ломанная линия аппроксимирует кусочно - линейную функцию, представляющую собой набор треугольников, и следовательно, частное решение, соответствующее этой функции, получается посредством суммирования частных решений, относящихся к каждому из треугольников.

**Рис. 5. Закон изменения нелинейных компонентов
во втором и последующих приближениях**

Из граничных условий для заземленной пластинки по контуру, т.е. при $r = R$, имеем:

$$\chi_{\theta}(R) = -\frac{dw}{Rdr}(R) = \chi_r(0) - \frac{q_0 R^2}{45D} - \frac{dY(R)}{Rdr}. \quad (38)$$

Тогда значения нелинейных компонентов изгибающих моментов по контуру пластинки равны:

$$\Delta M_r(R) = \left[D - \frac{4}{3} I_3(R) \right] \chi_r(R); \quad \Delta M_{\theta}(r) = 0,5 \Delta M_r(R). \quad (39)$$

Константы A и B , определяемые по формуле (14), имеют вид:

$$A = \frac{3}{2} \Delta M_r(R); \quad B = 0,5 \Delta M_r(R). \quad (40)$$

С учетом этих упрощений частное решение основного уравнения (7) и его производные принимают следующий вид:

$$Y(r) = \frac{R^2}{4D} \left\{ \Delta M_r(0) \left(\alpha^2 - \frac{5}{9} \alpha_1^2 - \frac{2}{3} \alpha_1^2 \ln \frac{\alpha}{\alpha_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\Delta M_r(R)(\alpha - \alpha_2)}{(1 - \alpha_2)} \left[\frac{1}{3} (2\alpha^2 - \alpha\alpha_2 - \alpha_2^2) - \frac{\alpha_2}{2} (\alpha - \alpha_2) \ln \frac{\alpha}{\alpha_2} \right] \right\}; \quad (41)$$

$$\alpha_1^3 = \frac{5}{14} \frac{t}{\chi_r(0) - \frac{dY(R)}{Rdr}}. \quad (42)$$

$$t = \left[\chi_r(0) - \frac{8\Delta M_r(0)}{15D} \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\left[84 \frac{\xi_T^2}{h^2} - 9 \left(\chi_r(0) - \frac{2}{9} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)^2 \right]}}{5\sqrt{3} \left(\chi_r(0) - \frac{19}{36} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)} \right\}. \quad (43)$$

Второе уравнение получим при $\alpha = 1$ из формулы (16):

$$\chi_r(R) = 3\chi_r(0) + \frac{4dY(R)}{Rdr} - \frac{d^2Y(R)}{dr^2}. \quad (44)$$

Тогда частное решение (41) - (42) упрощается. Систему (42) - (44) алгебраических нелинейных уравнений можно записать в виде:

$$\frac{\Delta M_r(r)}{D} = \frac{\frac{5t}{14\alpha_1^3} - \chi_r(0) + \frac{\Delta M_r(0)}{2D} \left(1 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right)}{1 - \frac{\alpha_2(1 + \alpha_2)}{4} - \frac{\alpha_2}{2(1 - \alpha_2)} \ln \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (45)$$

$$\chi_r(R) = -3\chi_r(0) + \frac{\Delta M_r(0)}{2D} \left(3 - \frac{5\alpha_1^2}{3} \right) - \frac{\Delta M_r(R)}{2D} \left[2 - \frac{5(1+\alpha_2)\alpha}{4} - \frac{3}{2} \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \ln \frac{1}{\alpha_2} \right].$$

(46)

Для пластинки, когда материал является идеально - пластическим, деформирующимся в соответствии с диаграммой Прандтля, уравнения (45) и (46) приводятся к следующей системе:

$$\Delta m_r(R) = \frac{\frac{t_0}{\alpha_1^3} - \chi_r(0) + \frac{9}{2} \Delta m_r(0) \left(1 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right)}{1 - \frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4} - \frac{\alpha_2}{2(1-\alpha_2)} \ln \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (47)$$

$$e(R) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 3e(0) - \frac{9}{2} \Delta m_r(0) \left(3 - \frac{5}{3} \alpha_1^2 \right) + \Delta m_r(R) \left[1 - \frac{5}{8} (1+\alpha_2) \alpha_2 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \ln \frac{1}{\alpha_2} \right] \right\}, \quad (48)$$

где
$$t_0 = \frac{5}{14} \left[e(0) - \frac{24}{5} \Delta m_r(0) \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{[84 - 9(2\Delta m_r(0) - e(0))^2]}}{5\sqrt{3} \left(e(0) - \frac{24}{5} \Delta m_r(0) \right)} \right\}.$$

$$\Delta m_r(0) = \frac{\Delta M_r(0)h}{9D\varepsilon_{adm}} = \frac{1}{6} \beta(0); e(0) = \frac{\varepsilon_r(0)}{\varepsilon_{adm}}; e(R) = \frac{\varepsilon_r(R)}{\varepsilon_{adm}}; \chi_r(0) = e(0) \frac{\varepsilon_{adm}}{h};$$

$$\Delta m_r(R) = \frac{\Delta M_r(R)h}{9D\varepsilon_{adm}} = -\frac{\sqrt{3}\beta(R)}{9}; \beta(R) = e(R) + \frac{0,5}{e^2(R)} - \frac{3}{2}; \chi_r(R) = -\frac{\sqrt{3}e(R)\varepsilon_{adm}}{h}.$$

(49)

Параметр нагрузки определяется из следующей формулы:

$$K \frac{h}{\varepsilon_{adm}} = \frac{9}{24} F = e(0) - \frac{9}{2} \left\{ \Delta m_r(0) \left(1 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right) + \Delta m_r(R) \left[1 - \frac{(1+\alpha_2)\alpha_2}{4} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \ln \frac{1}{\alpha_2} \right] \right\}.$$

(50)

Здесь введены обозначения для нового параметра нагрузки $F = qR^2 / Eh^2 \varepsilon_{adm}$.

Рассмотрим два частных случая:

1. Интенсивность деформации в крайних волокнах центрального сечения пластинки $\varepsilon_0(0)$ равна деформации текучести т.е. $\varepsilon_0(0) = \varepsilon_{adm}$ (рис. 2).

Алгебраические нелинейные уравнения (47) - (48) будут иметь вид:

$$\frac{\Delta m_r(R)}{D} = \frac{2}{9} \frac{\frac{5t_0}{14\alpha_1^3} - 1}{1 - \frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4} - \frac{\alpha_2}{2(1-\alpha_2)} \ln \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (51)$$

$$e(R) = \frac{3}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + 3\Delta m_r(R) \left[1 - \frac{5}{8}(1+\alpha_2)\alpha_2 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \ln \frac{1}{\alpha_2} \right] \right\}. \quad (52)$$

2. Упруго - пластические зоны примыкают друг к другу $\alpha_1 = \alpha_2$ (рис.5).

Основная нелинейная система алгебраических уравнений (47) и (48) записывается с учетом формулы (49) при $e(0) = 3,849$ в следующем виде:

$$\frac{\Delta m_r(R)}{D} = \frac{2}{9} \frac{\frac{0,694}{\alpha_1^3} - 3,451875 - 0,132375\alpha_1^2}{1 - \frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4} - \frac{\alpha_2}{2(1-\alpha_2)} \ln \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (53)$$

$$e(R) = \left\{ 3,571 + 1,7196\alpha_1^2 + 5,196 \left[1 - \frac{5}{8}(1+\alpha_2)\alpha_2 - \frac{3}{4} \frac{\alpha_2}{1-\alpha_2} \ln \frac{1}{\alpha_2} \right] \right\}. \quad (54)$$

На основании этой системы определяются величины α_1 и $e(R)$ с учетом формулы (49).

Рассмотрим круглую, свободно опертую по внешнему контуру пластинку, нагруженную осесимметричной нагрузкой интенсивности $q(r) = q_0 r/R$.

Предположим, что материал пластинки всюду несжимаем и подчиняется закону линейного упрочнения.

Граничные условия, соответствующие равновесию шарнирно - опертой пластинки, определяются формулой (25) которую можно представить в виде:

$$\frac{3}{2} \chi_r(0) - \frac{q_0 R^2}{10D} - \frac{dY(R)}{Rdr} - \frac{d^2 Y(R)}{dr^2} = 0. \quad (55)$$

Нелинейные компоненты (2) на контуре ($r=R$) пластинки имеют следующий вид:

$$\Delta M_r(R) = 0; \quad \Delta M_\theta = -\frac{3}{2} \left(D - \frac{4}{3} I_3 \right) \chi_r. \quad (56)$$

В шарнирно опертой пластинке область пластических деформаций впервые появится в окрестности точек $(r=0, z=1)$, симметричных относительно оси пластины и относительно срединной поверхности. По мере

дальнейшего роста нагрузки картина напряженного состояния как в диаметральной, так и в круговых сечениях будет меняться, область пластических деформаций будут распространяться как по толщине, так и по радиусу пластины. В диаметральной сечении на некотором участке сечения возникает упруго - пластическое напряженное состояние, которое распространяется к опорному контуру.

При этом во второй упруго - пластической зоне $\alpha_2 = 0$, длину α_1 упруго - пластической зоны определяем выражением:

$$\alpha_1^3 = \frac{5}{14K} \left[\chi_r(0) - \frac{8}{15} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right] \left\{ 1 - \frac{\sqrt{\left[84 \frac{\xi_T^2}{h^2} - 9 \left(\chi_r(0) - \frac{2}{9} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)^2 \right]}}{5\sqrt{3} \left(\chi_r(0) - \frac{8}{9} \frac{\Delta M_r(0)}{D} \right)} \right\}. \quad (57)$$

Параметр нагрузки определяем из соотношения (38):

$$K = \frac{qR^2}{45D} = \frac{2}{9} \left[\frac{3}{2} \chi_r(0) - \frac{dY(R)}{2Rdr} - \frac{d^2Y(R)}{dr^2} \right]. \quad (58)$$

С учетом производных частных решений можно представить параметр нагрузки в безразмерном виде:

$$\frac{h}{\varepsilon_{adm}} K = \frac{1}{3} \left[e(0) - \frac{9}{2} \Delta m_r(0) \left(1 + \frac{1}{9} \alpha_1^2 \right) \right]. \quad (59)$$

В безразмерных координатах выражение для определения длины α упруго - пластической зоны имеет вид:

$$\alpha_1^5 - \frac{2}{\Delta m_r(0)} \left[e(0) - \frac{9}{2} \Delta m_r(0) \right] \alpha_1^3 = \frac{30t_0}{14\Delta m_r(0)}. \quad (60)$$

$$\text{где } t_0 = \left[e(0) - \frac{24}{5} \Delta m_r(0) \right] - \frac{\sqrt{[84 - 9(2\Delta m_r(0) - e(0))^2]}}{5\sqrt{3}}. \quad (61)$$

Выражение кривизны пластинки имеет вид:

$$\frac{h}{\varepsilon_{adm}} \chi_r(r) = e(0) - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right) \Delta m_r(0) - \frac{4}{5} F \alpha_1^3. \quad (62)$$

$$\frac{h}{\varepsilon_{adm}} \chi_\theta(r) = e(0) - \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right) \Delta m_r(0) - \frac{4}{5} F \alpha_1^3. \quad (63)$$

$$F = 5K \frac{h}{\varepsilon_{adm}} = \frac{5}{3} \left[e(0) - \frac{9}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \alpha_1^2 \right) \Delta m_r(0) \right]. \quad (64)$$

Изгибающие моменты в центре и на контуре пластинки определяются выражениями:

$$\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta = \frac{\sigma_r h^2}{12} \left(3 - \frac{1}{e^2(0)} \right); \Delta M_r(R) = 0; \Delta M_\theta(R) = \frac{\sigma_r h^2}{12} \left(3 - \frac{1}{e^2(0)} \right). \quad (65)$$

При решении нелинейного алгебраического уравнения (60) целесообразно задаваться не значением длины упруго - пластической области, а значением относительной интенсивности деформации $e(0) = \varepsilon_r(0)/\varepsilon_{adm}$ в центре пластинки.

Предельный случай расчета пластинки имеет место, когда максимальное значение интенсивности деформации удовлетворяет уравнению (29) и делается равным $e(0) = 3,849$, при этом нелинейные компоненты изгибающих моментов будут равны друг другу т.е.:

$$\Delta m_\theta(0) = \Delta m_r(0) = \frac{1}{6} \left[e(0) + \frac{1}{2e^2(R)} - \frac{3}{2} \right] = 0,39712 \quad (66)$$

Из уравнения (62) получаем $\alpha_1 = 1,04$; $F = 3,079$; $\chi_r(1,04) = -1,309$; $\chi_\theta(1,04) = 1,964$; $e(1,04) = 1$.

Эти результаты относятся к расчету пластинки в первом приближении, когда функции $\Delta m_\theta(0) = \Delta m_r(0)$ и менялись по закону треугольника. Уточним значения этих функции вдоль радиуса α .

Рассмотрим промежуточные состояния. Для этого задаем интенсивности деформации срединной поверхности $e(0)$ в центре пластинки и определяем длину упруго - пластической зоны α_1 .

1) Состояние пластинки при $e(0) = 3$. В этом случае из формулы (49) имеем:

$$\Delta m_r(0) = \frac{1}{6} \left[3 + \frac{1}{2} \frac{1}{3^2} - \frac{3}{2} \right] = 0,25926.$$

Решая уравнение (60), получаем $\alpha_1 = 0,88447$. Значение параметра нагрузки $F = 2,88447$. Значение кривизны получаем из (62) и (64):

$$\chi_r(0,88447) = -0,18167; \chi_\theta(0,88447) = 1,81571; e(0,88447) = 1;$$

$$\chi_r(1) = -0,78220; \chi_\theta(1) = 1,60250; e(1) = 0,88987.$$

Изгибающий момент в центре на контуре пластинки:

$$\Delta M_r(0) = \frac{1}{12} \left(3 - \frac{1}{3^2} \right) \sigma_r h^2 = 0,241 \sigma_r h^2.$$

$$\Delta M_r(R) = 0; \quad \Delta M_\theta(R) = \frac{1}{6} 0,78218 \sigma_{adm} h^2 = 0,13036 \sigma_{adm} h^2.$$

2) Состояние пластинки при $e(0) = 2$. В этом случае из формулы (49) имеем $\Delta m_r(0) = 0,10417$. Решение уравнения (60) дает $\alpha_1 = 0,77138$, значение параметра нагрузки $F = 2,50043$. Значения изгибной деформации и интенсивности деформации, $\chi_r(0,77133) = 0,44544$; $\chi_\theta(0,77133) = 1,45797$; $e(0,77133) = 1$; $\chi_r(1) = -0,56219$; $\chi_\theta(1) = 1,12412$; $e(1) = 0,56206$.

Изгибающий момент в центре и на контуре пластинки:

$$\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta(0) = \frac{1}{12} \left(3 - \frac{1}{2^2} \right) \sigma_{adm} h^2 = 0,229 \sigma_{adm} h^2.$$

$$\Delta M_r(R) = 0; \Delta M_\theta(R) = \frac{1}{6} 0,56206 \sigma_{adm} h^2 = 0,09368 \sigma_{adm} h^2.$$

3) Состояние пластинки при $e(0) = 1$. В этом случае пластинка находится в линейно упругом состоянии. По формулам (60) - (61) и (62) получим $\Delta m_r(0) = 0$; $t_0 = 0$; $\alpha_1 = 0$, а значения параметра нагрузки находятся из формулы (59):

$$\frac{h}{\varepsilon_{adm}} K = \frac{9}{45} P = \frac{1}{3}. \quad A = \frac{45}{27} = 1,667.$$

Прогиб в центре и угол поворота на контуре пластинки:

$$\frac{w(0)}{h} = \left[\frac{1}{2} 1 - \frac{9}{225} 1,667 \right] = \frac{R^2}{h^2} \varepsilon_{adm} = 0,433 \frac{R^2}{h^2} \varepsilon_{adm}.$$

$$\varphi(R) = \left[1 - \frac{9}{45} 1,667 \right] = \frac{R}{h} \varepsilon_{adm} = 0,666667 \frac{R}{h} \varepsilon_{adm}.$$

Изгибные деформации:

$$\chi_r(0) = \chi_\theta(0) = 1; \chi_r(1) = 1 - \frac{4}{5} 1,667 = -0,3336; \quad \chi_\theta(1) = 1 - \frac{1}{5} 1,667 = 0,6667;$$

$$e(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(0,3336)^2 - (0,3336)(0,6667) + (0,6667)^2} = 0,38491.$$

Изгибающие моменты в центре и на контуре пластинки:

$$\Delta M_r(0) = \Delta M_\theta(0) = \frac{1}{12} \left(3 - \frac{1}{1^2} \right) \sigma_r h^2 = 0,167 \sigma_r h^2.$$

$$\Delta M_r(R) = 0; \Delta M_\theta(R) = \frac{1}{6} 0,38491 \sigma_{adm} h^2 = 0,06415 \sigma_{adm} h^2.$$

Численные результаты, полученные при расчете шарнирно - опертой пластинки и отвечающие ее различным состояниям, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты, полученные при расчете шарнирно - опертой пластинки

	$\frac{w(0)h}{\varepsilon_{adm} R^2}$	$\frac{\varphi(0)h}{\varepsilon_{adm} R}$	$\frac{\chi_r(0)h}{\varepsilon_{adm}}$	$\frac{\chi_\theta(0)h}{\varepsilon_{adm}}$	$\frac{\varepsilon_0(0)}{\varepsilon_{adm}}$	$\frac{\varepsilon_0(R)}{\varepsilon_{adm}}$	$\frac{M_e(0)}{\sigma_{adm} h^2}$	$\frac{M_\theta(0)}{\sigma_{adm} h^2}$
1,667	0,433	-0,666	1	0,666	1	0,385	0,177	0,064
2,500	0,796	-1,124	2	1,124	2	0,566	0,239	0,093
2,885	1,125	-1,603	3	1,603	3	0,801	0,241	0,134
3,078	1,404	-1,965	3,849	1,965	3,849	1,000	0,488	0,166

Заключение. Получено решение нелинейного дифференциального уравнения, описывающего равновесие тонкой круглой пластинки, подверженных осесимметричным радиальным давлениям в рамках деформационной теории пластичности. Обобщенны решения задачи для случая, когда нелинейные изгибающих моментов представляются не одним, а множеством треугольников. В результате определено упруго - пластическое состояние пластинки, находящихся между линейно - упругим состоянием и состоянием предельного равновесия.

Список литературы

1. Ильюшин А.А. Пластичность М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948.-376 с.
2. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения ГНТИО Москва 1961.-368 с.
3. Mavlonov, T., Yuldoshev, B., Ismayilov, K., Toshev, S. Compressed rectangular plates stability beyond the elastic limit. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012199.
4. K.Ismayilov, K.Karimova Application of used automobile tires granules for road construction in Uzbekistan. Journal of Critical Reviews, 2020. 7 том, Номер 12 ,Страницы 946-948. DOI: 10.31838/jcr.07.12.165

5. Кубаймуродов Д.И., Исмаилов К., Ибрагимов А. Применение метода Бубнова-Галеркина для определения статистических характеристик состояния призматической оболочки. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44587093>. DOI: 10.46916/22012021-3-978-5-00174-117-6
6. K.Ismaylov, A. Suleymanov, S. Toshev Option Of The Method Of Successive Approximations In Calculating The Epicenters Of Extreme And Emergency Situations. Ilkogretim Online - Elementary Education Online, 2021; 20 (3): pp. 1640-1647 <http://ilkogretim-online.org> doi: 10.17051/ilkonline.2021.03.186
7. Ismayilov Critical strains and critical stresses in the steel rod beyond the elastic limit. European science review. 2018, Номер № 5-6.
8. K.Ismayilov, K.Karimova The Impact of Automobile Tires on the Environment from the Period of Raw Materials to the Disposal of Them, Retrieval Volume-8 Issue-3, September 2019. Number: C4473098319/19©BEIESP DOI:10.35940/ijrte.C4473.098319
9. Indiaminov, R., Butaev, R., Isayev, N., Ismayilov, K., Yuldoshev, B., Numonov, A. Nonlinear integro-differential equations of bending of physically nonlinear viscoelastic plates. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. DOI:10.1088/1757-899X/869/5/052048.