바일 금속과 카이럴 변칙

DOI: 10.3938/PhiT.27.022

김 희 철

Weyl Metal and Chiral Anomaly

Hee-Cheol KIM

A Weyl metal is a novel phase of conducting materials in condensed matter systems whose low energy excitations are Weyl fermions showing relativistic dispersion. Non-trivial phenomena in Weyl metal crystals can, therefore, be understood through the subtle features of Weyl fermions. Weyl fermions were predicted as solutions to Dirac's equation, and they play crucial roles in particle physics, as well as quantum field theory, and now in condensed matter experiments. In this article, we review the basic properties of Weyl fermions and related theoretical concepts, such as the chiral anomaly and Berry curvature.

들어가는 글

양자장론은 높은 에너지를 가지는 작은 입자들 사이의 물리 현상들을 정밀하게 설명하기 위해서 고안된 이론이다. 하지만, 이제는 입자물리만이 아니라 현대물리 전반에 걸쳐 수없이 많은 연구분야에서 양자역학적 물리현상들을 좀 더 엄밀하게 이해하기 위해서 사용되고 있다. 특히 최근에는 응집물리 분야의 새로운 관측현상들에 관한 연구에 양자장론과 그로부터 파생된 아이디어들이 다양한 방법으로 사용되고 있다. 예를 들면 위상 절연체(topological insulator) 현상 연구에 2+1차원의 천-사이먼스(Chern-Simons) 게이지(gauge) 이론이 핵심적인 역할을 하고 있고,^[1,2] 그래핀(graphene) 물질의 물리현상에서 발견된 질량이 없는 페르미온(massless fermion)들의 상호작용을 디랙

(Dirac) 방정식을 이용하여 연구하고 있다.^[3] 반면에 응집물리 실험에서 발견되는 새로운 양자현상들을 통해 양자장론의 응용 범위가 넓어지면서 양자장론에 대한 이해도 깊어지고 있다.

바일 금속^[4]은 입자물리와 양자장론에서 파생된 개념과 이론들을 활용할 수 있는 새로운 관측 결과들을 제공해주고 있다. 바일 금속은 도체의 새로운 상태로서, 도체 내부의 낮은 에너지에서 발생하는 들뜸(excitation)들이 놀랍게도 바일 페르미온(Weyl Fermion)의 성질을 가지고 있다. 따라서 낮은 에너지에서 벌어지는 바일 금속의 물리현상들은 바일 페르미온의 양자적 성질에 따라 결정된다. 바일 페르미온은 3+1차원 상대론적 시공간에 존재하는 질량이 없는 페르미온이다. 이 페르미온은 오른손, 왼손 중 오직 한쪽 방향의 나선도(helicity)만을 가지고 있다. 이 성질은 디랙 페르미온과 구분되는 가장 중요한 성질이다. 바일 페르미온의 나선도를 손지기(chirality)라고 부른다.

바일 페르미온의 손지기과 관계된 이론적인 개념들을 이용하여 바일 금속이 다른 물질들과 구분되는 특별한 성질들을 설명할 수 있다. 예를 들어, 위상부도체를 설명하는 토폴로지(topology)는 첫 번째 브릴루앙 영역(Brillouin zone)의 상태들로 주어지는 불변량(invariant)과 관련이 있지만, 이와 달리 바일 금속을 설명하는 토폴로지는 페르미 표면(Fermi surface) 위의 불변량과 관계가 있다. 뒤에 설명하겠지만 이 페르미 표면 위의 불변량이 바로 바일점(Weyl node)과 관계된 바일 페르미온의 손지기다. 또한 손지기 불균형(chirality imbalance)에 의해 외부자기장 방향으로 전류가 유도되는 현상인 카이럴 자기효과(chiral magnetic effect)를 설명하기 위해서는 카이럴 변칙(chiral anomaly)에 대한 이해가 필요하다. 이 글에서는, 이러한 바일 페르미온들의 성질을 이해하기 위해 필수적인 이론적 개념들을 소개한다. 우선 바일 페르미온의 이론적 배경을 간략히 설명하고, 카이럴 변칙의 정의와 이로부터 발생하는 현

저자약력

김희철 교수는 2011년 서울대학교 물리학과에서 박사학위를 받았으며, 고등과학원 물리학과 연구원, 캐나다 Perimeter Institute for Theoretical Physics 연구원, 그리고 미국 하버드대학교(Harvard University) 물리학과 연구원을 거쳐, 2018년 현재 포스텍(Postech) 물리학과 교수로 재직 중이다. (heecheol@postech.ac.kr)

REFERENCES

- [1] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- [2] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).
- [3] A. K. Geim and K. S. Novoselov, Nat. Mater. **6**, 183 (2007).
- [4] S. Murakami, New J. Phys. **9**, 356 (2007).

상들을 설명할 것이다. 그리고 손지기과 토폴로지를 연결 짓는 개념인 운동량 공간에서의 베리 곡률(Berry curvature)을 소개 하려 한다.

바일 페르미온

CPT 불변이며 상대론적인 3+1차원의 물리계에 존재하는 페르미온들은 디랙 방정식(Dirac's equation)을 만족한다. 이런 페르미온들을 디랙 페르미온이라고 한다. 디랙 방정식은 Paul Dirac이 1928년에 전자들(electrons)의 상대론적인 양자현상들을 설명하기 위해 고안하였다. 이 방정식을 통해 상대성이론과 양자역학을 통합한 이론인 양자장론이 탄생하게 되었다.

질량을 가지는 디랙 페르미온의 파동함수(또는 양자장) $\Psi(x)$ 는 운동방정식

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \quad (1)$$

을 만족한다. 여기서 m 은 질량이고, x 는 시공간의 좌표이다. 이 방정식은 시공간의 대칭성인 $SO(1,3)$ 로런츠 변환(Lorentz transformation)에 대해서 불변이다. 더 명확히 말하면, $SO(1,3)$ 대칭성을 두 번 덮는(double cover) $Spin(1,3)$ 대칭성에 대해 불변이다. 이 $Spin(1,3)$ 대칭성을 스핀군(spin group)이라고 한다. 페르미온 파동함수 Ψ 는 스핀 1/2 값을 가지는 스핀군의 표현법(representation)이며, 이 표현법들을 스피너(spinor)라고 부른다. 디랙 방정식의 해인 Ψ 는 4개의 성분(components)을 가지고 있고, 각 성분은 3+1차원 시공간에 있는 페르미온의 스핀상태를 나타낸다. 디랙 방정식은 다음과 같은 슈뢰딩거 방정식(Schrödinger's equation)으로도 쓸 수 있다.

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi. \quad (2)$$

이 식에서 해밀토니언(Hamiltonian) H 는

$$H = \gamma^0 \gamma^i p^i + m\gamma^0, \quad (3)$$

와 같이 적힌다. 이때 p^i 는 3차원 운동량 벡터다.

디랙 방정식에서 $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)$ 는 $Spin(1,3)$ 변환에 불변인 4개의 독립적인 4×4 행렬들이다. 이 4개의 행렬들을 디랙 행렬(Dirac's matrix)이라고 부른다. 디랙 행렬들은 다음과 같은 클리포드대수(Clifford algebra) 관계식을 만족한다.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4)$$

Fig. 1. Weyl fermions with (a) right-handed helicity and (b) left-handed helicity. $\vec{p}$ and $\vec{s}$ stand for momentum vectors and spins, respectively, for the fermions.

여기서 $\eta^{\mu\nu}$ 는 로런츠 변환에 대해 불변인 평면 시공간(flat spacetime)의 메트릭(metric)이다. 이 행렬들을 이용하면 무한소(infinitesimal) 로런츠 변환 $x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu$ 에 대한 페르미온 파동함수의 변환을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Psi'(x') = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}\Psi(x), \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (5)$$

여기서 $\omega^{\mu\nu}$ 는 무한소 변수(infinitesimal parameter)다. 즉 스핀이 1/2인 페르미온들의 로런츠 변환은 디랙 행렬로 이루어진 연산자 $\Sigma^{\mu\nu}$ 에 의해 발생된다.

디랙 페르미온들은 로런츠 변환에 대해 못 줄이는(irreducible) 표현이 아니다. 이는 3+1차원에서는 또 다른 4×4 행렬연산자인 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 가 로런츠 변환 연산자 $\Sigma^{\mu\nu}$ 와 교환(commute) 가능하기 때문이다. 이때 $(\gamma^5)^2 = 1$ 이기 때문에 γ^5 의 고유값(eigenvalue)은 +1이거나 -1이며, 이 고유값들을 손지기(chirality)라고 부른다. 따라서 디랙 스피너 Ψ 를 손지기(손지기)의 고유함수인 좀 더 작은 두 개의 스피너들로 나눌 수 있다.

$$\Psi = \gamma_R + \gamma_L, \quad \gamma^5 \chi_R = \chi_R, \quad \gamma^5 \chi_L = -\chi_L, \quad (6)$$

여기서 스피너 χ_R 과 χ_L 은 각각 2개의 성분을 가지는 γ^5 의 고유함수들이며, 각각 오른손(right-handed) 카이럴 스피너, 왼손(left-handed) 카이럴 스피너라 불린다. 디랙 스피너와는 달리 이 두 개의 카이럴 스피너들은 각각 로런츠 변환의 못 줄이는 표현이다. 하지만, CPT 불변인 물리계에서 이들은 독립적으로 존재할 수 없으며, 반드시 이 둘을 모두 포함하여 4개의 성분을 가지는 디랙 페르미온의 형태로 나타나야만 한다.

반면 질량이 없는 페르미온들은 카이럴 스피너로 기술 가능하다는 사실이 디랙 방정식이 발견된 이듬해(1929)에 Herman Weyl에 의해 발견되었다. 질량이 없는 페르미온의 해밀토니언은 카이럴 연산자 $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 와 교환 가능하다. 즉 $[\gamma^5, H] = 0$ 이다. 따라서 $m=0$ 인 페르미온들은 각각 카이럴

스피너 χ_R 나 χ_L 로 독립적으로 기술할 수 있다. 이때 페르미온들의 손지기는 운동량과 회전운동량의 상대적인 방향을 의미하는 나선도(helicity)와도 일치한다(그림 1 참조). 카이럴 스피너 χ_R 과 χ_L 각각에 의해 생성되는 스핀 1/2의 페르미온 양자들을 바일 페르미온이라 부른다. 반면 질량이 있는 경우 질량항이 γ^5 와 교환 불가(non-commutative)하기 때문에 이런 논의가 불가능하다.

바일 페르미온들의 상태는 다음과 같은 바일 기저(Weyl basis)로 디랙 행렬들을 표현하여 간단히 기술할 수 있다.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

여기서 σ^i 는 3개의 파울리 행렬(Pauli matrix)들이다. 이 행렬들을 디랙 방정식에 대입하여 다음과 같은 슈뢰딩거 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_{R,L} \right) \chi_{R,L} = 0. \quad (8)$$

이 식에서 질량이 없는 바일 페르미온 χ_R 과 χ_L 의 해밀토니언은 각각 $H_R = p_i \sigma^i$ 와 $H_L = -p_i \sigma^i$ 로 주어진다.

흥미롭게도 현재 기본입자들의 물리현상을 기술한다고 알려진 표준모형(standard model)에는 바일 페르미온으로 기대되는 입자가 없다. 한때 전하를 띠지 않는 뉴트리노(neutrino)들이 바일 페르미온들이라고 믿어졌었지만, 뉴트리노 진동현상(neutrino oscillation)이 관측되면서 이 입자들 역시 아주 소량의 질량을 가지는 입자들임이 밝혀졌다. 바일 페르미온은 기본입자들을 기술하기 위해 도입되었지만, 아직까지 자연을 구성하는 기본입자로서 관측되지는 않은 상황이다.

최근 특정 전기물질에서 준입자(quasi-particle) 형태의 바일 페르미온들이 발견되고, 이들이 흥미로운 강상호작용과 토폴로지 성질들을 보이면서 바일 페르미온에 대한 연구는 전환점을 맞이하고 있다. 이러한 전기물질의 상태를 바일 금속이라 한다. 이 물질들의 페르미 표면(Fermi surface) 근처에서 낮은 에너지 상태를 기술하는 해밀토니언은 정확히 바일 방정식 $H = \pm p_i \sigma^i$ 로 주어진다.^[4] 이는 바일 금속의 낮은 에너지상태가 놀랍게도 바일 페르미온의 운동법칙을 따른다는 사실을 의미한다. 이 결과 바일 페르미온들의 고유성질들이 바일 금속에서 나타나는 물리현상을 이해하기 위해 필수적인 역할을 하게 되는 것이다. 다음 두 장에서는 이러한 바일 페르미온들의 중요한 이론적 성질들에 대해 알아보려고 한다.

Fig. 2. Fermion 1-loop triangle Feynman diagram for a three photon scattering. External vertices are the chiral photon b_μ and two electric photons A_μ . The internal edges correspond to Weyl fermion propagators.

카이럴 변칙

이 장에서는 바일 페르미온의 대칭성과 관련된 카이럴 변칙에 대해 이야기하고, 이 개념이 바일 물질들(Weyl materials)에서 어떤 역할을 하는지 알아보려고 한다. 우선 카이럴 변환(chiral transformation)과 카이럴 변칙이 무엇인지 알아보자.

카이럴 변환은 디랙 페르미온 파동함수에 다음과 같이 작용한다.

$$\Psi'(x) = e^{i\alpha\gamma^5} \Psi(x). \quad (9)$$

이 식에서 α 는 무한소 변수다. 디랙 방정식으로부터 이 변환에 해당하는 전류와 관계된 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\partial_\mu (\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \Psi) = 2m \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \Psi. \quad (10)$$

여기서 $j_5^\mu \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^5 \Psi$ 를 카이럴 전류(chiral current)라 한다. 이때 오른쪽 항이 페르미온의 질량과 비례하기 때문에 질량이 있는 경우 카이럴 전류는 보존되는 물리량이 아니다. 즉 $\partial_\mu j_5^\mu \neq 0$ 이다. 따라서 질량이 큰 페르미온들을 다루는 경우에는 일반적으로 카이럴 변환과 카이럴 전류에 대해 논하지 않는다.

반면에 질량이 없는 경우 카이럴 전류의 관계식 $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ 으로부터 카이럴 전류가 보존되리라 예측할 수 있다. 앞장에서 설명했듯이, 질량이 없는 페르미온의 해밀토니언은 카이럴 연산자 γ^5 와 교환가능하다. 이는 해밀토니언 관점에서 수식 (9)

와 같은 카이럴 변환이 대칭변환임을 의미하며, 이 사실은 카이럴 전류의 보존관계식 $\partial_\mu j_5^\mu = 0$ 과도 일치한다. 하지만 이러한 카이럴 전류 보존에 대한 고전적인 예측은 양자효과에 의해 깨지게 된다.

바일 페르미온들이 전하를 띠고 게이지장 A_μ 와 상호작용하는 경우 카이럴 대칭성은 게이지장의 양자효과에 의해 깨진다. 이렇게 양자효과에 의해 고전적 대칭성(classical symmetry)이 깨지는 현상을 변칙(anomaly)이라 하며, 카이럴 대칭성의 깨짐 현상을 카이럴 변칙이라 한다. 질량이 없는 페르미온들의 카이럴 전류 관계식은 카이럴 변칙으로 인해 다음과 같이 변화한다.^[5,6]

$$\partial_\mu j_5^\mu = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\mu\nu} F_{\lambda\rho} = \frac{e^2}{2\pi^2} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (11)$$

여기서 e 는 전기결합상수(electric coupling constant), $F_{\mu\nu}$ 는 게이지장 세기(field strength)이고, $\vec{E}$ 와 $\vec{B}$ 는 각각 전기장과 자기장이다. 이 식의 오른쪽 항이 양자효과에 의한 카이럴 변칙이다. 고전적인 카이럴 전류 관계식(10)에서는 $m=0$ 인 경우 오른쪽 항이 '0'이 되지만, 양자계에서는 게이지장과의 상호작용으로 인한 양자효과로 식 (11)의 오른쪽과 같이 새로운 항이 생겨나게 되는 것이다. 그래서 질량이 없는 페르미온에 의한 카이럴 전류의 고전적인 보존법칙은 양자효과로부터 발생한 카이럴 변칙 항에 의해 깨지게 된다. 이 변칙 항은 페르미온장과 게이지장을 이차양자화(second quantization)했을 때 발생한다. 좀 더 정확히는, 배경 인스턴톤 게이지장(instanton gauge background)과 상호작용하는 바일 페르미온 제로모드(zero mode)들의 양자효과가 카이럴 변칙 항을 발생시킨다. 바일 페르미온들의 경로적분(path integral)에서는 카이럴 변칙을 그림 2와 같이 주어지는 페르미온의 삼각 파인먼 고리도형(triangle Feynman loop diagram)을 계산하여 정확히 얻어 낼 수 있다.

카이럴 변칙은 입자물리 역사에서 상당히 중요한 역할을 해왔다. 한 예로 양자색역학(quantum chromodynamics)계의 낮은 에너지에서 발생하는 중성 파이온(neutral pion)의 붕괴현상을 설명하기 위해서는 카이럴 변칙이 반드시 필요하다.^[5,6] 또한 표준모형의 입자들은 게이지변칙(gauge anomaly)이 발생하지 않도록 매우 정교하게 구성되어 있다. 최근에는 카이럴 변칙이 바일 금속의 실험적 현상들을 설명하는 핵심적인 역할을 하고 있다.

이제 바일 금속에서 나타나는 카이럴 변칙의 효과에 대해서 간단히 알아보자. 카이럴 변칙 수식 (11)은 전기장과 자기장이

Fig. 3. The 0-th Landau level spectrum ($E_{n=0}$) of the Weyl fermions χ_L and χ_R in the presence of parallel electric and magnetic fields $\vec{E} \cdot \vec{B} \sim \delta k$. A solid circle corresponds to a filled state and an empty circle denotes an empty state. The energy spectra for two Weyl fermions has been shifted separately toward positive k_z -direction away: right-handed particles (denoted by red dots) are created, while left-handed particles (denoted by red circles) are annihilated (or left-handed anti-particles are created). Note that total particle number is still preserved under this chiral effect.

평행하게 작용할 때 총 입자의 개수는 보존되지만 오른손 바일 입자와 왼손 바일 입자 각각의 개수는 보존되지 않는다는 사실을 의미한다. 즉,

$$\frac{\partial(n_R + n_L)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial(n_R - n_L)}{\partial t} = \frac{e^2}{2\pi^2} \vec{E} \cdot \vec{B}. \quad (12)$$

이 식에서 n_R 과 n_L 은 각각 오른손 입자와 왼손 입자의 개수이며, 따라서 $j_5^0 = n_R - n_L$ 이다. 이 결과, 전기장과 자기장이 평행하게 작용하면 양자효과에 의해 n_R 을 증가시키고 동시에 n_L 을 감소시키면서 바일 페르미온 입자들을 손지기에 따라 차별적으로 생성/파괴시킬 수 있다.

이 현상을 간단히 이해하기 위해 자기장이 작용하는 물리계의 바일 페르미온들을 생각해보자. 자기장이 z 방향으로 작용할 때, 손지기 ± 1 을 가지는 0번째 란다우 준위(0-th Landau level)에 있는 바일 페르미온들의 에너지 분산은

$$E_{n=0}(k_z) = \pm k_z \quad (13)$$

와 같이 주어진다. 이때 k_z 앞의 부호는 페르미온의 손지기 값과 일치한다. 이제 전기장을 자기장과 평행하게 걸게 되면, 즉 $\vec{E} \cdot \vec{B} \sim \delta k$ 이면, 운동량 공간의 모든 상태들이 그림 4와

REFERENCES

- [5] S. L. Adler, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [6] J. S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento A Serie **60**, 47 (1969).

Fig. 4. Left: The dispersion for a Dirac fermion with energy E along k_x, k_y in the momentum space. This shows a relativistic linear dispersion between the energy and the momentum. Right: The dispersions for Weyl fermions over two Weyl nodes separated along k_y . Here, the blue and the red cones have opposite chirality.

같이 δk 만큼 이동하게 된다. 이는 바로 카이럴 변칙의 효과로서, 손지기가 반대인 바일 페르미온 입자들이 차별적으로 생성/파괴되면서 발생한 것이다. 반면 총 입자의 개수는 여전히 보존되는 것을 볼 수 있다. 이 외에도 바일 금속의 카이럴 자기 효과(chiral magnetic effect)^[7,8]와 같은 다양한 전자기적 반응 현상들이 카이럴 변칙의 결과로 나타난다.

손지기와 토폴로지

운동량 공간(momentum space)에서 질량이 없는 디랙 페르미온의 에너지 분산은 두 개의 3차원 원뿔구조(3-dimensional cone-like structure)가 꼭지점에서 만나는 형태로 주어진다(그림 4 참조). 각 원뿔은 또 다시 두 개의 원뿔이 겹쳐있는 구조로, 오른손과 왼손 바일 페르미온의 에너지 준위가 중첩되어 있는 상태이다. 여기에 섭동(perturbation)을 가하면 겹쳐있는 두 개의 원뿔을 운동량 공간상에서 분리하여 바일 페르미온의 에너지 분산 두 집합(two sets)을 얻을 수 있다(그림 4 오른쪽). 각각의 집합 또한 두 개의 원뿔구조가 꼭지점에서 만나는 형태이며, 이 꼭지점을 바일점(Weyl node)이라고 한다. 바일 금속이 섭동에 대해 안정적인 이유는 바로 이 바일점들이 운동량 공간에서의 토폴로지적 특성을 나타내기 때문이다.

바일점과 관련된 토폴로지를 알기 위해서는 베리 곡률을 먼저 이해해야 한다. 베리 곡률은 전자기선속(electromagnetic flux)과 유사한 물리량으로, 시공간에서 정의된 전자기선속과 달리 운동량 공간에서 정의된다. 베리 곡률은 다음과 같이 정의된다. 우선 해밀토니언이 연속적인 변수 $\vec{k}$ 값에 의존한다고 하자. 그러면 이 물리계의 파동함수 역시 $\vec{k}$ 값에 의존하며, 다음과 같은 운동방정식을 만족한다.

$$H(\vec{k})|\psi(\vec{k})\rangle = E(\vec{k})|\psi(\vec{k})\rangle. \quad (14)$$

이제 변수 $\vec{k}$ 를 다른 변수 $\vec{k}'$ 으로 천천히 단열(adiabatic) 변환시키자. 이 단열변환은 파동함수 $|\psi(\vec{k})\rangle$ 를 또 다른 고유함수인 $|\psi(\vec{k}')\rangle$ 로 변환시키게 된다. 이 변환이 작을 때 $\vec{k}' = \vec{k} + \delta\vec{k}$, 두 파동함수 $|\psi(\vec{k})\rangle$ 와 $|\psi(\vec{k}')\rangle$ 의 중첩은 다음과 같이 주어진다.

$$\langle\psi(\vec{k})|\psi(\vec{k}')\rangle = 1 + \delta k_i \langle\psi(\vec{k})|\frac{\partial}{\partial k_i}|\psi(\vec{k})\rangle \approx e^{i\vec{A} \cdot \delta\vec{k}}. \quad (15)$$

이 식에서 $A_i \equiv -i\langle\psi(\vec{k})|\frac{\partial}{\partial k_i}|\psi(\vec{k})\rangle$ 는 변수 $\vec{k}$ 의 공간에서 정의된 1-폼(1-form)으로 베리 연결(Berry connection)이라 한다. 이때 단열변환을 시작하는 기준 파동함수를 임의의 위상(phase)만큼 변환시켜 베리 연결을 정의하는 중복성(redundancy)이 있기 때문에 다음과 같은 베리 연결의 게이지 변환에 대해서 물리값들이 변하지 않는다.

$$A_i \rightarrow A_i' = A_i + \partial_i \omega. \quad (16)$$

여기서 ω 는 변수공간에서의 임의의 함수다. 따라서 베리 연결을 변수공간에 정의된 게이지장으로 해석할 수 있다.

이제 변수공간에 정의된 닫힌경로 C 를 따라 단열변환을 시켜보자. 이 변환의 결과로 파동함수는 다음과 같은 위상을 얻게 된다.

$$e^{i\gamma} = \exp\left(i\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{k}\right) = \exp\left(i\oint_S F_{ij} dS^{ij}\right). \quad (17)$$

이 식에서 S 는 경로 C 로 둘러싸인 2차원의 면이며, 베리 연결의 곡률인 $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ 가 바로 베리 곡률이다.^[9] 이 베리 곡률을 2차원 면 S 를 따라 적분한 값에 따라 단열변환의 시작과 끝에 있는 파동함수들 사이의 위상차이가 결정된다. 그런데, 단열변환의 시작점과 끝점이 같기 때문에 위상차이 값은 반드시 정수값

$$C = \frac{1}{2\pi} \oint_S F_{ij} dS^{ij} \quad (18)$$

REFERENCES

- [7] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran and H. J. Warringa, Nuclear Physics A **803**, 227 (2008).
- [8] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008).
- [9] M. V. Berry, F. R. S., Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45; DOI: 10.1098/rspa.1984.0023 (1984).

에 비례해야만 한다, 즉 $\gamma = 2\pi C$ 이다. 이 정수값 C 는 게이지 변환으로 없앨 수 없는 토폴로지 값으로서 천숫자(Chern number)라고 부른다.

바일점은 운동량 공간에서의 베리 곡률과 관계가 있다.^[10] 변수 $\vec{k}$ 를 바일 금속의 3차원 운동량과 일치시키면 앞서 정의한 물리량들을 바일 금속의 물리량들로 해석할 수 있게 된다. 바일점들은 바로 천숫자가 ± 1 일 때 베리 곡률의 원천(source)들이다. 운동량 공간에서 베리 곡률을 바일점을 둘러싸는 구면을 따라서 적분하면 천숫자 ± 1 을 얻을 수 있으며, 이때 천숫자 앞의 부호는 바일점에서 정의된 바일 페르미온의 손지기에 의해 결정된다.

운동량 공간의 임의의 구 표면 위에서 계산한 천숫자가 $+1$ 이거나 -1 이면, 그 표면으로 둘러싸인 구 내부에 베리 곡률의 원천이 반드시 존재해야만 한다. 이 곡률의 원천을 운동량 공간에서의 자기단극자(magnetic monopole)로 해석할 수 있다. 따라서 손지기 $+1$ 이나 -1 인 바일 페르미온의 바일점들이 바로 베리 연결에 대해 전하 $+1$ 또는 -1 을 띠는 자기단극자들이다.

자기단극자는 천숫자로 결정되는 토폴로지에 의해 안정적으로 존재할 수 있는 자기(magnetic)적 성질을 띠는 입자이다. 시공간의 자기단극자는 입자물리에서 처음 제안된 입자지만 현재까지 실험적으로 발견되지 않았다. 흥미롭게도 운동량 공간에서의 자기단극자가 바일 금속에서 바일점으로 관측된 것이다.

이러한 바일점들의 토폴로지 성질과 총 입자개수의 보존법칙에 의해 바일점은 혼자 생성되거나 파괴될 수 없고, 반드시 손지기가 $+1$ 과 -1 인 쌍으로 생성/파괴되어야만 한다. 이 결과 운동량 공간에서 손지기가 반대인 바일점들을 서로 떨어뜨려

놓게 된다면 바일 페르미온은 안정적으로 존재할 수 있게 된다. 즉 바일 금속의 안정성은 운동량 공간에 생성된 자기단극자의 토폴로지에서부터 보호 받는다.

마치는 글

이 글을 통해 바일 금속의 기본적인 배경 이론들을 알아보았다. 바일 금속에서 관측되는 새로운 현상들은 일찍이 입자물리에서 이론적으로 연구되었던 바일 페르미온들과 여러 기본입자들의 특징들로부터 설명 가능하다. 바일 페르미온 물리계의 카이럴 변칙 현상과 운동량 공간에서의 베리 곡률 및 토폴로지로부터 나오는 바일 금속의 성질들이 그런 특징들이다. 특히 양자변칙(quantum anomaly)은 상대론적 효과와 양자효과를 모두 고려하는 물리계에서만 등장하는 가장 미묘하면서도 중요한 현상이다. 바일 금속은 이러한 놀라운 현상들을 실험적으로 관측하고 연구할 수 있는 좋은 재료가 되어 주고 있다. 앞으로도 입자물리 연구에서 개발된 다양한 개념들과 방법론들을 활용하여 새로운 실험을 고안해 내고 흥미로운 결과들을 얻어낼 수 있기를 기대하고 있다. 이러한 작업들은 이론으로만 존재했던 현상들을 실제현상으로 구현해냄으로써 입자이론물리와 응집실험 사이의 간격을 크게 좁혀주는 결과를 가져오게 될 것이다. 더 나아가서는 이론적 예측을 뛰어넘는 현상을 관측하여 이론물리 분야에 새로운 연구방향을 제시해 주기를 희망한다.

REFERENCES

- [10] X. Wan, A. M. Turner, A. Vishwanath and S. Y. Savrasov, Phys. Rev. B **83**, 205101 (2011).