이론물리학은 이렇게 하라고 보여준 한스 베테: 람-이동 계산과 베테 안자츠

DOI: 10.3938/PhiT.26.013

남순건

What Has Hans Bethe Shown Us as a Theoretical Physicist? – Calculations of the Lamb Shift and the Bethe Ansatz

Soonkeon NAM

Hans Bethe has contributed to theoretical physics in a way that sets him as a role model, however hard that might be to follow. He was born a few years after the pioneers of Quantum Mechanics, such as Heisenberg and Dirac. His contemporaries had hard times in finding new breakthroughs. However, Hans Bethe made tremendous progress in the development of Quantum Field Theory, especially in quantum electrodynamics (QED). His calculation of the experimental Lamb Shift of the hydrogen atom was a breakthrough that broke loose the impasse of QED regarding divergent results that had made comparisons with experiments impossible. He was the first to have a finite result using renormalization. Looking back, this contribution can be deemed even greater than his Nobel Prize winning contribution to the understanding of stellar energy via nuclear processes. His highest cited work is the Bethe Ansatz, a pioneering work in the field of exactly solvable models, which has had a far reaching impact in condensed matter physics and in more mathematical field such as string theory and supersymmetric Yang Mills theory. All in all, Hans Bethe has shown the physics community what is required to be a top-level theoretical physicist whose work

will have impacts that last beyond his/her lifetime.

들어가며

20세기 물리학은 20세기 초반에 태어난 물리학자들이 나이가 20대 중반일 때 역사적인 업적들을 만들어내는 놀라운 이야기를 가지고 있다. 1901년 9월생인 페르미(Fermi), 1901년 12월생인 하이젠베르크(Heisenberg), 그리고 1902년 8월생인 디랙(Dirac). 물리학을 공부한 많은 사람들은 이들에 대한 이야기에 익숙해져 있다. 이들이 어릴 때 세상을 떠들썩하게 한 닐스 보어의 구시대적 물리법칙에 근거를 둔 원자구조모형을 완전히 새로운 물리학인 양자역학으로 만들어 내가는 이야기는 언제 들어도 흥미진진한 이야기다. 그런데 이들보다 약 6-7년 정도 늦게 태어나서 양자역학을 만드는 기회를 놓친 젊은 학자들의 이야기는 덜 알려져 있다. 1908년생인 바이스코프(Weisskopf)의 자서전을 보면 몇 년 늦게 태어나서 기회를 얻기 어려웠던 자신의 젊은 날들을 회상하고 있다. 그는 양자장론에 많은 기여를 했고 1960년에 50대 초반의 나이에 미국물리학회장, 1961년 CERN 소장 등을 역임을 한 사람이다. (필자의 학문적 증조할아버지가 되기도 한다.) 오히려 더 늦게 태어난 학자들은 새로 발견된 입자들과 핵에서의 상호작용에 대해 기회가 열려서 실험적 발견을 통한 업적이 많이 나왔다. 이론학자들로는 양자역학에서 양자장론으로의 발전을 정립하는데 크게 기여한 1918년생인 슈윙거(Schwinger), 파인만(Feynman) 등이 있다. 그럼 1906년 7월생인 한스 베테(Hans Bethe)는 물리학에서 어떤 업적을 남길 수 있었을까? 동년배의 노벨상 수상 학자로는 1907년 1월생인 유카와(Yukawa), 1906년 3월생인 토모나가(Tomonaga), 1908년 1월생인 란다우(Landau) 등이 있다. 사실 양자장론은 양자역학이 나온 후 곧바로 1920년대 후반에 이론이 나왔음에도 불구하고 실험과 연관성에서 많은 어려움을 겪어서 1940년대 후반이 되어서야 제대로 된 이론으로 받아들여졌다. 그렇게 되는 과정에서 1947년 베테의 실험에서 수소원자 스펙트럼에서 나온 램-이동(Lamb Shift)에 대한 이론적 계산이 결정적인 역할을 했다. 그 이후 껍질에 갇

저자약력

남순건 교수는 서울대 물리학과 졸업(1982)하고 1987년 미국 Yale 대학교 박사 학위(입자물리 이론 및 끈이론)를 취득한 후 1992년부터 현재 경희대학교 이과대학 물리학과 교수로 재직 중이다. 경희대학교 일반대학원 원장, 미래정책원장 및 한국물리학회 실무이사장 겸 부회장(2015-2016)을 역임하였다. (nam@khu.ac.kr)

혀있던 양자장론이 기본입자들의 물리를 설명하는 언어로 자리매김을 할 수 있었던 것이다.

앞서 언급된 물리학의 선배들보다 물리학 학부 교과서에는 덜 알려져 있지만 정말로 다양한 분야에서 아직까지도 연구되고 있는 주제에 대해 끼친 베테의 업적은 이렇듯 지대하다고 할 수 있다. 1967년 노벨물리학상을 항성에서의 에너지 생성에 대한 연구로 노벨상을 받았기 때문에 베테를 핵-천체물리학자로만 알기 쉽다. 그러나 그의 일들을 잘 아는 학자들 간에는 이 글에서 소개될 램 이동에 대한 그의 업적을 높이 평가하는 사람도 많다. 그 이유는 이론으로 개발되었으나 실험과 비교가 불가능하던 양자장론을 정밀한 측정치를 예측하는 이론으로 정립하였기 때문이다. 양자장론이 물리학에서 가장 기본이 되는 입자물리학의 표준언어가 될 수 있는 이유도 베테의 계산이 있던 날부터였다고 해도 과언이 아니다. 그리고 그의 또 다른 큰 업적이 있는데 바로 베테 안자츠(Bethe Ansatz)이다. 베테는 자신의 이름이 붙은 베테 안자츠에 대해서는 처음 논문을 쓴 후에 추가로 연구를 더 하지 않았음에도 불구하고 그가 시작한 이 연구방법은 아직까지도 고체물리, 통계물리, 입자물리, 끈이론 등에서 정확히 풀리는 모형에 기반을 둔 연구방법의 기초가 되었다. 즉 베테 안자츠는 완전히 새로운 연구 분야를 하나를 개척했다고 해도 과언이 아니다. 필자는 생전의 베테를 한번 뵈 기회가 있었다. 1986년 체레노빌 원전 사고가 있는 직후 예일대학에 방문하여 그에 대해 강연을 하던 그의 모습을 아직도 기억한다. 그의 나이가 이미 80세였으나 정력적인 모습을 보였다. 그 뒤에도 듣기로 코넬대학교 물리학과에서 가장 논문을 활발히 쓰는 분이 80대의 베테라고 들었었다. 오랜 연구기간에서 폭넓으면서도 깊이가 있는 연구로 따라가기 힘든 사례를 보여준 베테는 감히 수학에서의 오일러에 비견할 만한 물리학자라고 말하고 싶다.

램-이동(Lamb Shift)

2차 세계대전 종전 후에 다시 물리학자들이 학계로 돌아와 당시의 가장 근본적인 물리문제들을 논의한 워크숍이 1947년 뉴욕 인근의 롱아일랜드 동쪽 끝에 위치한 조용한 섬 셸터 아일랜드(Shelter Island)에서 1947년 6월 2일부터 3일간 개최되었다. 주제는 양자론의 근본에 대해서였다. 보안이 필요한 연구(원자폭탄, 레이더)에 투입되었던 물리학자들이 5년 만에 서로 자유로이 토론을 할 수 있던 워크숍이었다. 당시 20여명 정도의 엄선된 참석자 중에 나중에 모두 7명이 노벨상을 받을 정도로 역사적인 행사였다. 여기에서 논의된 것 중 특히 많은 사람들의 관심을 끈 실험 결과는 램(Lamb)과 그의 학생인 레더포드(Retherford)가 측정한 수소원자 스펙트럼에서 나오

Fig. 1. Participants of Shelter Island Workshop of 1947.

는 $2S_{1/2}$ 와 $2P_{1/2}$ 두 준위의 에너지 차이였다.^[1] 당시에 새로운 마이크로파 기술을 이용하여 측정했던 것이다. 1947년 5월이 되어서 그 실험 결과가 확실해졌다. 수 퍼센트의 오차 내에서 1000 MHz의 에너지 차이가 나온 것이다. 그런데 디랙의 상대론적 양자역학에 의하면 두 상태의 에너지는 동일해야 한다. 그래서 사람들은 양자전기역학(Quantum Electrodynamics, QED)이라 불리는 양자장론의 효과를 고려하면 이를 설명할 수 있다고 생각을 하였다. 이 결과 6월 2일부터 3일간 열린 셸터 아일랜드 워크숍에서 논의되었고 그 이론적 해석에 대해서 치열한 논의가 있었다. 그러나 당시의 양자장론은 치명적인 결함을 가지고 있었다. 2차 섭동이론에서 나오는 계산 결과들이 무한대 값으로 나오기 때문이다. 즉 유한한 값으로 나오는 실험결과와 비교 불가능했다. 뭔가 완전히 새로운 아이디어가 필요했었다. 당시 프린스턴의 고등연구소를 방문하고 있던 네덜란드의 크래머스(Kramers)는 재규격화(renormalization)의 필요성을 언급하였다. 불행히도 그의 일반적인 아이디어에 대한 필요성은 이해하였으나 너무 장황하고 복잡하게 이론을 전개해서 당시 참가자들이 쉽게 적용하기 어려웠다. 그도 그럴 것이 그는 거의 혼자서 10년 가까이 집요하게 자신의 이론을 개발했던 것이다. 그의 아이디어 중 가장 중요한 것은 알 수 없는 전자의 '벌거벗은' 질량과 수소원자 주위에서 운동하면서 광자와 상호작용할 때의 전자의 무한대의 질량의 차이가 유한한 실험값이어야 한다는 것이다. 그의 아이디어는 1948년 솔베이

REFERENCES

- [1] Willis E. Lamb, Jr. and Robert C. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947).

Fig. 2. Lamb shift. Difference between Dirac's theory and QED (Source: H. Haken, H. C. Wolf, Atomic Physics, 1996).

학회에서 다시 발표하였고 1950년 프로시딩이 출판되었으나 이해하기 어려운 방식으로 적혀있다.

이 학회에 참석하고 있던 한스 베테는 바로 크레이머의 아이디어를 매우 간단하게 실제 수소의 경우에 적용하여 실험치와 거의 같은 계산 값을 얻었다. 놀라운 것은 학회가 끝나고 돌아가는 120 km의 기차여행 중에 몇 시간만에 계산을 마쳤다는 것이다. 베테는 과감히 상대론적 효과를 무시하고 비상대론적인 이론 내에서 계산을 하는 용기를 보였다. 그리고 바로 논문을 작성하여 6월 27일 투고하여 8월 15일에 Physical Review에 게재하였다.^[2] 불과 2페이지짜리 논문이었다. 만약 상대론적 양자장론을 제대로 다 사용하려고 했다면 이런 좋은 결과를 바로 얻지 못했을 것이다. 이전까지는 양자장론이 치명적 결함을 가지고 있다고 여기던 영향력있는 학자들, 예를 들어 보어나 오펜하이머 등도 양자전기역학이 자연을 실제로 기술하는 이론으로 받아들이기 시작했다. 이는 매우 전문화되어 있고 폭이 좁은 연구에 매진하고 있는 현대의 연구자들에게 시사하는 바가 크다.

베테가 어떻게 이런 좋은 결과를 얻을 수 있었는가는 다이슨(F. Dyson)의 글에서 찾을 수 있다.^[3] 베테는 1967년 노벨상을 태양에서의 핵융합 반응으로 받았으나 램 이동이 물리학의 근본을 다룬 더 중요한 업적이라 하더라도 손색이 없는 것이다. 왜냐하면 양자장론이야말로 현대물리학의 최전선에 있는 입자물리의 현상들을 설명하는 공통의 언어가 되어있기 때문이다. 1930년대 초에 QED는 전자와 높은 에너지의 광자가 상호작용하는 비탄성 충돌인 콤프턴 산란(Compton scattering)이나 전자가 가속하면서 광자를 방출하는 제동복사(bremsstrahlung) 등에 매우 성공적인 계산 결과를 가지고 있었다. QED에서 실제 물리현상을 최초로 계산한 결과는 1929년 클라인(Klein)과 니시나(Nishina)가 한 개의 전자로부터 산란한 광자의 미분 단면적(differential cross section)의 계산이다.^[4] 여기서 미분단

Fig. 3. Self energy of an electron.

면적이란 특정입체각으로 산란과정의 일어날 확률이다. 클라인-니시나 공식은 가시광선의 영역에서는 탄성충돌인 톰슨 산란 공식을 주고 X-선, 감마선의 높은 에너지의 광자와의 산란에서는 콤프턴 산란 공식을 준다. 전자가 다른 전하를 가진 입자, 예를 들어 원자핵, 주위에서 힘을 받아 운동 방향이 바뀌게 되면 광자를 방출하면서 운동에너지가 줄게 된다. 이런 과정에서 나오는 광자의 스펙트럼을 QED에서 최초로 계산한 것이 베테와 하이틀러(Heitler)였다.^[5] 이런 현상은 방사광가속기에서 X-선이 방출되는 것으로 응용되고 있다. 이렇듯 베테는 QED의 발전 초기에 이미 중요한 계산결과를 얻었고, 그 결과는 실제 물리현상과 직접 관련이 있는 것이었다. 그 후에 페르미에게 포스트닥으로 연구하면서 두 전자가 광자를 주고받으면서 상호작용하는 계산을 하였다.^[6] 그는 나아가 물리학 백과사전에 이와 같은 결과들을 정리하여 놓았다.^[7] (보다 자세한 내용은 2015년 5월호 물리학과 첨단기술에 QED 특집의 기고문들을 참고 바란다.^[8]) 27살 때의 일이다. 이후 1930년대 후반에는 이러한 물리현상에 대한 고차항 계산들이 성공적으로 이루어졌다. 그런데 QED 계산에서 심각한 문제가 발생했다. 전자가 광자를 방출했다 다시 흡수하게 되는 가상입자(virtual particle)들이 있는 프로세스에서는 무한대의 계산결과가 나왔던 것이다. 예를 들어 전자가 불확정성 원리가 허용하는 한도 안에서 광자를 방출했다가 다시 흡수하게 되면 전자의 자체 에너지가 바뀌게 된다. 예를 들어 수소핵(양성자) 주위를 도는 전자의 에

REFERENCES

- [2] H. A. Bethe, Phys. Rev. **72**, 339 (1947).
- [3] F. Dyson, Phys. Today **58**, 10, 48 (2005).
- [4] O. Klein and Y. Nishina, Zeitschrift für Physik **52**, 853 (1929).
- [5] H. Bethe and W. Heitler, Proc. of the Royal Soc. of London. Series A **146**, 83 (1934).
- [6] H. A. Bethe and E. Fermi, Zeitschrift für Physik **77**, 296 (1932).
- [7] H. Bethe, Handbuch der Physik **24**, 273 (1933).
- [8] Chaiho Rim et al., Phys. High Technol. **24**(5), 2-29 (2015).

너지도 이와 같은 가상입자들의 프로세스의 효과를 포함해서 QED의 섭동이론의 규칙에 의해 계산하면 무한대가 나오는 것이다. 이 때문에 QED는 치명적인 결함을 가지고 있는 이론이 아닌가, 근본적으로 새로운 이론을 다시 만들어야 하는 것 아닌가 하는 의심을 받기 시작했다.

그럼 왜 이런 무한대가 나오는지 간단히 이해해 보자. 광자를 방출했다 같은 광자를 다시 흡수하는 경우 광자의 운동량은 임의의 값을 가질 수 있다. 따라서 모든 가능한 운동량을 가지고 있는 과정의 확률 진폭을 다 합산해야 하고 이런 과정에서 무한대가 나온다. 이런 문제는 1940년대를 통해서 물리학자들을 괴롭혔다. 이 문제를 오랫동안 고민하던 사람이 크래머스였던 것이다.^[9] 그는 '재규격화'의 아이디어를 거의 혼자서 오랫동안 연구했다. 자유로운 전자가 광자를 방출하고 다시 흡수하는 과정에서 전자의 자체에너지는 바뀐다. 이를 계산하면 무한대가 된다. 이런 전자의 자체에너지를 직접 잴 수는 없다. 산란 등의 물리 프로세스에서 실제 측정하는 물리량은 앞서 나온 상호작용시의 무한대의 계산치에서 전자의 자체에너지의 무한대를 빼야 하고 이 두 무한대의 차이가 실제 실험에서 측정되는 양일 것이라 추정했다. 무한대에서 무한대를 빼서 유한한 물리량을 계산하는 방식을 '재규격화'라 한다. 그런데 크래머스는 실제의 수소원자의 상황에서 계산을 할 수 없었다. 이러한 아이디어를 실제 수소에 적용해서 실험치와 맞는 값을 최초로 계산한 사람이 바로 베테다. 베테의 계산은 비교적 간단하지만 수식을 포함하고 있어 이 글에서는 자세히 적지 않는다. 다만, 위키피디아에 나와있는 계산을 참고하기 바란다.^[10] 베테의 계산 이후 슈윙거, 파인만, 도모나가 그리고 다이슨들이 양자장론의 재규격화를 완성하였고 언급된 4명 중 앞의 3명이 노벨상을 1965년 받았다. 슈윙거와 도모나가의 계산방식은 양자장론을 연구하는 사람들은 이제는 사용하지 않고 있고, 파인만의 도표에 의한 계산 방식이 주로 사용되고 있다.

베테 안자츠

베테의 이름이 붙은 베테 안자츠는 램 이동 계산보다 훨씬 먼저 되었다.^[11] 그리고 베테의 논문 중에 가장 인용이 많이 된 일이다. 그럼에도 불구하고 베테의 여러 업적 중에 비교적 덜 알려져 있으며 대학원에 가서 고급 이론물리과목을 들으면 처음 접하게 되는 내용이다. 베테가 이 문제를 생각하고 푸는 과정이 재미있다. 쉰머펠트(Sommerfeld) 지도 아래 1928년 박사학위를 받았다. 당시 수많은 훌륭한 제자들을 배출한 쉰머펠트는 물리에서의 엄격함을 강조한 전형적 독일 학자였다. 제자 중 하이젠베르크, 파울리, 드바이(Debye), 베테는 노벨상을 수상하였다. 그 스스로도 노벨상에 27번 추천되었다. 그 외에도

$$\hat{H} = -J \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} - h \sum_{j=1}^N \sigma_j$$

Fig. 4. Hamiltonian of Heisenberg Model.

수많은 훌륭한 제자들을 배출한 것이다. 록펠러재단의 여비지원 사업으로 지원을 받아 캠브리지 대학에 가서 포스트닥 연구를 하였다. 그 후에 로마대학의 페르미에게 갔다. 로마에 먼저 가지 않은 것을 나중에 후회할 정도로 페르미는 그에게 깊은 인상을 남겼다. 특히 반짝이는 아이디어를 간결하게 사용하여 물리현상을 꿰뚫는 능력을 가진 페르미의 영향을 받은 베테는 엄밀성과 간결성을 동시에 가지고 있는 물리문제를 풀었던 것이다. 페르미는 베테보다 5살 많았다. 페르미와 학생들 간의 자유스럽고 격식없는 분위기가 쉰머펠트의 끝장을 보는 엄격성과는 많이 달랐던 것이다. 페르미는 우편봉투 뒤에 적을 정도의 간단한 계산방식, 물리를 즐겁게 다룰 수 있는 어려운 퍼즐과 같이 여기는 당대의 최고 학자였다. 베테는 양자역학으로 고체들의 물리현상을 설명하기 위해서 매우 간단한 모형을 고려했다. 안자츠(ansatz)는 물리나 수학문제를 푸는 방식으로 이전에 알려진 방법을 따라하는 것이 아닌 새로운 가설을 세워 문제를 간단히 풀어버리는 방식을 일컫는다. 고체물리는 수많은 원자들로 이루어진 물질의 성질을 다룬다. 이를 정확히 푸는 것은 어렵다. 그러나 충분히 간단히 만든 모형을 고려한다면 정확한 계산도 가능하게 된다는 것을 베테가 보인 것이다. 베테 안자츠의 75주년을 기념하여 배첼러(Batcheler)가 쓴 글을 참고하기 바란다.^[12]

그가 푼 모형은 하이젠베르크 모형이다. 고체의 자기적 성질을 고려하기 위해 원자 하나하나가 가지고 있는 자성이 어떻게 집단적으로 상호작용하여 상전이 등의 물성을 나타내는가 살피기 위해 하이젠베르크는 1차원적 직선 위에 등간격으로 배열하고 있는 스핀을 고려했다. 제일 간단하게는 스핀 up과 down의 두 상태만 가지고 있는 스핀사슬로 주기적 경계조건을 주면 제일 처음 있는 스핀과 제일 끝에 있는 스핀이 상호작용하는 것과 동일해진다. 스핀은 바로 옆의 스핀에만 영향을 주고 서로 같은 방향을 하고 있을 때 에너지가 낮은 경우를

REFERENCES

- [9] M. Dresden, "Renormalization in Historical Perspective? The First Stage", in *Renormalization From Lorentz to Landau*, L. M. Brown (ed.) (Springer, 1993).
- [10] https://en.wikipedia.org/wiki/Lamb_shift.
- [11] H. Bethe, *Zeitschrift für Physik* **71**, 205 (1931).
- [12] M. T. Batchelor, *Physics Today* **60**, 1, 36 (2007).

생각했다. 즉 원모양으로 되어있는 스핀사슬이 된다. 이 모형을 ‘푼다’는 것은 이 스핀계의 모든 에너지 준위를 정확하게 계산해내는 것이다. 즉 이 계의 해밀토니언(hamiltonian)의 모든 고유치(eigenvalue)를 정확하게 계산하는 것이다. 가장 낮은 에너지 상태는 모든 스핀이 같은 방향으로 되어있을 때라는 것은 쉽게 알 수 있다. 모든 스핀이 up으로 되어있는 상태가 가장 에너지 낮은 ‘진공’ 상태로 볼 수 있고 스핀 하나의 down 스핀을 quasi-particle로 여기면 된다. 전체 각 운동량이 보존이 됨으로 down 스핀의 개수가 같은 것끼리 블록(block)을 이루고 있는 형태의 해밀토니언이 된다는 것을 조금 더 생각해 보면 된다. 이제 하나의 quasi-particle이 있는 상태는 마치 1차원 원 위에 있는 자유로운 입자와 같고 이 경우의 파동함수는 학부 양자역학을 배운 사람이라면 바로 적을 수 있다. 스핀 간의 거리가 1이고 전체 L개의 스핀이 있다고 하자. 그러면 가능한 경우의 수는 2^L 이 된다.

원의 원주가 L일 경우 x의 위치에 down 스핀이 있는 경우 평면파인 $\exp(2\pi x/L)$ 이 된다. 2개 이상이 있는 경우는 quasi particle 간에 상호작용이 있어 더 복잡해지나, 베테는 이러한 파동함수도 평면파들의 중첩이 된다고 가정하고(즉 안자츠를 세우고) 일반적인 경우에 이 중첩의 계수들이 만족하는 대수방정식을 얻었다. 대수방정식은 미분방정식보다는 훨씬 풀기가 쉽다. 베테는 이 방정식의 고유치가 2^L 이 되는 것을 보였고, 따라서 모든 가능한 에너지 고유치를 다 계산한 것을 보인 것이다. 스핀이 서로 엇갈려 배열하고 있는 경우(anti-ferromagnetic spin chain)는 1938년 훌텐(Hulthen)이 풀었다. 이후에 리브(Lieb)와 리니거(Liniger)는 델타함수의 퍼텐셜을 가지고 있는 입자들이 1차원적으로 배열하고 있는 경우의 베테안자츠를 풀었다.

베테는 많은 입자가 있는 다체계의 문제를 두 입자가 어떻게 상호작용하는가로 나눠서 생각할 수 있음을 보인 것이다. 이렇게 문제를 간단히 하는 방식은 소위 말하는 정확히 풀리는 ‘가적계(integrable system)’가 풀리는 문제가 될 수 있는가를 보여주고 있다. (정확히 풀리는 물리계에 대한 내용은 다음에서 참고하기 바란다.^[13]) 정확히 풀리는 양자역학계에 대한 큰 발전은 양(C. N. Yang)이 상호작용하는 페르미온들이 있는 가적계에서 작용자들이 소위 말하는 양-박스터(Yang-Baxter)

Fig. 5. Diagrammatic representation of Yang-Baxter Equation.

방정식을 만족함을 유도한 후에 왔다. 양-박스터 방정식은 산란하는 입자들의 산란행렬이 만족하는 방정식으로서 물리학에 서만이 아니고 수학에서도 새로운 분야의 장을 열었다. 양자군(quantum group) 등의 대수학과 조합론(combinatorics)에 크나큰 영향을 끼쳤다. 또 끈이론과 초대칭 양자장론의 연관성을 다루는 대응성에서도 양-박스터 방정식은 매우 중요하게 다뤄졌다. 베테안자츠는 이론적인 영역을 넘어서 중요한 물리실험과도 상관이 있다. 강한상관관계가 있는 응집물리계에서 중요한 모형인 허버드(Hubbard) 모형의 해라든지 극저온에서 광학 트랩에 가두어진 여러 개의 루비듐 원자들이 있는 문제 등에도 적용되어 풀기 어려운 문제에서의 직관을 제공해 주었다.

맺으며

베테는 이론물리학에서 문제를 단순화하여 그 핵심을 꼭 집어서 잘 풀어내던 물리학자였다. 그런 물리적 핵심을 잘 집어 내었을 경우 그 파급효과는 오랫동안 지속되는 예를 보여주었다. 수학적으로 복잡한 것을 열심히 푼다고 되는 것이 아닌 맥을 잘 잡는 문제를 발견하는 것이 중요하다는 것을 보여준 이론 물리학계의 대선배였던 것이다.

REFERENCES

- [13] Soonkeon Nam *et al.*, *Exactly Solvable Quantum Systems* (Seoul, Min-Eum Sa, 1998).