여러 세계/마음 해석과 ‘서울해석’

DOI: 10.3938/PhiT.21.016

김재영

Many Worlds/minds Interpretation and the ‘Seoul Interpretation’

Zae-young GHIM

The *Many Worlds Interpretation* of quantum mechanics was followed by various versions of the *Many Minds Interpretation*. I review the main issues concerning these interpretations and compare them with the point of view of the so-called *Seoul Interpretation* for the general audience. Concentrating on the measurement problem, I discuss the major philosophical problems with these interpretations with a view toward new insights into presumable alternative interpretations of quantum mechanics.

글머리에

에버렛 3세(H. Everett III)가 1957년에 발표한 ‘상대 상태 정식화’는 지도교수였던 윌러(J. A. Wheeler)의 평가와 더불어 양자역학 해석의 문제를 해결한 것으로 여겨지기도 했으나, 이를 ‘여러 세계 해석’으로 재해석한 드윗(B. S. DeWitt)과 그레이엄(R. N. Graham)의 접근이 더 인기를 끌면서, 원

래 에버렛 3세의 의도가 다르게 받아들여지게 되었다. 1980년대에 에버렛 3세의 접근은 ‘여러 마음 해석’이라는 이름 아래 새롭게 조명되었다.

1986년부터 장희익은 물리이론 특히 동역학이론의 구조에 주목하면서 메타이론적 고찰을 토대로 양자역학에 대한 대안적 해석을 제시했다.^[1] 이 새로운 해석에서는 양자역학이 형식이론의 관점에서 볼 때, ‘동역학적 특성’으로 정의된 대상을 인식주체의 영역과 무관하게 서술하는 이론이며, 메타이론적으로 대상에 대한 ‘상태’의 서술과 그로부터 관측자가 얻을 수 있는 ‘사건’의 서술 사이에 명확한 규칙을 제시하는 동역학 체계라는 점을 강조한다. 대상이론으로서의 양자역학 자체와 이에 대한 메타이론으로서의 해석규칙을 엄격하게 구별함으로써, 이 해석은 실질적으로 양자역학의 해석에 대한 대부분의 문제들을 해결해 가고 있다. 이를 잠정적으로 ‘서울 해석’이라 부르기로 하자.

‘여러 마음 해석들’은 양자역학에서 의식 또는 관찰자의 영역을 중시 여기며, 여러 세계 해석에서 두드러지는 존재론적 부담에서 벗어날 수 있는 틀을 준다는 점에서 ‘서울해석’의 관점과 만날 수 있는 여지가 많을 것으로 보인다. 이 글에서는 여러 세계 해석과 여러 마음 해석의 성과와 한계를 검토하고, 이것이 ‘서울해석’ 및 (기존 또는 미래의) 대안적 해석들의 관점과 어떻게 연결되는지, 그리고 어떤 차이가 있는지 살펴보고자 한다.

저자약력

김재영 교수는 서울대학교 물리학과에서 물리학이론 전공으로 이학박사학위를 받은 후, 독일 Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte (MPIWG) 연구원, 서울대 기초교육원 강의교수, 이화여대 HK 연구교수를 거쳐 현재 KAIST 부설 한국과학영재학교에 재직 중이다. 저서로 『뉴턴과 아인슈타인』(공저), 『영화로 과학 읽기』(공저), 『과학윤리특강』(공저) 등이 있고, 역서로 『에너지, 힘, 물질: 19세기의 물리학』(공역), 『물리학 강의: 일반상대성이론』, 『인간의 인간적 활용: 사이버네틱스와 사회』(공역) 등이 있다.
(zyghim@kaist.ac.kr)

REFERENCES

- [1] Hwe Ik Zhang, Saemulli **26**, 81 (1986); Hwe Ik Zhang, Saemulli **29**, 243 (1989); *Science and Meta-Science: Structure and Meaning of Natural Science* (Jisiksaneopsa, 1990); “Quantum mechanics and the problem of reality: From the interpretation of Bell’s inequalities”, Gwahaksasang, Summer (1994); Joongwon Lee, “Realistic interpretation of quantum theory: Debate and New Approach”, *Science and Philosophy*, **6** (1995); Zae-young Ghim, Saemulli **40**, 288 (2000); Zae-young Ghim, *Phys. High Tech.* **10**(1/2), 8 (2001).

Fig. 1. Measurement process according to the *Seoul Interpretation*.

양자역학에서의 측정의 문제

양자역학의 측정의 문제는 다음과 같이 표준화할 수 있다.

양자역학에서 상태는 힐버트 공간의 벡터로 표현되며, 이는 곧 두 상태의 중첩(겹침)도 적절한 상태가 된다는 점을 수학적으로 나타낸 것이다. 가령 대상계 S의 상태가

$$|\psi\rangle = c_1|\phi_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle$$

와 같이 두 상태의 중첩으로 표현된다고 하자. 여기에서 $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$ 은 물리량 A의 고유벡터이며, 그에 대응하는 고유값은 각각 a_1, a_2 라고 하자.

양자역학의 기본가설에 따르면, 물리량 A를 측정하면 가능한 값은 그 고유값이며, 특정 고유값이 나오게 될 확률은 전개 계수의 절대값 제곱과 같다. 즉

$$p_1 = \Pr(a_1|\psi) = |c_1|^2, \quad p_2 = \Pr(a_2|\psi) = |c_2|^2$$

그런데 측정을 통해 가령 $[A]' = a_2$ 의 결과를 얻고 난 뒤에 아무런 다른 작용을 가하지 않고 대상과 측정장치를 내버려 둔다면, 다시 물리량 A를 측정할 때 그 값은 확률 1로 a_2 가 될 것이다. 따라서 중간에 어떤 일이 일어나는지 알 수 없지만, 측정을 통해 $[A]' = a_2$ 라는 결과를 얻었다면, 대상계의 상태는 $|\phi_2\rangle$ 가 되어야 한다. 디랙은 이것에 대해 측정을 통해 대상계의 상태가 새로운 고유상태로 도약한다고 표현했고, 폰 노이만은 이를 상태 변화에 대한 또 다른 (즉 슈뢰딩거 방정식에 따른 변화와 별개로 가정해야 하는) 규칙 내지 가설로 상정했다.

‘서울해석’은 최소주의의 관점에서 이러한 상태의 규정은 단순히 대상에 대한 양자역학적 서술을 하고 있는 서술자가 새로운 동역학 서술을 위해 처음 상태를 규정(할당, 준비)하는 것일 뿐임을 강조한다. 이는 측정의 본원적 역할이 물리적 상호작용이 아니라 오히려 서술자가 서술대상에 대해 이러저러한 정보를 얻는 인식적 과정임을 명시적으로 보여준다는 점

에서 아무리 강조해도 지나치지 않을 주장이다.

그러나 ‘서울해석’에 대한 비판자들은 그렇게 동역학의 외부에서 처음 상태를 규정하는 것만으로는 부족하다고 여긴다. 그들은 왜 하필 측정 후의 상태를 그렇게 규정해야 하는지, 그리고 그 규정의 과정을 상보성 원리라든가, 불확정성 원리라든가, 결폴립(decoherence) 등으로 설명하면 안 될 이유가 무엇인지 묻는다. 이 질문에 답하지 않는 한, ‘서울해석’의 주장은 공허하거나 적어도 소극적인 뿐이라는 것이다. ‘서울해석’이 대안해석으로 자리매김을 하려면 적극적으로 관측된 측정값으로부터 어떻게 새로운 상태를 규정하는지, 왜 고유값에 대응하는 고유벡터를 새로운 상태로 규정해야 하는지 명료하게 보여야 한다는 것이다. 이 비판에 대응하기 위해서는 구체적인 규약적 절차를 보이든가, 아니면 그런 절차가 필요하지 않다는 것을 논증할 필요가 있다.

이제 측정의 표준적인 상황을 측정 장치의 상태를 포함하여 살펴보자. 대상계 S와 측정 장치 M이 측정의 상호작용을 하면, 중첩(준비) 상태 $|\eta_0\rangle$ 에 있던 측정 장치는 대상계의 중첩 상태와 얽히게 된다. 즉

$$U(|\phi_1\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = |\phi_1\rangle \otimes |\eta_1\rangle$$

$$U(|\phi_2\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = |\phi_2\rangle \otimes |\eta_2\rangle$$

힐버트 공간의 벡터는 선형이므로,

$$U(|\psi\rangle \otimes |\eta_0\rangle) = c_1|\phi_1\rangle \otimes |\eta_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle \otimes |\eta_2\rangle =: |\psi'\rangle$$

가 된다. 이 순수상태를 밀도행렬(상태연산자)로 나타낸 뒤, 측정 장치의 눈금만을 보기 위해 대상계의 상태에 대해 부분자국합(partial trace)을 취하면

$$\rho^M \equiv \text{Tr}_\phi |\psi'\rangle \langle \psi'| = |c_1|^2 |\eta_1\rangle \langle \eta_1| + |c_2|^2 |\eta_2\rangle \langle \eta_2| = p_1 P_1 + p_2 P_2$$

$$p_1 = |c_1|^2, \quad p_2 = |c_2|^2, \quad P_1 = |\eta_1\rangle \langle \eta_1|, \quad P_2 = |\eta_2\rangle \langle \eta_2|$$

즉, 측정의 상호작용이 있는 뒤 측정 장치의 눈금은 가능한 측정값들에 대한 혼합 상태로 나타낼 수 있다. 만일 혼합 상태에 대해 무지 해석을 적용할 수 있다면, 이 수식은 측정 장치의 눈금이 가능한 두 값 중 하나에 있지만, 다만 관찰자가 그에 대한 충분한 정보를 갖고 있지 않기 때문에 그 값이 확률 p_1, p_2 로 주어진다고 말할 수 있다. 따라서 측정의 문제는 곧 상태에 대한 (양자역학적) 확률분포로부터 측정값에 대한 (고전적) 확률분포를 얻는 것에 해당하며, 측정 장치의 눈금은 중첩 상태에 있지 않고 특정 고유상태에 있지만 단지 관찰자가 그것을 모르기 때문에 확률적 서술이 있다는 것이 된다. 주사위를 던지든, 분자의 열운동을 보든, (고전적) 확률은 양자역학에서 새로 제기될 문제가 아니기 때문에, 측정의 문제

는 (고전적) 확률에 대한 해석의 문제로 환원될 것이다.

그러나 더 꼼꼼히 생각해 보면, 이러한 주장은 소위 ‘혼합 상태’에 대한 오해에서 비롯된 것이다. 만일 계의 상태연산자 (밀도행렬)를

$$\rho = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \cdots + w_n P_n$$

$$(w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1, 0 \leq w_i \leq 1)$$

와 같이 사영연산자들의 볼록 결합으로 쓸 수 있다면, 실제로 대상은 특정의 순수상태에 있지만, 단지 서술자가 그 중 어느 상태인지를 모르는 것이고, 그 무지(또는 지식의 결합)의 정도가 바로 w_i 라는 확률로 나타난다. 문제는 일반적으로 상태연산자를 전개하는 기저에 따라 무수히 많은 볼록 결합이 가능하다는 점이다.

$$\rho = w_1 P_1 + w_2 P_2 + \cdots + w_n P_n$$

$$= w_1' P_1' + w_2' P_2' + \cdots + w_n' P_n' = \cdots$$

만일 w_i 라는 확률이 인식적 확률이라면 대상은 관찰자의 지식과 무관하게 이미 그러해야 한다. 그러나 기저의 선택에 따라 선택지가 달라지기 때문에, 인식적 확률 개념을 적용하는 것은 근본적으로 어려운 일이다. 기저의 선택을 측정에서 보려고 하는 물리량의 ‘창’을 선택하는 것과 같다고 함으로써 이러한 난점을 넘어서 수 있다는 주장도 있지만, 그다지 그럴 법해 보이지 않는다.

게다가 부분 자국합을 취하기 전의 상태 $|\psi\rangle$ 은 틀림없이 순수상태이므로, 부분 자국합을 통해 혼합 상태를 얻는다는 것은 납득하기 어려운 작위적 과정이다. 다시 말해서 ‘가지고 있는 것’이 아니라 ‘필요한 것’을 수학적으로 그럴듯하게 포장한 것에 지나지 않는다는 비판이 가능하다.

측정의 문제는 측정의 상호작용을 통해 대상계의 중첩 상태가 측정 장치의 눈금에 대한 상태로 옮겨간다는 데 있지 않다. 측정의 문제는 대상계이든 측정 장치이든 결국 중첩 상태가 나중에는 중첩이 아닌 ‘고유상태’로 달라진다는 점을 어떻게 설명할 것인가에 있다. ‘서울해석’은 최소주의의 맥락에서 이 과정을 약속 또는 규약으로 여기고 있으며, 소극적인 의미에서 이 약속 또는 규약이 동역학 자체에서 유도되는 것이 아님을 강조한다. 그러나 결국 측정에 대한 동역학적 서술이 대상명제가 아니라 메타명제임을 주장하고자 한다면, 서술자 또는 서술주체의 위치를 양자역학의 동역학적 이론구조 안에 정확히 잡아주어야 한다. 다시 말해서

$$c_1|\phi_1\rangle \otimes |\eta_1\rangle + c_2|\phi_2\rangle \otimes |\eta_2\rangle \Rightarrow |\phi_1\rangle \otimes |\eta_1\rangle \text{ 또는 } |\phi_2\rangle \otimes |\eta_2\rangle$$

이라는 과정이 왜 물리적 과정이 아니라 서술자의 인식 과정인지 명료하게 보여주어야 한다.

이 글의 관심은 그러한 문제의식을 여러 세계 해석과 여러 마음 해석의 관계 속에서 해결해 갈 수 있을 것이라는 직관을 검토하는 것이다.

상대 상태 해석과 여러 세계 해석

1950년대 프린스턴을 중심으로 일반상대성이론이 크게 주목을 받았다. 특히 양자역학을 우주에 적용하려는 시도가 있었는데, 기존의 해석으로는 우주 전체를 대상으로 하는 양자역학이 무슨 의미인지 알 수 없었다.^[2]

에버렛 3세는 미국 가톨릭 대학교(Catholic University of America)에서 화학공학을 공부한 뒤 프린스턴 대학에서 수리물리학 전공을 시작했다. 폰노이만의 책과 봄의 양자역학 교과서를 공부하다가 측정의 과정이 일종의 마술처럼 불연속적이라는 것에 놀랐다. 당시에 기숙사에 함께 있던 미즈너(Charles Misner)와 보어의 조수였던 페테르손(Aage Peterson)과 논의하면서, 자신의 해결책을 찾아냈고, 이를 월러에게 얘기하자, 월러가 이를 발전시켜서 박사학위논문으로 완성해 보라고 권했고, 1957년 3월 “우주 파동함수의 이론”이란 제목의 학위논문이 제출되었다.^[3] 학위논문을 읽은 사람 중에는 보어, 그뢰네볼트, 슈테른, 로젠펠트가 있었다. 월러 자신은 에버렛 3세의 이론이 물리적 실재에 관한 전통적인 개념을 근본적으로 바꾸어야 함을 의미하지만, 이론 자체는 자기완결적임을 강조했다.^[4] 그러나 에버렛 3세의 제안은 10년 넘게 주목받지 못했다. 이를 다시 논의하기 시작한 것은 드윗과 체플힐(Chapel Hill) 학파이다.^[5] 드윗은 자신의 학생인 그레이엄에게 이 주제로 박사학위논문을 쓰도록 하기도 했다.^[6]

그런데 드윗과 그레이엄이 중심이 된 소위 ‘여러 세계 해석’은 여러 사람들의 관심을 끌긴 했지만, 에버렛 3세의 의도 자

REFERENCES

- [2] For more detailed historical aspects, see M. Jammer (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*, Wiley. §11.6. Many Worlds Theories.
- [3] H. Everett, III, “Theory of the Universal Wave Function”, Thesis submitted to Princeton University (1957a); H. Everett, III, *Reviews of Modern Physics* **29**, 463 (1957b).
- [4] A. J. Wheeler, *Reviews of Modern Physics* **29**, 463 (1957).
- [5] B. S. DeWitt, “The Everett-Wheeler interpretation of quantum mechanics” in *Battelle Rencontres 1967: Lectures in Mathematics and Physics*, C. DeWitt and J. A. Wheeler, eds. (1968). pp. 318-332. “The many-universe interpretation of quantum mechanics”, Lecture delivered at the Varenna International School of Physics “Enrico Fermi”, July (1970).
- [6] R. Neill Graham, “The Everett interpretation of quantum mechanics” Ph.D. thesis, University of North Carolina at Chapel Hill (1970).

체로부터는 멀어진 것으로 평가되기도 한다. 여기에서는 먼저 에버렛 3세의 논의를 다루고, 그 뒤에 이에 대한 ‘갈라지는 세계 관점’을 다루고자 한다.

S+M으로 이루어진 복합계의 일반적인 상태벡터는

$$\Psi = \sum_{i,j} a_{ij} \phi_i \otimes \eta_j \in \mathcal{H}^S \times \mathcal{H}^M$$

(단, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $\phi_i \in \mathcal{H}^S$, $\eta_j \in \mathcal{H}^M$)

로 주어진다. 부분계는 나머지 부분과 무관하게 확정된 상태를 가지지 않지만, 주어진 특정 상태에 대하여 ‘상대 상태’를 유일하게 정의할 수 있다. 즉 부분계 S의 상태 $\phi_i \in \mathcal{H}^S$ 에 대한 M의 ‘상대 상태’는 다음과 같이 정의된다.

$$\eta[\phi_i] = N_i \sum_j a_{ij} \eta_j \in \mathcal{H}^M$$

마찬가지로 부분계 M의 상태 $\eta_i \in \mathcal{H}^M$ 에 대한 S의 ‘상대 상태’는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi[\eta_k] = N_k \sum_j a_{jk} \phi_j \in \mathcal{H}^S$$

상대 상태의 흥미로운 점은 한 부분계의 상태가 조건부로 주어질 때 나머지 부분계 조건부 확률 분포를 유일하게 정의해 준다는 것이다. 가령 $\mathcal{H}^S \times \mathcal{H}^M$ 의 복합계에서 부분계 $\mathcal{H}^M$ 의 상태가 η_j 로 주어진다는 조건 아래, $\mathcal{H}^S$ 에서 작용하는 연산자(물리량)의 기댓값은

$$\text{EXP}[A\eta_j] = \frac{\sum_i |\langle \phi_i, \eta_j | \psi \rangle|^2 \langle \phi_i | A | \phi_i \rangle}{\sum_i |\langle \phi_i, \eta_j | \psi \rangle|^2}$$

과 같아서 측정 후 상태에 대한 뢰더스 규칙(Lüders' Rule)에 상응한다.^[7]

요컨대, 복합계의 어느 부분계의 단일한 상태는 존재하지 않는다. 부분계의 상태는 복합계의 나머지 부분과 무관한 상태를 갖지 않는다. 어떤 한 상태를 선택하면 그 상태에 대하여 상대 상태가 유일하게 정의된다.

에버렛 3세 자신은 다음과 같은 설명을 제시하고 있다. 모든 관찰 과정에는 관찰자를 나타내는 물리계가 단 하나 존재하지만, 관찰자의 상태는 유일하지 않다. 상호작용하는 부분계들에서 어느 한 부분계의 상태는 반드시 나머지 부분계들에 상대적으로만 정의되기 때문이다. 관찰자의 상태와 그에 대응하는 물리계의 상태가 중첩(겹침)으로 표현된다면, 관측할 때마다 즉 상호작용이 있을 때마다 관찰자 상태는 여러 다양한 상태들로 갈라진다. 갈라지는 각 가지는 측정의 다른 결과와 대상계 상태에 대해 대응하는 고유상태를 나타낸다. 각 측

정의 결과로 모든 가지가 중첩으로서 동시에 존재한다.

에버렛 3세의 상대 상태 정식화의 핵심은 계의 상태가 시간에 따라 변화하는 방식에 슈뢰딩거 방정식에 의한 유니타리 변화만을 인정하고, 투사가설처럼 불연속적인 변화를 인정하지 않으며, 측정 자체도 형식적인 틀 안에서 모두 설명하겠다는 것이다. 이를 더 분명하게 보기 위해서는 Albert & Loewer (1988)을 따르는 것이 편리하다. 폰노이만의 정식화에 따르면, 양자이론의 원리는 다음과 같다.

- (I) 모든 양자역학적 계의 상태는 상태함수 $\psi(t)$ 로 규정된다.
- (II) 계가 외떨어져 있다면, 계의 상태 변화는 슈뢰딩거 방정식을 따라 결정론적으로 주어진다.
- (III) 계에 대한 물리량들의 양립가능한 완비 집합이 주어질 때, 상태함수는 물리량의 고유상태의 합 또는 ‘중첩’으로 표현된다. 즉 고유값 a_i 에 대응하는 고유상태들을 φ_i 라 할 때, $\psi = \sum_i c_i \varphi_i$
- (IV) 물리량을 측정할 때 a_k 를 얻은 확률은 $|c_k|^2$ 이다.
- (V) 물리량의 측정으로 a_k 를 얻은 뒤 계의 상태는 순간적으로 고유상태 φ_k 로 오그라든다(투사된다).

Albert & Loewer (1988)에 따르면, 상대 상태 정식화의 핵심은 (V)를 부정하는 것이다. 그것만으로도 관측되는 대상계와 측정 장치의 구별이 불필요해진다. 그럼으로써 양자우주론과 같은 응용에서도 힘을 발휘할 수 있게 된다. 그러나 (V)의 부정이 갖는 의미에 대해 다시 해석해야 한다. 가장 표준적인 관점은 ‘갈라지는 세계 관점’(splitting worlds view, SWV)이다. 이는 ‘다세계’(multiworld)의 아이디어이기도 하며, 최근에는 초끈 이론의 평행우주(multiverse, parallel universe)와 관련하여 다시 주목을 받고 있다.

이는 측정의 순간마다 말 그대로 세계가 갈라져 여러 개의 세계가 생겨난다는 존재론적으로 상당히 부담스러운 관념을 필요로 한다. 논의를 일관되게 하기 위해 Lockwood (1996)을 인용하여 다음과 같은 상태를 생각하자.

$$c_1 |\uparrow_x\rangle \otimes |R\rangle \otimes |\Delta\rangle + c_2 |\downarrow_x\rangle \otimes |L\rangle \otimes |\nabla\rangle$$

대상계의 상태공간을 가장 단순하면서도 힐버트 공간의 모든 특징을 갖추고 있는 $\mathbb{C}^2$ 로 선택하면, 이해가 더 쉬워진다. 대상계의 상태공간과 측정 장치의 상태공간이 일대일 상사(isomorphic)이어야 할 필요는 없지만, 편의상 그렇다고 가정

REFERENCES

- [7] G. Lüders, Annalen der Physik **8**, 322 (1951).

Fig. 2. Object, measuring apparatus and observer: example of the Schrödinger's cat.

하자. 맨 앞의 벡터는 대상계의 상태(가령 전자의 스핀)이고, 두 번째 벡터는 측정 장치의 상태(가령 계기판 눈금이 R 또는 L을 가리킴)이고, 맨 끝의 벡터는 관찰자의 마음 상태(스핀 上 또는 下)이다. 이는 그림 2와 같은 상황을 힐버트 공간을 이용하여 서술한 것이다. 가령 전자의 x 방향 스핀이 up 이라거나 슈뢰딩거의 고양이가 들어 있는 상자 안에서 우라늄이 붕괴하는 상태에 있다면, 그에 맞물려 있는 측정 장치의 눈금도 거기에 맞춰질 것이고, 이를 본 관찰자는 전자의 상태에 대한 믿음을 갖게 될 것이다.

실제 측정의 과정에서는 상태의 변화가 다음과 같을 것이다.

$$\begin{aligned}
 & (c_1|\uparrow_x\rangle + c_2|\downarrow_x\rangle) \otimes |C\rangle \otimes |O\rangle \\
 & \Rightarrow (c_1|\uparrow_x\rangle \otimes |R\rangle + c_2|\downarrow_x\rangle \otimes |L\rangle) \otimes |O\rangle \\
 & \Rightarrow c_1|\uparrow_x\rangle \otimes |R\rangle \otimes |\Delta\rangle + c_2|\downarrow_x\rangle \otimes |L\rangle \otimes |\nabla\rangle
 \end{aligned}$$

[전자와 측정 장치의 상호작용]

[전자-측정 장치와 관찰자의 상호작용]

여기에서 $|C\rangle$ 는 측정 장치의 눈금이 중립(Center) 위치에 있는 상태이고, $|R\rangle$ 과 $|L\rangle$ 은 그 눈금이 각각 오른쪽(Right), 왼쪽(Left) 위치에 있는 상태이다. $|O\rangle$ 는 관찰자의 마음의 상태가 전자의 스핀에 대해 판단하고 있지 않은 상태이며, $|\Delta\rangle$ 와 $|\nabla\rangle$ 는 관찰자가 전자의 스핀이 上 또는 下라고 믿는 마음의 상태이다.

문제는 직관적으로 볼 때 관찰자의 마음 상태에는 중첩이 있을 수 없다는 점이다. 마지막 단계에서 두 항 중 하나만이 살아남을 터인데, 이를 어떻게 설명할 것인가 하는 것이 측정의 문제이다. SWV는 세계(우주) 자체가 두 가지로 갈라진다는 근본적인 주장이다. 측정 이전의 관찰자의 마음 상태는 중첩으로 되어 있다가 어떤 순간에 갑자기 두 세계가 생겨나고 이에 따라 두 관찰자가 생겨난다는 것이다. 이는 그림 3의 도식으로 잘 표현된다.

SWV에서 볼 때, 측정이라고 부르는 상호작용이 특별할 이유는 없기 때문에, 모든 상호작용의 순간에 쉼 없이 세계가 갈라지고 있는 셈이다.

그림 4는 이러한 한 상황을 그림으로 보여준다. 이 갈라진 세계들 사이에는 아무런 인과적 연결도 상호작용도 없기 때

Fig. 3. Mental state before and after the measuring split.

Fig. 4. Schrödinger's cat from the Splitting Worlds View. (Source: Wikipedia).

문에 말 그대로 서로 아무 관련이 없다. 이와 같은 존재론적 부담을 차지한다면, 적어도 측정의 문제에 대해서는 적절한 답을 제시했다고 할 수 있다.

그러나 잘 알려져 있듯이, SWV는 심각한 논리적 허점을 지닌다. 무엇보다도 측정 또는 일반적인 상호작용의 순간마다 세계가 눈덩이처럼 불어나기 때문에 에너지 보존이나 질량 보존에 근본적으로 상충한다. 물론 에너지 보존 법칙이나 질량 보존 법칙은 각 세계(우주) 안에서만 성립하는 것이라고 해 버리면 이 비판을 벗어날 수는 있지만, 직관적으로는 받아들이기가 힘든 주장임에 틀림없다.

둘째, SWV에서는 모든 시간적 변화가 결정론적이기 때문에 확률이 개입할 여지가 전혀 없다. 새로운 역학을 만드는 것이 아니라 양자역학의 새로운 해석을 모색하는 것이기 때문에, 결국 보른의 규칙, 즉 (IV)의 의미를 분명히 해 주어야 한다. 확률이 등장하는 것은 가능세계들(의 개수)에 대한 실제 세계(의 개수)로 이해하는 것이 가능하지만, 그 상대빈도를 어떻게 결정할 수 있는지에 대해서는 아무 얘기도 할 수 없다. 게다가 그것이 마침 (IV)와 같이 보른의 규칙을 따라야 할 이유가 전혀 없기 때문에 이렇게 확률을 도입하는 정당성이 없게 된다.

셋째, 소위 '선회되는 기저'의 문제가 있다. 위의 예에서는 마침 대상계의 상태가 $c_1|\uparrow_x\rangle + c_2|\downarrow_x\rangle$ 이었기 때문에 세계가 x 방향 스핀에 따라 두 가지로 갈라진 것이었다. 그러나 이제 대상계의 상태를 나타내기 위한 기저를 $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 대신 $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$ 로 선택한다면, 세계가 z 방향 스핀에 따라 두

Fig. 5. Splitting Worlds View (Source: <http://ls.poly.edu/~jbain/philqm/>).

Fig. 6. Single Mind View (Source: <http://ls.poly.edu/~jbain/philqm/>).

가지로 갈라지게 될 것이다. 이렇게 단순히 수식 상에서 기저를 바꾸는 것만으로 세계(즉 우주 전체)가 갈라지는 방식이 달라진다는 것은 도무지 납득하기 어려운 일이다.^[8]

여러 마음 해석

Albert & Loewer (1988)가 제시하는 여러 마음 해석은 이러한 여러 세계 해석의 난점을 극복하려는 시도이다. 여기에는 ‘단일 마음 관점’(single mind view, SMV)과 ‘여러 마음 관점’(many minds view, MMV)의 두 가지 판본이 있다.

먼저 주목할 점은 관찰자의 마음에서는 직관적으로 중첩이 없다는 것이다. 즉 측정 장치의 계기관 눈금을 보든지 아니면 여하간의 방법으로부터, 최종적으로 관찰자는 대상계의 스핀이 ↑인지 ↓인지 둘 중 하나로 판단한다. 정확하게 말하면, 대상계의 스핀에 대해 말하고 있긴 하지만, 사실은 관찰자의 마음 상태가 △인지 아니면 ▽인지의 양자택일이 된다. 그런데 이 두 선택지 중 어느 쪽인지는 몰라도 만일 관찰자에게

“둘 중 하나인가?”라고 묻는다면, 그 대답은 틀림없이 “그렇다.”가 될 것이다. 이 내적 성찰을 받아들인다면, 대상계와 측정 장치 등 물리적인 계가 결정론적으로 변화한다는 여러 세계 해석의 기본 가정과 관찰자의 마음 상태 사이에 충돌이 일어난다.

‘단일 마음 관점’(SMV)에서는 이 문제를 해결하기 위해, 물리적 세계가 양자역학을 따라 움직인다는 점을 그대로 받아들이되, 관찰자의 마음 상태는 그와 다르다고 가정한다. 관찰자의 마음 상태는 양자역학을 따르지 않기 때문에 결정론적으로 변화할 필요가 없으며 그 자체로 확률적으로 변화한다. 대신에 물리적 계와 측정 장치 등의 상태에 대해 관찰자의 마음 상태가 어떻게 중첩이 아닌 상태로 변화할 것인가 하는 것이 (IV)의 보른 규칙이다. 다시 말해서 관찰자의 마음 상태가 $|\Delta\rangle$ 가 될 확률은 $|c_1|^2$ 이고, 마음 상태가 $|\nabla\rangle$ 가 될 확률은 $|c_2|^2$ 이다.

그림 6에서 이를 구체적으로 살펴볼 수 있다. 처음에 $t=0$ 일 때 뇌의 상태는 준비의 상태에 있다가, $t=1$ 일 때 첫 번째 전자의 스핀(색깔)을 보고, $t=2$ 에서 두 번째 전자의 스핀(색깔)을 본다. ‘갈라지는 세계 관점’에서와 달리, 마음의 상태는 점선과 같이 불연속적으로 변화할 수 있다. 그러면서도 $t=1$ 에서의 마음과 $t=2$ 에서의 마음은 아무 연결이 없기 때문에 뭔가 잘못되어 있다는 느낌은 없다.

SMV의 심각한 문제점은 매우 극단적으로 여겨질 수도 있는 이원론 또는 비물리주의에 있다. 관찰자의 뇌는 틀림없이 물리학적 법칙에서 벗어나지 않을 터이므로, 뇌의 상태는 대상계 및 측정 장치의 상태와 직접 연결된다고 해야 한다. 대상계의 상태가 중첩으로 되어 있다면, 대상계-측정 장치 상호 작용에 의하여 측정 장치의 상태도 중첩이 될 것이며, 다시 측정 장치-뇌 상호 작용에 의하여 뇌의 상태도 중첩이 될 것이다. 심리철학의 맥락에서 볼 때, 마음 상태가 가령 뇌의 상태 또는 관찰자의 신경계 상태로 환원되지는 않더라도 그 위에 수반(suervene)해야 한다고 말하고 싶지만, SMV에 따르면 뇌 상태와 마음 상태는 실질적으로 독립적이므로, SMV는 수반조차 인정하지 않는 과격한 이원론을 택해야만 한다. 이 우주까지도 모두 양자역학에 따르는 계라고 말할 수 있지만, 마

REFERENCES

- [8] L. E. Ballentine, Foundations of Physics 3, 229 (1973).

Fig. 7. Many Minds View (Source: <http://ls.poly.edu/~jbain/philqm/>).

음만은 양자역학을 결코 따르지 않는 것이다.

이를 극복할 수 있는 방법은 단 하나의 마음이 아니라 무수히 많은 마음을 상정하는 것이다. 각각의 마음 상태는 각 뇌 상태 위에 수반할 수 있지만, 그러한 마음이 무수히 많다고 하면, 그 중 어떤 것은 $|\Delta\rangle$ 가 되고, 어떤 것은 $|\nabla\rangle$ 가 될 수 있다. 결국 그 마음들에 대한 확률이 바로 (IV)의 보른 규칙이 된다는 것이다.

‘여러 마음 관점’(MMV)은 여러 세계 해석에 대한 해석으로서, 세계가 갈라진다는 존재론적 부담을 전혀 갖지 않고서도 투사 가설이나 파동함수의 오그라들고 같은 이해하기 어려운 가정을 도입할 필요가 없다. 개별적인 마음은 결정론적이지 않을지 모르지만, 이 마음들 전체는 양자역학이 지배하는 물리적 세계의 상태에서부터 일의적으로 결정된다. 그런 점에서 전체 마음은 결정론적이라고 할 수 있다. 그러면서도 직관적으로 나의 마음 상태에 중첩 상태가 있을 수 없다는 생각을 유지할 수 있게 해 준다.

그림 7에서는 여러 마음을 인정하기 때문에, 그림 5에서 볼 수 있는 것처럼 마음이 없는 좀비와 같은 존재(mindless hulk)를 만날 일은 없다. 마음의 상태는 SMV에서와 마찬가지로 불연속적으로 확률적으로 변화하지만, 모든 마음의 상태가 어떤 것이든 뇌의 상태와 연결되어 있다.

MMV에서는 SWV에서처럼 기저를 어떻게 택하는가에 따라 세계 전체가 다르게 갈라지는 일은 없다. 어떤 기저를 택하든 대상계의 상태는 단 하나로 유지되며, 다만 그에 대한 여러 다른 마음 상태들이 존재할 따름인 것이다. MMV에서는 확률이 무수히 많은 마음들 중에서 특정한 마음 상태를 선택하는 확률이며, 이것이 마침 보른 규칙을 따른다는 것은 자연스러운 일이 된다. 보른 규칙을 따르지 않아도 괜찮지만, 그런 경우에는 양자역학을 이용하여 대상계에 대해 성공적인 서술을 할 가능성이 현저하게 줄어들기 때문에 실질적으로 무시할

수 있다.

‘여러 마음 해석’은 Albert & Loewer에 국한되는 것이 아니다. Zeh (1970, 1973, 1981)가 제안한 ‘다중의식(multi-consciousness) 해석’이 가장 초기에 속한다. Squires (1987)의 ‘여러 관점 이론’(many-views theory), Page (1995, 2011)의 ‘여러 지각(many-perceptions) 해석’ 등이 모두 ‘여러 마음 해석들’에 포함된다.^[9] 또한 Donald (1990)처럼 수학적 및 물리학적으로 세련된 논의가 있고, Lockwood (1989, 1996)의 종합적인 접근이 있다.^[10] 특히 1996년 Brit. J. Phil. Sci. 47에 특집으로 실린 심포지엄 “Many Minds’

Interpretations of Quantum Mechanics”에는

M. Lockwood의 발제 논문에 이어 H. R. Brown, J. Butterfield, D. Deutsch, B. Loewer, D. Papineau, S. Saunders가 논평 논문을 내고 다시 Lockwood가 이 논평에 대해 대답하는 형식으로 여러 마음 해석들을 깊이 있게 논의하고 있다.^[11]

여러 세계/마음 해석의 문제점

여러 세계 해석과 여러 마음 해석이 갖는 문제점에 대해서는 폭넓게 논의가 되어 왔다. 그 중 특히 주목할 만한 것은 Butterfield (1995)이다.^[12]

버터필드는 측정의 문제를 양자동역학(슈뢰딩거)과 거시 영역의 확정성(definiteness of macrorealm) 사이의 충돌을 해

REFERENCES

- [9] H. D. Zeh, Foundations of Physics **1**, 69 (1970); H. D. Zeh, Foundations of Physics **3**, 109 (1973); H. D. Zeh, “The problem of conscious observation in quantum mechanical description”, Epistemological Letters 63.0 (1981); E. J. Squires, European Journal of Physics **8**, 171 (1987); D. N. Page, “Sensible quantum mechanics: Are only perceptions probabilistic?” arXiv:quant-ph/9506010 (1995); D. N. Page, “Consciousness and the Quantum”, arXiv:1102.5339v1 [quant-ph] (2011).
- [10] M. J. Donald, Proceedings of the Royal Society of London, A **427**, 49 (1990); M. Lockwood, *Mind, Brain and the Quantum: The Compound ‘I’* (Blackwell, 1989).
- [11] M. Lockwood, British Journal for the Philosophy of Science **47**, 159 (1996); H. R. Brown, *ibid.* **47**, 189 (1996); J. Butterfield, *ibid.* **47**, 200 (1996); D. Deutsch, *ibid.* **47**, 222 (1996); B. Loewer, *ibid.* **47**, 229 (1996); D. Papineau, *ibid.* **47**, 233 (1996); S. Saunders, *ibid.* **47**, 241 (1996); M. Lockwood, *ibid.* **47**, 445 (1996).
- [12] J. Butterfield, Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes **69**, 113 (1995).

결하는 문제로 정리한 뒤, 이를 위한 노력을 크게 세 부류로 나눈다. 첫째 부류(Dynamics)는 동역학 법칙을 수정하려는 것으로서 슈뢰딩거 시간변화 외에 다른 요소를 도입하는 것이다. 여기에는 GRW(Ghirardi, Rimini, Weber)와 같이 슈뢰딩거 방정식을 수정하는 방안, 중력으로의 환원과 연결시키려는 펜로즈(Roger Penrose)의 방안, 의식이 상태의 투사를 일으킨다는 위그너나 스탭(E. P. Stapp)의 방안이 포함된다.

둘째 부류(Physical Values)는 새로운 물리적 값을 할당함으로써 거시 영역의 확정성을 보장하려는 것이다. 여기에는 '값 상태' 또는 '현재 상황'(State of Art)을 도입하는 앙상 해석, 드브로이-봄의 존재론적 해석, 코펜하겐 해석이 포함된다. 이와 같이 물리적 값을 추가함으로써 측정 문제를 해결하기 위해서 충족시켜야 하는 요건이 있다. 먼저, 폰노이만, 글리슨, 코헨-슈페커, 벨 등이 증명한 '숨은 변수 없음'의 정리들과 충돌하지 않아야 한다. 이 정리들은 일종의 금지 정리(no-go theorem)로서 추가적인 숨은 변수가 있는 이론에 대한 제한조건인 셈이다. 또한, 어떤 식으로든 보른 규칙과 모순을 일으키면 안 된다. 그러면서도 이 '물리적 값'은 거시 영역의 확정성을 보장해 주어야 한다.

셋째 부류(Mental Values)는 슈뢰딩거 시간변화만을 유지하되, 거시 영역의 불명확성(indefiniteness)을 용인하는 것으로서, 이를 위해 관점 또는 정신적 측면을 확장하는 것이다. 여기에는 여러 세계 해석과 여러 마음 해석이 포함된다.

버터필드의 생각을 따른다면, 여러 세계/마음 해석에서 거시 영역이나 마음이 언제나 확정된 상태(값)를 갖는다고 믿는 것은 일종의 착각이다. 표준적 견해에서는 측정 장치이든 관찰자의 마음이든, 측정의 최종 단계에서는 중첩 상태가 아니라 어느 한 눈금 또는 그 눈금에 대한 마음으로 확정된 상태가 된다고 말하지만, 이 주장은 더 상세한 보충이 필요하다.

우주 전체의 상태함수를 $\Psi = \sum_{\text{branches}} \psi$ 또는 $\Psi = \sum_{\text{worlds}} \psi$ 와 같이 쓸 때, 각 '세계'(world) 또는 '가지'(branch)에서는 거시 영역이 확정된 상태에 있다는 것이 여러 세계/마음 해석의 핵심이다. 그 '세계' 또는 '가지'의 의미를 이해하는 것이 관건이다.

흔히 여러 세계 해석의 '세계'를 라이프니츠 등이 논의한 '가능 세계'와 같은 것으로 잘못 이해하는데, 라이프니츠의 '가능 세계'는 논리적으로 가능한 모든 세계들을 지칭하는 것이며 그 중에서 현실의 세계는 단 하나뿐이다. 그러나 여러 세계 해석의 '세계'는 모두 현실의 세계이며, 양자역학을 따르지 않는 논리적으로 가능한 세계는 원천적으로 배제된다.¹⁾

1) 여러 세계 해석의 '세계'가 이미 우주와 같다는 의미에서 '세계' 대신 '우주'(universe)를 쓰고, 그 대신 그 전체를 가리키는 말로 '겹우주'(multiverse)를 쓰기도 한다. 어느 경우든 '가지', '세계', '우주'는 모두 현실 세계이며 논리적으로 가능한 세계가 아니다.

따라서 모든 '가지'가 현실(actual) 세계이다.

한편, 이 '가지'라는 은유가 오해를 불러일으킨다. 그림 2나 그림 4와 같이 가지가 갈라지는 그림을 그려서 이 가지를 각각의 '세계'라고 부르는 것은 단지 도식일 뿐이다. 이 도식은 모든 가지가 현실적이라는 점을 간과하게 만든다. 가지가 갈라지는 점에서 연속성이 깨지는 것처럼 보이는 것도 순전히 도식의 한계이다. 여러 세계 해석에서 각 '가지'로 갈라지는 것이 순전히 슈뢰딩거 시간변화만을 따르는 결정론적 변화라는 점에서 이렇게 '갈라지는' 도식은 부적합하며 오해를 불러일으킨다. 또한, 가지의 '갈라짐'은 마치 측정의 순간에 마치 '투사' 또는 '상태함수의 오그라들'이 일어나는 것인 양 설명되 기조차 하는데, 여러 세계 해석에서 '투사'는 원천적으로 금지된다.

각각의 '세계' 또는 '가지'가 모두 현실 세계라고 할 때, 이 '세계들' 또는 '가지들'은 모두 서로 대등하다. 이 중 어느 하나가 다른 하나보다 근본적인 역할을 하지 않는다. 가령 앙상 해석에서의 값 상태나 드브로이-봄 해석에서의 입자 위치처럼 더 특별한 역할을 하는 것이 없다.

'가지'의 은유가 오해를 낳는 가장 심각한 부분은 시간과 관련된 것이다. 그림 4에서 세로축은 시간으로 설정되었다. 여기에서 '가지' 또는 '세계'의 지속성(persistence) 문제가 발생한다. 여러 세계/마음 해석에서 갈라짐 이전과 이후에 '가지'의 동일성은 어떻게 보장되는가?

'가지'의 은유가 너무나 강력해서 '갈라짐' 이전의 '가지'와 이후의 '가지'가 동일하다고 암묵적으로 생각하기 쉽지만, 그 어디에서도 '가지들'의 시간적 동일성을 보장하지 않는다. 관속론에서는, 대상에 시간적 요소가 있어서 어제 존재하는 것과 내일 존재하는 것이 다를 수 있음을 인정하되, 그 부분들에서 겹치는 것이 있다고 보기 때문에, 대상의 지속성이 보장된다. 그러나 여러 세계/마음 해석에서는 '가지들' 사이에 겹치는 부분이 필연적으로 없다. '가지'와 '가지'가 갈라지는 부분이 측정 순간의 투사가 아니기 때문에 언제 어떻게 '가지'가 갈라지는지 알 수 없을 뿐 아니라, 갈라짐 이전과 이후의 겹침은 전혀 없다.

여러 세계 해석에서의 '세계'에 대한 다음의 논의는 여러 마음 해석에서도 그대로 적용된다. 여러 마음 해석에서는 '세계'라는 말 대신 '가지'로 국한시키면 된다. 각각의 '가지'에서 거시 영역의 확정된 상태에 있다는 여러 세계 해석의 주장은 여러 마음 해석에서 각각의 '가지'에서 마음의 확정된 상태가 있다는 주장으로 바뀐다.

여러 세계 해석에서보다도 여러 마음 해석에서 확률의 정의는 심각한 어려움을 만난다. 우선 무한히 많은 마음 상태들에 대해서 어떻게 확률공간과 확률측도를 정의할 수 있는지

알기 어렵다. 에버렛 3세는 기억들에 대한 확률측도를 정의하려 시도했지만, 성공적이지 못했다. 드윌은 소위 'EWG 메타정리'를 증명했다고 주장한다.^[13] 그 내용은 “양자이론의 수학적 형식화로부터 그 자체의 해석을 도출할 수 있다.”^[14]는 것이다. 구체적으로는 양자역학의 형식이론으로부터 보통의 확률 해석이 유도된다는 것인데, 실제로 'EWG 메타정리'의 증명을 찾아보기 힘들다. 게다가 여기에서 말하는 확률이 콜모고로프 공리를 따르는지 아니면 양립가능하지 않은 물리량이 개입해 있는 경우 곱사건의 확률이 정의되지 않는 양자확률과 같은 것인지도 불명확하다. 더욱 문제가 되는 것은 이 확률이 양자역학과 관련된 오랜 시험 속에서 줄곧 입증되어 온 보른의 규칙과 왜 일치하는지를 설명하는 일이다.

여러 세계/마음 해석과 '서울해석'

앞에서 버터필드가 측정의 문제에 대한 해결책을 세 부류로 나눈 것을 언급했는데, '서울해석'은 어디에 속할까? '서울해석'은 상태변화의 법칙으로서 슈뢰딩거 방정식과 그에 준하는 것만을 인정하기 때문에 명백하게 (Dynamics) 부류에는 속하지 않는다. 얼핏 보면 위그너의 접근처럼 의식의 능동적 역할을 강조하는 것으로 생각할 수 있지만, '서울해석'에서는 측정 과정에서 측정자 또는 관찰자의 역할을 소극적이고 수동적인 것으로 국한시키고 있다는 점에서 위그너 해석과는 다르다. 그렇다고 양상해석이나 드브로이-봄 해석처럼 물리적 값을 도입하는 것도 아니기 때문에 (Physical Values) 부류에도 속하지 않는다. '서울해석'은 중첩 상태에 있는 대상계와 달리 측정 장치나 관찰자가 확정성을 갖는 상태에 있음을 보장하기 위해 추가적인 물리적 값을 상정하지 않는다.

그렇다면, '서울해석'이 여러 세계 해석 및 여러 마음 해석

과 마찬가지로 (Mental Values) 부류에 속하는 것으로 볼 수 있을까? 여러 세계/마음 해석에서는 외떨어진 계에 대한 슈뢰딩거 시간변화만을 인정하기 때문에, 양상해석의 '값 상태'나 드브로이-봄 해석의 '입자의 위치'와 같은 추가적인 상태 서술이 없다. 이 점은 '서울해석'도 공유한다. 그러나 '서울해석'은 여러 세계 해석과 같은 과감한 존재론적 주장으로 나아가갈 필요를 느끼지 않는다. 그 가장 큰 힘은 다름 아니라 물리학적 대상서술이 적용되는 계로서의 서술대상과 동역학 서술을 전개하고 활용하는 서술주체를 구별하는 데 있다.

'서울해석'은 드윌이 말하는 소위 'EWG 메타정리'와 정확히 반대되는 입장에 서 있다. 즉 서술대상에 대한 대상서술만으로는 서술주체가 대상으로부터 정보를 얻는 메타서술을 얻을 수 없다는 점을 출발점으로 삼고 있다. 그렇다면, 서술주체와 서술대상을 구별해야 한다는 것은 곧 물질과 마음을 구별하는 이원론적 태도 또는 입장과 연결될까?

'서울해석'이 '상태서술'과 '사건서술'을 구별함으로써 측정 문제의 핵심을 정확히 보았다는 것은 분명히 인정받아야 할 공로이다. 그러나 그것만으로는 '상태서술'과 '사건서술'을 구별해야 하는 이유가 명료해지는 것은 아니다.

여러 세계 해석과 여러 마음 해석은 양자역학에 대한 새로운 대안적 해석에 어떤 도움을 줄 수 있을까? 이들 해석과 '서울해석'은 어떤 관계일까?

REFERENCES

- [13] B. S. DeWitt, "Quantum mechanics and reality", *Physics Today* **23**(9) (1970), Reprinted in B. S. DeWitt and N. Graham eds., *The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, 1973), pp. 155-165.
- [14] *ibid.*, p. 160.