В. И. Прокопьев, П. Э. Стурник

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРОГИБА БАЛКИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Метод конечных разностей (МКР) один из самых простых и широко распространенных приближенных расчетных методов. Погрешность численного решения зависит от числа разбиений в расчетной схеме. Исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли при действии статической нагрузки.

Ключевые слова: пластичность, сложное нагружение, постулат изотропии, экспериментальные данные, траектория деформирования, векторные и скалярные свойства материала.

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.009

УДК: 517;539.3

Введение. Метод конечных разностей (МКР) один из самых простых и широко распространенных приближенных расчетных методов, используемых в механике сплошных сред [1–3]. Одним из недостатков метода является отсутствие точной оценки погрешности численного решения при расчете элементов строительных конструкций. Погрешность численного решения зависит от числа разбиений в расчетной схеме. Исследуется влияние числа разбиений на погрешность численного решения на примере краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки Бернулли при действии статической нагрузки.

Основная часть. Определение прогиба балки Бернулли сводится, к решению следующей краевой задачи:

$$y^{(4)}(x) + \beta y(x) = F(x), \quad 0 < x < L. \quad (1)$$

Условия на концах балки приняты для следующих трех вариантов:

© Прокопьев В. И., Стурник П. Э., 2021

Прокопьев Валерий Иванович

e-mail: vprokoriev@mail.ru, кандидат технических наук, профессор НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Стурник Павел Эдуардович

e-mail: vprokoriev@mail.ru, студент НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 01.11.2021

1. шарнирное опирание концов

$$\begin{cases} y(0) = y''(0) = 0 \\ y(L) = y''(L) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2. жесткое защемление концов

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(L) = y'(L) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Здесь y – прогиб балки; x – координата сечения по ее длине; L – длина балки; $\beta = \frac{\tilde{k}}{EJ}$, $\tilde{k} = k \cdot b_b$, $EJ = E \cdot J$, $J = b_b h_b^3 / 12$, h_b и b_b – высота и ширина поперечного сечения, соответственно, E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения балки, k – коэффициент, характеризующий отпор грунта в рамках модели Винклера.

В качестве модельного примера рассмотрим балку без упругого основания со следующими параметрами: $F(x) = \frac{P}{EJ} \delta(x - \frac{L}{2})$, $P = 100$ кН – нагрузка, заданная в средней точке (см. рис. 1.); $L = 8$ м, $h_b = 1.3$ м, $b_b = 1$ м; $E = 2560 \cdot 10^4$ кН/м²; $k = 0$.

Рис. 1. Нагрузка, приложенная к балке.

Конечноразностное разбиение по длине балки на равные части с шагом h показано на рис. 2.

Рис. 2. Дискретная аппроксимация балки.

Обозначим n – общее количество точек, тогда $h = L/(n - 1)$. Координаты точек разбиения: $x_i = h(i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Значения прогиба в точках разбиения: $y_i = y(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Разностные аналоги производных равны:

$$y'(x_i) \approx \begin{cases} (y_{i+1} - y_i)/h, & i = 1 \\ (y_{i+1} - y_{i-1})/(2h), & 1 < i < n \\ (y_i - y_{i-1})/h, & i = n \end{cases} \quad (4)$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad 1 < i < n \quad (5)$$

$$y'''(x_i) = \begin{cases} (y''(x_{i+1}) - y''(x_i))/h, & i = 1 \\ (y''(x_{i+1}) - y''(x_{i-1}))/2h, & 1 < i < n \\ (y''(x_i) - y''(x_{i-1}))/h, & i = n \end{cases} \quad (6)$$

$$y^{(4)}(x_i) \approx \frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) \quad (7)$$

Из уравнения (8) следует, что для представления разностного аналога уравнения (1) потребуется пять точек. При $3 \leq i \leq n - 2$ разностный аналог уравнения (1) имеет вид

$$\frac{1}{h^4}(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}) + \beta y_i = F_h(x_i). \quad (8)$$

Для представления разностных уравнений в точках $i = 1, i = 2$, а также в граничных точках $i = n - 1, i = n$ воспользуемся краевыми условиями для вариантов (2) – (4):

вариант 1

$$\begin{cases} y_1 = y''(x_1) = 0 \\ y_n = y''(x_n) = 0 \end{cases}$$

вариант 2

$$\begin{cases} y_1 = y'(x_1) = 0 \\ y_n = y'(x_n) = 0 \end{cases}$$

Используя их разностные аналоги получим системы линейных алгебраических уравнений для этих вариантов:

вариант 1

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 &= 0 \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + \beta_h)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i, \quad i = 3, 4, \dots, n - 2; \\ y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} &= f_{n-1} \\ y_n &= f_n, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \beta_h = h^4\beta, f_i = \begin{cases} 0, & i = 1 \\ h^4F_h(x_i), & 2 \leq i \leq n - 1 \\ 0, & i = n \end{cases}, F_h(x_i) = F(x_i)/h.$$

вариант 2

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ -y_1 + y_2 &= f_2 \\ y_{i-2} - 4y_{i-1} + (6 + \beta_h)y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} &= f_i, \quad i = 3, 4, \dots, n - 2; \\ -y_{n-1} + y_n &= f_{n-1} \\ y_n &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

Решения систем линейных алгебраических уравнений для каждого варианта краевых условий выполнялись для значений $n = 2, 4, 16, 100, 1000, 10000$ по программе, составленной на языке программирования MATLAB. Расчеты выполнялись на 32 разрядном персональном компьютере.

Анализ результатов расчета. Было проведено сравнение максимальных прогибов из решения методом конечных разностей краевой задачи для дифференциального уравнения прогиба балки (1) для двух вариантов краевых условий (2) – (3) с аналитическим решением.

Аналитическое решение имеет вид [4]

$$y(x) = C_1 e^{\frac{-\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_2 e^{\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \cos \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_3 e^{\frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + C_4 e^{\frac{-\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}}} \sin \frac{\sqrt[4]{\beta}x}{\sqrt{2}} + \frac{P}{EJ\beta}.$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 находятся из удовлетворения решения каждому из трех краевых условий.

Результаты сравнения приведены в таблицах, где число делений $N=n-1$.

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,0001373 м	0,0001196 м	12,89
4	0,0001373 м	0,0001317 м	4,08
16	0,0001373 м	0,0001367 м	0,437
100	0,0001373 м	0,0001373 м	0
1000	0,0001373 м	0,0001373 м	0
10000	0,0001373 м	0,0002289 м	66,715

Таблица 1. Вариант краевых условий - 1

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,00005052 м	0,00004038 м	20,07
4	0,00005052 м	0,00004726 м	6,45
16	0,00005052 м	0,00005022 м	0,594
100	0,00005052 м	0,00005052 м	0
1000	0,00005052 м	0,00005052 м	0
10000	0,00005052 м	0,00008419 м	66,647

Таблица 2. Вариант краевых условий - 2

При небольшом числе разбиений наличие ошибки связано с выбором грубой расчетной сетки механической модели. При очень большом числе разбиений ошибка становится большой из-за накопления погрешностей округления в процессе арифметических операций на компьютере, что свидетельствует о плохой обусловленности решаемой системы линейных алгебраических уравнений [5]. Для оценки обусловленности используется число обусловленности $C(A)$, которое называется степенью обусловленности матрицы коэффициентов при неизвестных в системе линейных алгебраических уравнений [6]. Условная классификация системы линейных алгебраических уравнений в зависимости от степени обусловленности имеет вид

- $C = 1 \div 10$ – хорошо обусловленная система;
- $C = 10 \div 10^3$ – удовлетворительно обусловленная система;
- $C = 10^3 \div 10^5$ – плохо обусловленная система;
- $C > 10^5$ – почти вырожденная система.

Для вычисления обусловленности матрицы используется её норма. Число обусловленности матрицы принимается равным произведению норм матрицы и её обратной. В Matlab для вычисления нормы матрицы A используется функция $\text{norm}(A)$, а для вычисления числа обусловленности матрицы A используется функция $\text{cond}(A)$.

В таблицах ниже приведены результаты вычислений соответствующих норм матриц и степени обусловленности.

N	Норма матрицы	Число обусловленности матрицы
2	-	-
4	12,157	22,6404
16	15,7	6338,5
100	15,9921	9814900
1000	15,9999	98187000000
10000	-	-

Таблица 3. Вариант краевых условий - 1

N	Аналитическое решение	МКР	Отличие прогибов в %
2	0,00005052 м	0,00004038 м	20,07
4	0,00005052 м	0,00004726 м	6,45
16	0,00005052 м	0,00005022 м	0,594
100	0,00005052 м	0,00005052 м	0
1000	0,00005052 м	0,00005052 м	0
10000	0,00005052 м	0,00008419 м	66,647

Таблица 4. Вариант краевых условий - 2

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [2] Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы: введение в теорию. Учебное пособие. М.: Наука, 1977. 440 с.
- [3] Дегтярев А. А. Метод конечных разностей (электронное учебное пособие). Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет им. С. П. Королёва, 2011. 83 с.
- [4] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. Под ред. д-ра техн. наук проф. И. А. Биргера и чл.-кор. Академии Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Издательство «Машиностроение». 1968. 832 стр.
- [5] Jurgen Dankert. Numerische methodn der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [6] Варапаев В. Н. Вычислительная математика. Учебное пособие. М.: Московский государственный строительный университет, 2009. 162 с.

V. I. Prokopiev, P. E. Sturnik

**EVALUATION OF THE ACCURACY OF SOLVING THE BOUNDARY VALUE
PROBLEM FOR THE DIFFERENTIAL EQUATION OF THE BEAM
DEFLECTION BY THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES**

Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia

Abstract. The finite difference method (MD) is one of the simplest and most widely used approximate calculation methods. The error of the numerical solution depends on the number of partitions in the calculation scheme. The influence of the number of partitions on the error of the numerical solution is investigated by the example of a boundary value problem for the differential equation of deflection of a Bernoulli beam under the action of a static load.

Keywords: finite difference method, error, boundary value problem, conditionality, system of linear algebraic equations, matrix.

REFERENCES

- [1] Samarskiy A. A. The theory of spaced circuits. 3rd ed. Moscow: Nauka, 1989. 616 p.
- [2] Godunov S. K., Ryaben'kii V. S. Difference Schemes: An Introduction to Theory. Tutorial. Moscow: Nauka, 1977. 440 p.
- [3] Degtyarev A. A. Finite Difference Method (electronic tutorial). Samara: Samara State Aerospace University named after S. P. Koroleva, 2011. 83 p.
- [4] Strength, stability, vibrations. Handbook in three volumes. Volume 1. Ed. Dr. tech. sciences prof. I. A. Birger and Corresponding Member. Academy of the Latvian SSR Ya. G. Panovko. M.: Publishing house "Mechanical engineering". 1968. 832 pp.
- [5] Jurgen Dankert. Numerische methodn der mechanic. VEB FACHBUCHVERLAG LEIPZIG, 1977. 318 p.
- [6] Varapaev V. N. Computational Mathematics. Tutorial. Moscow: Moscow State University of Civil Engineering, 2009. 162 p.

Prokopiev Valery Ivanovich, Professor, Candidate of Technical Sciences, Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia.

Sturnick Pavel Eduardovich, undergraduate student, Moscow State University of Civil Engineers, Moscow, Russia.