Ю. Н. Радаев, Е. В. Мурашкин, Т. К. Нестеров

ПСЕВДОТЕНЗОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НЕЙБЕРА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе рассматривается теория микрополярной упругости Нейбера в псевдотензорной формулировке. Приводятся минимально необходимые для понимания статьи сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Уравнения динамики микрополярного континуума представлены (наряду с абсолютной тензорной формой) в терминах псевдотензоров (относительных тензоров). Проведено сравнение динамических уравнений микрополярной теории упругости в псевдотензорной форме с абсолютной тензорной формой, предложенной Нейбером. То же самое сопоставление выполнено и для определяющих уравнений. Устранены недочеты в уравнениях динамики Нейбера и приведена их окончательная псевдотензорная форма.

Ключевые слова: микрополярность, упругость, континуум, микровращение, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, относительный тензор, уравнения динамики

DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.006

УДК: 539.374

1. Введение. Классические теории механики сплошной среды в большинстве случаев неприменимы для математического моделирования поведения современных материалов (например, упругих метаматериалов [1, 2] или биоматериалов [3]: таких

© Радаев Ю. Н., Мурашкин Е. В., Нестеров Т. К. 2021

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: radayev@ipmnet.ru, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: evmurashkin@google.com, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Нестеров Тимофей Константинович

e-mail: nesterovtim@gmail.com, аспирант, программист, лаб. моделирования в механике деформируемого твердого тела, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.03.2021

как пески, грунты и другие зернистые среды, идеально-пластические среды, демонстрирующие необратимое изменение объема в процессе деформации (например, сыпучая среда Кулона–Мора), волокнистые среды, сотовые структуры, армированные композитные материалы, кости, сосуды, мышцы и другие биологические ткани). В указанных материалах наблюдаются волны микровращений, связанные с волнами перемещений, из-за эффектов микроструктуры. Простейшая (и исторически первая) континуальная теория твердых тел с микроструктурой — микрополярная теория упругости. Важным примером твердого тела с микроструктурой является гемитропный микрополярный континуум. В подобных средах могут наблюдаться одновременно прямые и зеркальные моды распространяющихся волн, которые возможно описать только такими уравнениями, которые будут чувствительны к зеркальным отражениям и инверсиям трехмерного пространства.

Теория асимметричной упругости впервые была представлена Коссера (1909 г.) в работе [4]. Дальнейшее обобщение микрополярной теории на случай конечных деформаций было выполнено Трусделлом и Тупином [5]. В работе [6] Аэро и Кувшинским были получены линейные определяющие уравнения микрополярного континуума. Случай материальной анизотропии микрополярных сред был рассмотрен в исследованиях Миндлина (см., например, [7, 8]). Проблема концентрации напряжений в микрополярных упругих твердых телах исследована Нейбером в серии своих работ [9–11]. Обобщение микрополярной теории на гемитропный случай можно найти в работах [12, 13].

В общем случае микрополярной анизотропии упругий материал описывается 171 определяющей постоянной, что чрезвычайно усложняет анализ уравнений при решении прикладных задач. Полуизотропное (гемитропное) твердое тело описывается уже девятью определяющими константами, в ряду которых только три будут дополнять имеющиеся определяющие постоянные изотропной среды. Анализ литературных источников показывает, что в работах, посвященных микрополярной теории упругости, часто содержатся ошибки и опечатки в фундаментальных уравнениях (см., например, [10, 14]), что затрудняет их понимание и применение.

Отметим, что при построении математических моделей поведения микрополярных материалов необходимым является привлечение формализма и методов из алгебры и анализа относительных тензоров (псевдотензоров) [15–23], что позволяет глубже понять физическую и геометрическую природу рассматриваемых физических полей, поскольку ряд кинематических и динамических переменных в теории микрополярной упругости на самом деле являются псевдотензорными величинами. Однако, несмотря на очевидные преимущества применения подобной техники, она редко используется в механике сплошной среды. В работе [24] приводится актуальная псевдотензорная формулировка теории гемитропного микрополярного континуума в приложении к механике растущего твердого тела.

Вслед за *введением*, во *втором разделе* статьи затрагивается ряд фундаментальных определений из алгебры и анализа псевдотензоров, приведена формула, определяющая ковариантную производную произвольного относительного тензора веса W .

В *третьем разделе* выводятся уравнения динамики Нейбера в терминах псевдотензорного анализа. Веса относительных тензоров линейной изотропной микрополярной упругой среды рассчитаны и представлены в таблицах 1 и 2. Исправлены недочеты в уравнениях динамики Нейбера, предложенные в [10] для микрополярного изотропного упругого тела. Получена их окончательная форма в произвольной криволинейной

системе координат. Выполнено сравнение определяющих уравнений изотропной микрополярной теории упругости в абсолютной тензорной форме с их псевдотензорной формой.

2. Основные сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Символы перестановок и фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр являются фундаментальными объектами теории псевдотензорного анализа, изложение которой можно найти в учебных пособиях по многомерной геометрии и книгах по тензорному анализу [15–23].

Преобразование зеркального отражения системы координат (от левоориентированной к правоориентированной, или наоборот) может быть осуществлено путем перенумерации координатных осей, что позволяет ввести фундаментальный объект псевдотензорной алгебры и многомерной геометрии — символы перестановок Леви–Чивита [25]. Как известно, символы перестановок, определяемые согласно

$${}^{[-1]}_{\epsilon}{}_{ijk} = {}^{[+1]}_{\epsilon}{}_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{для троек } (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2); \\ -1 & \text{для троек } (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3); \\ 0 & \text{во всех остальных случаях;} \end{cases}$$

не являются абсолютными тензорами. Фактически, символы Леви–Чивита ${}^{[-1]}_{\epsilon}{}_{ijk}$ и ${}^{[+1]}_{\epsilon}{}_{ijk}$ — относительные ковариантные тензоры (псевдотензоры) веса -1 и одновременно относительные контравариантные тензоры веса $+1$. В дальнейшем позиция над корневым символом будет зарезервирована для веса (который дополнительно заключен в квадратные скобки) псевдотензора.

Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр (относительный скаляр веса $+1$) в трехмерном пространстве может быть определен с помощью смешанного произведения ковариантных базисных векторов:

$$e = {}^{[+1]}_e = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3, \quad (1)$$

а псевдоскаляр отрицательного веса -1 смешанным произведением контравариантных базисных векторов:

$$\frac{1}{e} = {}^{[-1]}_{e^{-1}} = (\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2) \cdot \mathbf{e}^3.$$

Отметим, что значение псевдоскаляра (1) равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{e}_s$. В физических теориях поля особую роль играют координатные системы, характеризующиеся условием $|e| = 1$.

С помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и символа перестановок может быть определен абсолютный тензор Леви–Чивита:

$$\begin{aligned} e^{ijk} &= \frac{1}{e} {}^{[+1]}_{\epsilon}{}_{ijk}, \\ e_{ijk} &= e {}^{[-1]}_{\epsilon}{}_{ijk}. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем будем опускать указание веса для основных псевдотензоров, таких как e , ϵ_{ijk} , ϵ^{ijk} , а также для относительных тензоров нулевого веса (абсолютных тензоров). Еще раз подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированной системы координат и $e < 0$ для левоориентированной системы координат.

Рассмотрим в трехмерном пространстве две системы координат x^k и $\bar{x}^k$ ($k = 1, 2, 3$). Закон преобразования псевдотензора веса W при переходе от системы координат x^k к новой системе координат $\bar{x}^k$ имеет вид [19, 21]:

$$\bar{T}^{[W]lm...n}_{...ij...k} = \Delta^W (\partial_p \bar{x}^l) (\partial_q \bar{x}^m) \cdots (\partial_s \bar{x}^n) (\bar{\partial}_i x^a) (\bar{\partial}_j x^b) \cdots (\bar{\partial}_k x^c) T^{[W]pq...s}_{...ab...c},$$

где

$$\Delta = \det(\bar{\partial}_j x^i), \quad \partial_p = \frac{\partial}{\partial x^p}, \quad \bar{\partial}_p = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^p}, \quad (3)$$

и черта сверху указывает на то, что геометрический объект ассоциирован с новой системой координат $\bar{x}^k$, Δ — якобиан преобразования.

Операция ковариантного дифференцирования произвольного относительного тензора $T^{[W]lm...n}_{...ij...k}$ выполняется по аналогии с соответствующей операцией для абсолютных тензоров¹ [15, 17, 19]:

$$\begin{aligned} \nabla_p [W] T^{lm...n}_{...ij...k} = & \partial_p [W] T^{lm...n}_{...ij...k} + \Gamma_{sp}^l [W] T^{sm...n}_{...ij...k} + \Gamma_{sp}^m [W] T^{ls...n}_{...ij...k} + \cdots + \Gamma_{sp}^n [W] T^{lm...s}_{...ij...k} - \\ & - \Gamma_{ip}^s [W] T^{lm...n}_{...sj...k} - \Gamma_{jp}^s [W] T^{lm...n}_{...is...k} - \cdots - \Gamma_{kp}^s [W] T^{lm...n}_{...ij...s} - W T^{lm...n}_{...ij...k} \Gamma_{sp}^s. \end{aligned} \quad (4)$$

3. Теория микрополярной упругости Нейбера и ее уточнения. Применение формализма псевдотензорного анализа к теории микрополярной упругости Нейбера позволяет несколько прояснить ее физический смысл. В противоположность уравнениям динамики:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{..}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda m^{\lambda\mu} + \varepsilon^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{..}^2 \omega^\mu, \end{aligned} \quad (5)$$

приведенным в работе [10], корректные уравнения в абсолютной тензорной форме есть:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{..}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda m^{\lambda\mu} + e^{\mu\lambda\eta} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{..}^2 \omega^\mu, \end{aligned} \quad (6)$$

а в терминах псевдотензоров их можно переформулировать в виде [24]:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda t^{\lambda\mu} &= \rho \partial_{..}^2 V^\mu, \\ \nabla_\lambda m^{[-1]\lambda\mu} + \frac{e^{\mu\lambda\eta}}{e^2} t_{\lambda\eta} &= \theta \partial_{..}^{[-2]} \omega^{[+1]\mu}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$m^{\lambda\mu} = e^{[+1][+1]} m^{\lambda\mu}, \quad \omega^\mu = \frac{1}{e^{[+1]}} \omega^{[+1]\mu}, \quad \theta = e^{[+2]2} \theta^{[-2]}.$$

Во втором из уравнений (5) в работе Нейбера [10] напечатан символ $\varepsilon^{\mu\lambda\eta}$ ("относительный антисимметричный тензор"). По смыслу здесь на самом деле должен находиться абсолютный тензор $e^{\mu\lambda\eta}$ (см. (2)). Для корректной балансировки весов в последнем уравнении (7), вопреки теории Нейбера, используется символ перестановок $\epsilon^{\mu\lambda\eta}$ с множителем e^{-2} . В таблице 1 установлены соответствия между обозначениями, используемыми Нейбером в работе [10], и обозначениями, применяемыми в работе [24].

¹Заметим, что $\Gamma_{sp}^s = \frac{\partial_p e}{e}$.

Таблица 1. Соответствие основных обозначений, принятых в [10] и [24]

Терминологическое обозначение	Обозначение применяемое в [24]	Обозначения Нейбера	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
Вектор перемещений	u^k	V^μ	0	
Асимметричный тензор деформаций	ϵ_{ij}	$d^{\lambda\mu}$	0	
Тензор силовых напряжений	σ^{ik}	$t^{\lambda\mu}$	0	
Плотность массы	ρ	ρ	0	
Тензор моментных напряжений	$\mu_{\cdot k}^i$	$m^{\lambda\mu}$	-1	$m^{\lambda\mu} = e \frac{[-1]}{m} \lambda^\mu$
Момент микроинерции	$\mathfrak{J}$	θ	-2	$\theta = e^2 \frac{[-2]}{\theta}$
Вектор микроповорота	ϕ^i	ω^μ	+1	$\omega^\mu = \frac{1}{e} \frac{[+1]}{\omega} \mu$
Тензор изгиба-кручения	$\kappa_{i\cdot}^s$	$k_{\lambda\mu}$	+1	$k_{\lambda\mu} = \frac{1}{e} \frac{[+1]}{k} \lambda_\mu$

Уравнения (7) в криволинейной системе координат с помощью определения ковариантной производной (4) можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda t^{\lambda\mu} + t^{\eta\mu} \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + t^{\lambda\eta} \Gamma_{\eta\lambda}^\mu &= \rho \partial_{\cdot\cdot}^2 V^\mu, \\ \partial_\lambda \frac{[-1]}{m} \lambda^\mu + \frac{[-1]}{m} \eta^\mu \Gamma_{\eta\lambda}^\lambda + \frac{[-1]}{m} \lambda^\eta \Gamma_{\eta\lambda}^\mu + \frac{[-1]}{m} \lambda^\mu \frac{\partial_\lambda e}{e} + \frac{\epsilon^{\mu\lambda\eta}}{e^2} t_{\lambda\eta} &= \frac{[-2]}{\theta} \partial_{\cdot\cdot}^2 \frac{[+1]}{\omega} \mu. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяющие уравнения линейной изотропной микрополярной теории упругости Нейбера в терминах относительных тензоров имеют форму:

$$\begin{aligned} t^{\lambda\mu} &= G[(1 + e^2 \frac{[-2]}{a}) \nabla^\lambda V^\mu + (1 - e^2 \frac{[-2]}{a}) \nabla^\mu V^\lambda + 2 \frac{[-2]}{a} \epsilon^{\mu\lambda\eta} \omega_\eta^{[+1]} + \\ &\quad + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{\lambda\mu} \nabla_\eta V^\eta], \\ \frac{[-1]}{m} \lambda^\mu &= 4G \frac{[-1]}{l} \frac{[-1]}{l} [\nabla^\lambda \omega_\lambda^{[+1]\mu} + b \nabla^\mu \omega_\lambda^{[+1]\lambda} + c g^{\lambda\mu} \nabla_\eta \omega_\lambda^{[+1]\eta}]. \end{aligned} \quad (9)$$

Приведем ниже для сравнения определяющие уравнения из оригинальной работы Нейбера [10]:

$$\begin{aligned} t^{\lambda\mu} &= G[(1 + a) \nabla^\lambda V^\mu + (1 - a) \nabla^\mu V^\lambda + 2a e^{\mu\lambda\eta} \omega_\eta + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1} g^{\lambda\mu} \nabla_\eta V^\eta], \\ m^{\lambda\mu} &= 4Gl^2 [\nabla^\lambda \omega^\mu + b \nabla^\mu \omega^\lambda + c g^{\lambda\mu} \nabla_\eta \omega^\eta]. \end{aligned}$$

Определяющие постоянные в приведенных выше определяющих уравнениях, являющиеся скалярами и псевдоскалярами, представлены в таблице 2. После подстановки

Таблица 2. Микрополярные изотропные определяющие псевдоскаляры

Терминологическое обозначение	Корневое символьное обозначение	Вес	Преобразование к абсолютному тензору
Модуль сдвига	G	0	
Коэффициент Пуассона	ν	0	
Характерная длина микрополярной теории	l	-1	$l = e^{[-1]} l$
Безразмерный микрополярный модуль (i)	a	-2	$a = e^{2[-2]} a$
Безразмерный микрополярный модуль (ii)	b	0	
Безразмерный микрополярный модуль (iii)	c	0	

определяющих уравнений (9) в уравнения (7) корректные уравнения динамики Нейбера в терминах относительных тензоров примут вид:

$$\begin{aligned}
& (1 + e^{2[-2]} a) \Delta V^\mu + ((1 - 2\nu)^{-1} - e^{2[-2]} a) \nabla^\mu \nabla_\lambda V^\lambda + \\
& \quad + 2^{[-2]} a \epsilon^{\mu\lambda\eta} \nabla_\lambda \omega_\eta^{[+1]} = \rho G^{-1} \partial_{..}^2 V^\mu, \\
& \left(\frac{[-2]}{a} - \frac{[-1][-1]}{l} \Delta \right) \omega^{[+1]\mu} - \frac{[-1][-1]}{l} (b + c) \nabla^\mu \nabla_\lambda \omega^{[+1]\lambda} - \\
& \quad - \frac{[-2]}{2} \epsilon^{\mu\eta\sigma} \nabla_\eta V_\sigma = - \frac{[-2]}{\theta} (4G)^{-1} \partial_{..}^2 \omega^{[+1]\mu}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в оригинальной статье Нейбера [9] множитель l^2 отсутствует во втором члене второго уравнения системы (10).

Выпишем также для сравнения уравнения динамики линейной микрополярной теории упругости в псевдотензорных обозначениях, введенных в работах [13, 24]:

$$\begin{aligned}
& (1 + e^{2[-2]} c_1) \nabla^s \nabla_s u^i + (1 - e^{2[-2]} c_1 + 2\nu(1 - 2\nu)^{-1}) \nabla^i \nabla_k u^k + \\
& \quad + 2^{[-2]} c_1 \epsilon^{ikl} \nabla_k \phi_l^{[+1]} = \rho G^{-1} \partial_{..}^2 u^i, \\
& \frac{[-1][-1]}{L} \left[(1 + e^{2[-2]} c_2) \nabla^s \nabla_s \phi_i^{[+1]} + (1 - e^{2[-2]} c_2 + 2c_3) \nabla_i \nabla_k \phi^{[+1]k} \right] - \\
& \quad - \frac{[-2]}{c_1} (2 \phi_i^{[+1]} - \epsilon_{ikl} g^{ks} \nabla_s u^l) = \frac{[-2]}{\mathfrak{I} G^{-1}} \partial_{..}^2 \phi_i^{[+1]}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Сопоставление уравнений (10) и (11) приводит к следующим соотношениям между определяющими постоянными:

$$\frac{[-1][-1]}{L} = 2 \frac{[-1][-1]}{l} (1+b), \quad \frac{[-2]}{c_1} = \frac{[-2]}{a}, \quad \frac{[+2]}{c_2} = \frac{1-b}{1+b}, \quad c_3 = \frac{c}{1+b}.$$

Веса определяющих скаляров и псевдоскаляров l, a, b, c приведены в таблице 2. Вес определяющего скаляра b в таблице 2 проверяется по формуле

$$b = \frac{e^2 - \frac{[+2]}{c_2}}{e^2 + \frac{[+2]}{c_2}}.$$

4. Заключение

- (i) Приведены и рассматриваются уравнения динамики Нейбера линейного микрополярного изотропного континуума в терминах псевдотензоров (относительных тензоров) в произвольной криволинейной системе координат. Устранены неточности и опечатки в исходных уравнениях Нейбера.
- (ii) Определяющие уравнения линейного изотропного микрополярного континуума представлены в псевдотензорной форме и сравниваются с их абсолютной тензорной формой.
- (iii) Веса относительных тензоров линейной микрополярной упругой среды и микрополярных изотропных определяющих псевдоскаляров рассчитаны и сведены для удобства в таблицы.
- (iv) Получена окончательная корректная форма динамических уравнений изотропного микрополярного континуума в терминах перемещений и микровращений в псевдотензорной форме.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer Verlag, 2017, xvii+259 pp. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>.
- [2] Чандрасекар С. *Жидкие кристаллы*. М.: Мир, 1980, 344 с.
- [3] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909, 126 pp.
- [5] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories //In: *Principles of classical mechanics and field theory*/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, 226–858 pp.
- [6] Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. Основные уравнения теории упругости сред с вращательным взаимодействием частиц. *ФТТ*, 1960, Т. 2, № 7, С. 1399–1409.
- [7] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1 pp. 415–448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>
- [8] Mindlin, R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1007/BF02327219>
- [9] Neuber, H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48–69 (1966). <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
- [10] Neuber, H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. *Applied Mechanics*, 1966, pp. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16
- [11] Neuber, H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua. *Mechanics of Generalized Continua*, 1968, pp. 109–113. https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13
- [12] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 2004, vol. 15. Berlin, Heidelberg, Springer, xv+345 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.

- [13] Радаев Ю. Н. Правило множителей в ковариантных формулировках микрополярных теорий механики континуума. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 22, № 3, С. 504–517.
- [14] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
- [15] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, 373–377 pp. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, vol. 25, no. 4, pp. 551–608. <https://doi.org/10.2307/1989307>.
- [17] Веблен О. *Инварианты дифференциальных квадратичных форм*. М: Гос. изд-во иностр. лит., 1948, 140 с.
- [18] Схоутен Я. А. *Тензорный анализ для физиков*. М.: Наука, 1965, 456 с.
- [19] Сокольников И. С. *Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред*. М.: Наука, 1971, 376 с.
- [20] Гуревич Г. Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.: Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948, 408 с.
- [21] Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
- [22] Розенфельд Б. А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966, 648 с.
- [23] Das A. *Tensors: The mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
- [24] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. О микрополярной 3D-теории растущих тел. *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2020. Т. 24, № 3, С. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
- [25] Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1927, 450 pp.

Yuri N. Radayev, Evgenii V. Murashkin, Timofei K. Nesterov

PSEUDOTENSOR FORMALISM FOR NEUBER'S MICROPOLAR ELASTICITY THEORY

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper deals with Neuber's theory of micropolar elasticity in a pseudotensor formulation. The minimum notes and requisite equations from algebra and analysis of pseudotensors are given. The micropolar dynamic equations are presented in terms of pseudotensors (relative tensors). The pseudotensor form of dynamic equations is compared with the absolute tensor form of the Neuber dynamic equations. The refinements of Neuber's dynamic equations are discussed.

Keywords: micropolarity, elasticity, continuum, microrotation, fundamental orienting pseudoscalar, relative tensor, dynamic equations

REFERENCES

- [1] Maugin G. A. *Non-classical continuum mechanics*. Advanced Structured Materials, vol. 51. Singapore, Springer Verlag, 2017, xvii+259 pp. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-2434-4>.
- [2] Chandrasekhar S. *Liquid Crystals*. Cambridge University Press, 1992, xvi+460.

Yuri N. Radayev, D.Sc. Phys. & Math. Sci., Ph.D., M.Sc., Professor; Leading Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Phys. & Math. Sci., Ph.D., M.D.; Senior Researcher; Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

Timofei K. Nesterov, M.Sc., Programmer, Lab. of Modeling in Solid Mechanics; Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS.

- [3] Goriely A. *The mathematics and mechanics of biological growth*. New York, Springer, 2017, xxii+646 pp.
- [4] Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris, A. Hermann et fils, 1909, 126 pp.
- [5] Truesdell C., Toupin R. The classical field theories //In: *Principles of classical mechanics and field theory*/Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Berlin, Heidelberg, Springer, 1960, 226–858 pp.
- [6] Aero E. L., Kuvshinskii E. V. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Soviet Physics-Solid State*, 1961, V. 2, № 7, C. 1272–1281.
- [7] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, no. 1 pp. 415–448. <https://doi.org/10.1007/BF00253946>
- [8] Mindlin, R.D. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Experimental Mechanics*, 1963, vol. 3, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1007/BF02327219>
- [9] Neuber, H. Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 48–69 (1966). <https://doi.org/10.1007/BF01176729>
- [10] Neuber, H. On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua. *Applied Mechanics*, 1966, pp. 153–158. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_16
- [11] Neuber, H. On the Effect of Stress Concentration in Cosserat Continua. *Mechanics of Generalized Continua*, 1968, pp. 109–113. https://doi.org/10.1007/978-3-662-30257-6_13
- [12] Dyszlewicz J. *Micropolar Theory of Elasticity*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 2004, vol. 15. Berlin, Heidelberg, Springer, xv+345 pp. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-45286-7>.
- [13] Radayev Yu. N. The Lagrange multipliers method in covariant formulations of micropolar continuum mechanics theories. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2018. V. 22, № 3, C. 504–517.
- [14] Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Oxford, Pergamon Press, 1986, viii+383 pp.
- [15] Veblen O., Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1924, vol. 26, no. 3, 373–377 pp. <https://doi.org/10.2307/1989146>.
- [16] Veblen O., Thomas T. Y. The geometry of paths, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1923, vol. 25, no. 4, pp. 551–608. <https://doi.org/10.2307/1989307>.
- [17] Veblen O. *Invariants of Quadratic Differential Forms*. Cambridge, Cambridge University, 1927, 102 p.
- [18] Schouten J. A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford, Clarendon Press, 1951, 434 p.
- [19] Sokolnikoff I. S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York, John Wiley & Sons Inc, 1971, 376 p.
- [20] Gurevich G. B. *Foundations of the theory of algebraic invariants*. Gröningen, Noordhoff, 1964, 408 p.
- [21] Synge J. L., Schild A. *Tensor Calculus*, vol. 5. New York, Courier Corporation, 1978, 334 pp.
- [22] Rosenfeld B. A. *Multidimensional Space*. Moscow, Nauka, 1966, 648 p.
- [23] Das A. *Tensors: The mathematics of Relativity Theory and Continuum Mechanics*. New York, Springer Science & Business Media, 2007, xii+290 pp. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-69469-6>.
- [24] Murashkin E. V., Radayev Yu. N. On a micropolar theory of growing solids. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.]*, 2020. V. 24, № 3, C. 424–444. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1792>
- [25] Levi-Civita T. *The Absolute Differential Calculus (Calculus of Tensors)*. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1927, 450 pp.