Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ОБ ОДНОМ ПСЕВДОТЕНЗОРНОМ ОБОБЩЕНИИ СВЯЗЫВАЮЩИХ ДВУСТОРОННИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ЮГОНИО-АДАМАРА

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В представляемой работе исследуются особенности связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в сплошных средах (в частности, в микрополярных континуумах). Теория Югонио–Адамара, существенно развитая Г. И. Быковцевым, распространения поверхностей разрывов физических полей обобщена на случай псевдотензорного полевого описания. Вводятся понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени. Исследуется геометрия поверхностей уровня псевдоскалярного поля, представляющих интерес для механики наращиваемых тел. Вводится понятие псевдонормали к поверхности. Обсуждаются вопросы дифференцирования по псевдоскалярному времени и его преобразования при зеркальных отражениях и инверсиях пространства. Получены геометрические и кинематические условия совместности первого порядка в терминах псевдотензоров. Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений в микрополярном континууме.

Ключевые слова: поверхность разрыва, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, псевдоскалярное время, условие совместности, микрополярная упругость, перемещение, микровращение

DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.013

УДК: 539.374

1. Введение. Моделирование поведения континуумов которые не инвариантны к зеркальным отражениям и инверсиям пространства (в частности, метаматериалы,

© Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. 2021

Мурашкин Евгений Валерьевич

e-mail: murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Радаев Юрий Николаевич

e-mail: y.radayev@gmail.com, radayev@ipmnet.ru, radaev.iurii.8e@kyoto-u.jp, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований проекты № 19-51-60001, № 20-01-00666.

Поступила 20.08.2021

биоматериалы и т.д.) требует привлечение аппарата алгебры псевдотензоров [1-3]. Динамические процессы (например многочисленные процессы аддитивный технологий [4] в таких средах связаны с распространением поверхностей уровня псевдоскалярных физических полей.

Постановка связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов физических полей является нетривиальной задачей механики континуума. Вопросам построение решений при учете разрывов в задачах вариационного исчисления посвящены работы [5,6]. Ренкиным и Юголио [7,8] были получены условия совместности на ударных волнах распространяющихся в газе. В монографии [9] содержится полное изложение теории геометрических и кинематических условий совместности первого и второго порядка, которые затем применяются для систематического изучения различных вопросов, связанных с распространением волн в сплошных средах. Для моделирования процессов распространения поверхностей разрывов в необратимо деформируемых средах Г. И. Быковцевым был развит лучевой метод решения динамических задач [10-12], основанный на специальном выборе “внутренней” параметризации поверхности разрыва (см. например дополнительные главы в монографиях [13, 14]). Во всех вышеуказанных публикациях [5-14] для описания динамических процессов использовались абсолютные тензоры.

Однако, корректное описание волновых процессов в континуумах, проявляющих гемитропные свойства требует привлечения псевдотензорного формализма [15-20]. Псевдотензоры естественным образом возникают в механике и термодинамике микрополярных упругих сред. В частности, таковыми выступают: естественных элемент объема, псевдовектор микровращений, псевдотензор моментных напряжений, сопутствующий псевдовектор силовых напряжений и т.д. Более того, в некоторых случаях, распространяющаяся в пространстве поверхность разрывов физических полей оказывается поверхностью уровня псевдоскалярного поля, что накладывает дополнительные ограничения на операторы дифференцирования и ориентацию псевдовектора нормали. Поэтому, при формулировке связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в микрополярной гемитропной среде необходимо использовать псевдотензорный формализм.

2. Фундаментальный ориентирующий скаляр в трехмерном плоском пространстве. В настоящем исследовании мы не будем подробно воспроизводить определение и свойства псевдотензоров. Изложение алгебры псевдотензоров с необходимой степенью полноты можно найти в руководствах по тензорному анализу [17-20], а ее применение к механике континуума в работах [2-4].

В микрополярных теориях механики континуума [21-23] исключительное значение имеют ориентации реперов, связанных с элементарными объемами. Особенно остро это проявляется при моделировании гемитропного (полуизотропного) поведения материалов, когда характеристики материала оказываются чувствительны к преобразованиям зеркальных отражений и инверсий пространства. Ясно, что ориентация репера задается нумерацией реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, т.е. правоориентированный репер становится левоориентированным. В механике континуума ориентацию *базисного* репера удобно задавать фундаментальным ориентирующим псевдоскаляром ϵ [2,3], образованного последовательным применением операций

скалярного и векторного произведения к базисным векторам:

$$e = \overset{[+1]}{e} = (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (3) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда построенного на векторах $\mathbf{e}_a$. Нетрудно показать, что в плоском пространстве с положительно определенной метрикой

$$|e| = \sqrt{g}. \quad (2)$$

Подчеркнем, что $e > 0$ для правоориентированного репера, $e < 0$ для левоориентированного репера. В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ , e и g , указание на их вес будем опускать.

Формализм ковариантного дифференцирования псевдотензорных полей был нами рассмотрен в публикациях [2–4]. Здесь мы опускаем соответствующие формулы и отсылаем читателя к указанным работам. В частности, для псевдоскалярного поля f веса W имеем:

$$\nabla_p \overset{[W]}{f} = \partial_p \overset{[W]}{f} - W e^{-1} \overset{[W]}{f} \partial_p e. \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались формулой

$$\Gamma_{sp}^s = e^{-1} \partial_p e. \quad (4)$$

Несложно показать, что для степеней фундаментального ориентирующего скаляра e справедливо уравнение

$$\nabla_i e^m = 0 \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5)$$

Ориентирующий пространство псевдоскаляр позволяет без труда осуществить переход от относительного тензора веса W к абсолютному согласно правилу

$$T_{ij\dots l}^{pqr\dots s} = e^{-W} T_{ij\dots l}^{[W]pqr\dots s}. \quad (6)$$

3. Геометрия поверхности уровня псевдоскалярного поля. Зададим, в некоторой области трехмерного пространства, псевдоскалярное поле $\overset{[W]}{f}(x^i)$ веса W . Определим перемещающуюся в пространстве поверхность $\overset{[W]}{\Sigma}$, как поверхность уровня псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}(x^i)$:

$$\overset{[W]}{t} = \overset{[W]}{f}(x^i), \quad (7)$$

где $\overset{[W]}{t}$ — псевдоскалярное время, причем

$$\overset{[W]}{t} = e^W t. \quad (8)$$

Рассмотрим дифференциал псевдоскалярного времени $\overset{[W]}{t}$. С учетом (8) получим

$$d \overset{[W]}{t} = d(e^W t) = e^W dt + t W e^{W-1} de. \quad (9)$$

Окончательно получим

$$d \overset{[W]}{t} = e^W (dt + t e^{-1} \partial_s e dx^s). \quad (10)$$

Отметим важный в прикладных задачах случай [24]. Выберем систему координат подчиненную условию:

$$\sqrt{g} = 1, \quad (11)$$

откуда на основании

$$e^2 = g \quad (12)$$

следует, что

$$e = \operatorname{sgn} e. \quad (13)$$

В трехмерном пространстве таких систем существует бесконечно много, например декартовы лево- и правоориентированные системы координат.

Ограничение $\sqrt{g} = 1$ часто используется не только в теории относительности (см. например монографию А. Копфа¹ [24]), но и в механике деформируемого твердого тела [25]. На страницах 135–142 монографии [24] условие $\sqrt{g} = 1$ используется при выводе уравнения тяготения в 4-пространстве-времени, что существенно упрощает уравнения теории относительности.

Если кроме того, мы будем считать координатную систему левоориентированной (т.е. $e < 0$), то дифференциал псевдоскалярного времени приобретает вид

$$d^{[W]}t = \begin{cases} dt, & W - \text{четный вес;} \\ -dt, & W - \text{нечетный вес.} \end{cases} \quad (14)$$

Отметим также, что частная производная по псевдотензорному времени имеет псевдотензорную природу

$$\frac{\partial}{\partial^{[W]}t} = \frac{[-W]}{\partial}. \quad (15)$$

и может быть преобразована к производной по времени согласно правилу

$$\frac{[-W]}{\partial} = e^{-W} \frac{\partial}{\partial}. \quad (16)$$

Вектор единичной нормали n_i к поверхности $\Sigma^{[W]}$, направленный в сторону ее распространения, можно определить, с учетом (5), с точностью до множителя согласно формуле

$$N n_i = \partial_i (e^{-W} f^{[W]}). \quad (17)$$

Отметим, что для абсолютного скаляра a справедливо равенство

$$\nabla_i a = \partial_i a. \quad (18)$$

Тогда выражение (17) с учетом (5) и (18) преобразуется к виду

$$N n_i = \partial_i (e^{-W} f^{[W]}) = \nabla_i (e^{-W} f^{[W]}) = e^{-W} \nabla_i f^{[W]}. \quad (19)$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор нормали согласно формуле

$$^{[W]}n_i = e^W n_i, \quad (20)$$

получим

$$N^{[W]}n_i = \nabla_i^{[W]} f. \quad (21)$$

¹Август Копф — немецкий астроном, первооткрыватель комет и астероидов. В период с 1901 по 1909 год им было открыто в общей сложности 68 астероидов.

Учитывая соотношение $(\text{w.g.t.}(g^{ij}) = 0)$

$$g^{ij} n_i^{[W]} n_j^{[W]} = e^{2W} \quad (22)$$

несложно заключить, что

$$N^2 e^{2W} = g^{ik} \nabla_i^{[W]} f \nabla_k^{[W]} f, \quad (23)$$

откуда для множителя N следует выражение

$$\pm N = e^{-W} \sqrt{g^{ik} \nabla_i^{[W]} f \nabla_k^{[W]} f}. \quad (24)$$

Окончательно, псевдовектор нормали к поверхности уровня $\Sigma^{[W]}$ псевдоскалярного поля $f^{[W]}$ вычисляется по формуле²

$$n_i^{[W]} = e^W \frac{\nabla_i^{[W]} f}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i^{[W]} f \nabla_k^{[W]} f}}. \quad (25)$$

Линейная псевдоскалярная скорость $G^{[-W]}$ распространения движущейся поверхности $\Sigma^{[W]}$ в направлении псевдовектора нормали $n_i^{[W]}$ вычисляется согласно

$$G^{[-W]} = \frac{1}{\sqrt{g^{ik} \nabla_i^{[W]} f \nabla_k^{[W]} f}}. \quad (26)$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня $\Sigma^{[W]}$ псевдоскалярного поля $f^{[W]}$ можно вычислить по формуле

$$n_i = G^{[-W]} \nabla_i^{[W]} f. \quad (27)$$

Напомним, что градиент псевдоскалярного физического поля вычисляется по формуле (3).

4. Геометрические условия совместности первого порядка. Допустим теперь, что поверхность уровня $\Sigma^{[W]}$ псевдоскалярного поля $f^{[W]}(x^i)$, задается внутренней Гауссовой параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2$)

$$x^k = x^k(u^1, u^2, t). \quad (28)$$

²В дальнейшем мы будем использовать положительный знак в формуле (24). Обычно, исключительную важность имеет направление распространения поверхности уровня псевдоскалярного поля, т.е. распространяется ли поверхность в направлении нормали n_i или в противоположном направлении. Эта проблема, наряду с выбором знака в (24), решается анализом знака фундаментального ориентирующего псевдоскаляра ϵ и четностью или не четностью веса W псевдотензорного поля. При использовании псевдотензорного формализма вес W псевдотензорных полей предполагается целым числом [20, с. 241].

В формуле (28) x^k являются пространственными “внешними” координатами для $\Sigma^{[W]}$, а u^α — “внутренними”. В работах Г.И. Быковцева показано, что использование специальной Гауссовой параметризации [13, с. 224], при которой псевдовектор $\partial_i x^i$ направлен вдоль псевдовектора нормали $n^{[W]}_i$ к поверхности $\Sigma^{[W]}$ приводит к соотношению

$$\partial_i x^i = e^W G^{[-W]} n^{[W]}_i. \quad (29)$$

Г.И. Быковцев систематически использовал уравнение (29) в работах по механике деформируемого твердого тела [10–12].

Пусть задано физическое контравариантное псевдовекторное поле $\varphi^{[P]k}(x^s, t)$ веса P .³ Предположим, что $\varphi^{[P]k}$ непрерывно и дифференцируемо на каждой стороне поверхности $\Sigma^{[W]}$. Величину разрыва $[\varphi^{[P]k}]$ поля $\varphi^{[P]k}$ определим равенством

$$[\varphi^{[P]k}] = \varphi^{[P]k}_+ - \varphi^{[P]k}_-, \quad (30)$$

где $+$ и $-$ относятся к соответствующим сторонам $\Sigma^{[W]}_+$ и $\Sigma^{[W]}_-$ поверхности $\Sigma^{[W]}$. Аналогичным образом определяются разрывы производных ∂_i поля $\varphi^{[P]k}$ по пространственным координатам x^i . Введем следующие обозначения

$$[\varphi^{[P]k}] = A^{[P]k}, \quad [\partial_i \varphi^{[P]k}] = B^{[P-W]k} n^{[W]}_i, \quad [\partial_i \partial_j \varphi^{[P]k}] = C^{[P-2W]k} n^{[W]}_i n^{[W]}_j, \quad (31)$$

где $n^{[W]}_j$ — единичный псевдовектор нормали к поверхности $\Sigma^{[W]}$, направленный в сторону от $\Sigma^{[W]}_-$ к $\Sigma^{[W]}_+$. Здесь, с особой осторожностью, следует учитывать четность (не четность) веса W псевдовекторного поля $\varphi^{[P]k}$, т.к. при преобразованиях инверсии пространства и зеркальных отражениях направление псевдовектора нормали $n^{[W]}_j$ может измениться.

Легко заметить, что

$$\partial_\alpha A^{[P]k} = [\partial_\alpha \varphi^{[P]k}] = [\partial_i \varphi^{[P]k}] \partial_\alpha x^i. \quad (32)$$

Используя известное тождество

$$g^{\alpha\beta} x^i_\alpha x^j_\beta = g^{ij} - e^{-2W} n^{[W]}_i n^{[W]}_j, \quad (33)$$

после несложных преобразований получим

$$[\partial_i \varphi^{[P]k}] = B^{[P-W]k} n^{[W]}_i + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha A^{[P]k} \partial_\beta x_i, \quad (34)$$

где $g^{\alpha\beta}$ — коэффициенты первой фундаментальной квадратичной формы поверхности $\Sigma^{[W]}$.

³Поясним, что контравариантный псевдовектор $\varphi^{[P]k}$ используется как “модель”, т.е. вместо него можно использовать любое псевдотензорное поле.

5. Дифференцирование по псевдоскалярному времени и кинематические условия совместности первого порядка. Рассмотрим два положения поверхности $\Sigma: \Sigma^{[W]}(t)$ и $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$. Построим вектор единичной нормали n^k в некоторой точке P поверхности $\Sigma^{[W]}$, а через P' обозначим точку, в которой нормаль n^k пересекает поверхность $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$. Пусть точка P имеет координаты x^k , а P' — координаты $x^k + \delta x^k$.

Нормальная скорость распространения поверхности $\Sigma^{[W]}$ определяется согласно правилу

$$G^{[-W]} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{\delta t}. \quad (35)$$

Устремляя к нулю расстояние между поверхностями $\Sigma^{[W]}(t)$ и $\Sigma^{[W]}(t + \delta t)$, т.е. устремляя δt к нулю, можно получить следующие выражения для δ -производных

$$\frac{\delta \varphi_k^{[P]}}{\delta t} = \frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_+}, \quad \frac{\delta \varphi_k^{[P]}}{\delta t} = \frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_-}, \quad \frac{\delta A^k}{\delta t} = \frac{[-W][P]}{\delta A^k}, \quad (36)$$

откуда не сложно получить кинематические условия совместности первого порядка

$$\begin{aligned} \left[\frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_+} \right] &= \frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_+} - \frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_-} = \frac{[-W][P]}{\delta A^k}, \\ \frac{[-W]}{\delta} x^i &= e^{-W} G^{[-W]} n_i^{[W]}, \\ \left[\frac{[-W][P]_k}{\delta \varphi_-} \right] &= -e^{W} B^{[P-W]}_k \frac{[-W]}{\delta} A^k, \end{aligned} \quad (37)$$

Используя полученные соотношения первого порядка не сложно получить условия совместности второго и более высоких порядков.

6. Слабые разрывы перемещений и микровращений Исследуем закономерности распространения слабых разрывы перемещений u^k и микровращений $\phi^{[+1]k}$ в микрополярном континууме. Отметим, что система уравнений динамики содержит частные производные не выше второго порядка. Пусть в трехмерном пространстве с нормальной скоростью G распространяется фронт (волновая поверхность) $\Sigma^{[W]}$ слабых разрывов перемещений u^k и микровращений $\phi^{[+1]k}$. Тогда геометрические и кинематические условия совместности второго порядка Адамара—Томаса (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned} [\partial_i \partial_j u^k] &= C^{[-2W]}_k n_i^{[W]} n_j^{[W]}, & [\partial_i \partial_j \phi^{[+1]k}] &= S^{[1-2W]}_k n_i^{[W]} n_j^{[W]}, \\ [\partial_i \frac{[-W]}{\delta} u^k] &= -e^{W} G^{[-W]} C^{[-2W]}_k n_i^{[W]}, & [\partial_i \frac{[-W][+1]}{\delta} \phi^k] &= -e^{W} G^{[-W]} S^{[1-2W]}_k n_i^{[W]}, \\ [\frac{[-W][+1]}{\delta} \partial_i \partial_j u^k] &= e^{2W} G^{[-W]} G^{[-W]} C^{[-2W]}_k, & [\frac{[-W][+1]}{\delta} \partial_i \partial_j \phi^k] &= e^{2W} G^{[-W]} G^{[-W]} S^{[1-2W]}_k. \end{aligned} \quad (38)$$

Заключение. В настоящей работе исследованы особенности постановки связывающих двусторонних граничных условий на поверхностях разрывов, распространяющихся в сплошных средах (в частности, в микрополярных континуумах).

- (1) Теория Югонио–Адамара распространения поверхностей разрывов полевых переменных обобщена на случай псевдотензорных физических полей.
- (2) Введены понятия фундаментального ориентирующего псевдоскаляра и псевдоскалярного времени.
- (3) Исследуется геометрия поверхностей уровня псевдоскалярного поля. Введено понятие псевдовектора нормали к поверхности.
- (4) Получены геометрические совместности первого порядка для псевдовекторного поля на поверхности уровня псевдоскалярного поля.
- (5) Введена операция дифференцирования по псевдоскалярному времени и получены кинематические условия совместности первого порядка.
- (6) Выведены условия совместности для слабых разрывов перемещений и микровращений микрополярного континуума.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Мурашкин Е. В., Радаев Ю. Н. Об одном дифференциальном ограничении в асимметричных теориях механики растущих тел // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 6. С. 38–46.
- [2] Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред // Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82, № 4. С. 399–412.
- [3] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 2020. Т. 24, № 3. С. 424–444.
- [4] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия “Физико-математические науки.” 2020. Т. 24, № 4. С. 752–761.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin/New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W.J.M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P. H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, 2e Partie // Journal de l'École Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Быковцев Г.И., Мяснянкин Ю.М. О поверхностях скольжения в трехмерных жестко-пластических телах // ДАН СССР 1966. Т. 167. № 6. С.1260–1262.
- [11] Быковцев Г.И., Кретова Л.Д. О волнах ускорений в идеальных упруго- пластических телах // Инж. журнал МТТ. 1967. № 1. С.102–110.
- [12] Быковцев Г.И., Власова И.А. Свойства уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности // Мех. деформир. тверд. тела, Вып. 2. Куйбышев, 1977. С.33–68.
- [13] Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.
- [14] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373–377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flüggе. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960. 226–902 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

- [17] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М., Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [18] Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965. – 456 с. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [19] Сокольников И. С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. М.: Наука, 1971. 376 с. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley & Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi+324 pp.
- [21] Besdo D. Ein beitrag zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums //Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. No. 1. P. 105-131.
- [22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin : Springer, 1972. 285 p.
- [23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 pp.
- [24] Копф А. Основы теории относительности Эйнштейна. М.: ГТТИ, 1933. 175 с.
- [25] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Самарский университет, 2006. 340 с.

E. V. Murashkin, Yu. N. Radayev

ON A PSEUDOTENSOR GENERALIZATION OF THE HUGONOT-HADAMARD LINKING BOUNDARY CONDITIONS

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present work deals with the linking boundary conditions formulated on the both sides of a propagating wave surface (in particular, in micropolar continua). The Hugoniot-Hadamard theory of physical fields wave surfaces propagation, essentially developed by G.I. Bykovtsev, is generalized to the case of a pseudotensor field description. The concepts of fundamental orienting pseudoscalar and pseudoscalar time are introduced and discussed. The geometry of level surfaces of a given pseudoscalar field is studied. The concept of a pseudovector normal to a surface is introduced. The pseudoscalar time derivative is proposed and discussed. Geometric and kinematic first order compatibility conditions are obtained in terms of pseudotensors. The compatibility conditions are derived for weak discontinuities of displacements and microrotations due to deformations of the micropolar solid.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, constitutive pseudoscalars, micropolar hemitropic continuum, elastic potential, primary wave mode, mirror mode

REFERENCES

- [1] Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media // Problems of Strength and Plasticity. 2020. Vol. 82, No. 4, pp. 399–412.
- [2] Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids // Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics. 2020, T. 24, No 3. P. 424–444.
- [3] Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation // Bulletin of Samara State Technical University, Series “ Physics and Mathematics. ” 2020, vol. 24, no. 4, pp. 752–761.
- [4] Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On one differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing bodies // Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Rigid Body Mechanics. 2019. No. 6. P. 38–46.
- [5] Weierstrass K. Note zur vorstehender Abhandlung. Walter de Gruyter, Berlin / New York Berlin, New York, 1865.
- [6] Erdmann G. Ueber unstetige L "o sungen in der Variationsrechnung. Berlin, New York, Walter de Gruyter, 1877.
- [7] Rankine W. J. M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance // Proceedings of the Royal Society of London. London: The Royal Society, 1870. Vol. 18, P. 80–83.
- [8] Hugoniot P.H. Sur la propagation du mouvement dans les corps et sp 'e cialement dans les gaz parfaits, 2e Part // Journal de l' 'E cole Polytechnique, 1887. Vol. 57. P. 3–97.
- [9] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. New York, Academic Press, 1961. 267 p.
- [10] Bykovtsev G.I., Myasnyankin Yu.M. Sliding surfaces in three-dimensional rigid-plastic bodies // DAN SSSR 1966. Vol. 167. No. 6. pp. 1260–1262.
- [11] Bykovtsev G.I., Kretova L.D. On waves of accelerations in ideal elastoplastic bodies // Inzh. magazine MTT. 1967. No. 1. P.102–110.

Evgenii V. Murashkin, Cand. Sc., PhD, MD, Senior Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.
Yuri N. Radayev, D. Sc., PhD, MSc, Professor of Continuum Mechanics, Leading Researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101, korp. 1, pr. Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

- [12] Bykovtsev G.I., Vlasova I.A. Properties of the equations of the spatial problem of the theory of ideal plasticity // *Mekh. deformed. solid, solid*, Vol. 2. Kuibyshev, 1977. S. 33-68.
- [13] Ivlev D.D., Bykovtsev G.I. The theory of a hardening plastic body. Moscow: Nauka, 1971.232 p.
- [14] Bykovtsev G.I., Ivlev D.D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998.528 p.
- [15] Veblen O. and Thomas T. Y. Extensions of Relative Tensors // *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 26, No. 3 (Jul., 1924), pp. 373-377 <https://www.jstor.org/stable/1989146>
- [16] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: *Encyclopedia of Physics*. Vol. III / 1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Ed. S. Flügge. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer, 1960.226-902 pp. DOI: 10.1007/ 978-3-642-45943-6_2.
- [17] Gurevich GB Foundations of the theory of algebraic invariants. M., L.: OGIZ, GITTL, 1948.408 p. [Eng. Trans. G. B. Gurevich, Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen, Noordhoff, 1964. 429 pp.]
- [18] Schouten Ya. A. Tensor analysis for physicists. M.: Science. 1965. – 456 s. [Eng. Trans. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicist. Oxford, Clarendon Press, 434 pp.]
- [19] Sokolnikov I. S. Tensor analysis. Theory and applications in geometry and in continuum mechanics. Moscow: Nauka, 1971.376 p. [Eng. Trans. Sokolnikoff I. S. Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua. John Wiley Sons Inc, 1964. 361 pp.]
- [20] Synge J. L. and Schild A. Tensor calculus. New York, Dover Publications Inc., 1978. xi + 324 pp.
- [21] Besdo D. Ein beitrage zur nichtlinearen theorie des Cosserat-kontinuums // *Acta Mechanica*. 1974. T. 20.No. 1.S. 105-131.
- [22] Nowacki W. Theory of micropolar elasticity. Berlin: Springer, 1972.285 p.
- [23] Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986.383 pp.
- [24] Kopf A. Foundations of Einstein's theory of relativity. Moscow: GTTI, 1933.175 p.
- [25] Radaev Yu. N. A spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Samara University, 2006.340 p.

This study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research projects nos. 19-51-60001, 20-01-00666.