**Stefan Pohlkamp, Markus Helmerich,
David Kollosche, Katja Lengnink
& Tanja Hamann
(Hrsg.)**

Mathematische Bildung neu denken. Andreas Vohns erinnern und weiterdenken

28.–30. Oktober 2022
Universität Siegen

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Conference Proceedings in Mathematics Education 12

Conference Proceedings in Mathematics Education

Band 12

Stefan Pohlkamp, Markus Helmerich, David Kollosche, Katja Lengnink & Tanja Hamann (Hrsg.)

Mathematische Bildung neu denken. Andreas Vohns erinnern und weiterdenken

28.–30. Oktober 2022
Universität Siegen

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über https://www.dnb.de abrufbar

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.
All Rights Reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form, electronic, mechanical, recording, photocopying, or otherwise, without the permission of the copyright holder.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, 48147 Münster
Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-206-5
https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Inhaltsverzeichnis

Stefan POHLKAMP, Markus HELMERICH, David KOLLOSCHE, Katja LENGNINK, Tanja HAMANN
*Einleitung der Herausgeber*innen* *5*

Erinnerungen an das akademische Wirken von Andreas Vohns

Rainer DANCKWERTS
Erinnerungen an Andreas Vohns *15*

Thomas JAHNKE
Das Schriftwerk von Andreas Vohns – eine Eulogie *19*

David KOLLOSCHE
Sortierte Auflistung der Veröffentlichungen von Andreas Vohns *31*

1. Fundamentale Ideen des Mathematikunterrichts

Henning HESKE
Entwicklung und Perspektiven der bildungstheoretischen Grundlegung des Faches Mathematik am Beispiel der nordrhein-westfälischen Lehrpläne *37*

Gero STOFFELS
SpiraMaGS: Das Spiralcurriculum im Mathematikunterricht (wieder-)entdecken! *49*

2. Bildungstheorie des Mathematikunterrichts

Rudolf STRÄßER
Nachdenken über Bildung – Kompetenzen – Mathematik. Auch ein Kommentar zu Andreas Vohns *67*

Eva JABLONKA
Die Auseinandersetzung mit Mathematik im öffentlichen Diskurs als Teil eines politisch bildenden Mathematikunterrichts? *83*

Cornelia PLUNGER
*Intensive Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten und ihrer Verwendung im Umfeld von Schüler*innen. Eine Fallstudie zu modell- und kontextorientierten Reflexionsprozessen* *99*

Daniela STEFLITSCH, Kora DEWEIS-WEIDLINGER
*Critical Mathematics Education in der Wahrnehmung österreichischer Schüler*innen – ein genauerer Blick auf mathematisch inhaltsspezifische Auswirkungen* *115*

3. Civic Education und normative Modellierung

Michael LIEBENDÖRFER, Lara GILDEHAUS, Bastian VAJEN
Mathematik ist politisch – Ansätze interdisziplinären Lernens zum Thema Klimawandel im Mathematik- und Politikunterricht *133*

Stefan POHLKAMP
Zur mathematischen Perspektive in öffentlichen Debatten – Normative Modellierung und Andreas Vohns' Beispiele aus der Sozialpolitik *149*

Wolfram MEYERHÖFER
Die Corona-Krise als Krise der mathematischen Bildung *165*

4. Mathematiklehrer:innenbildung

Lukas GÜNTHER
Der Start in das Mathematikstudium als krisenhafter Bildungsprozess *183*

Johanna RUGE
Die Bildung von Kompetenzerwerbsbegleiter:innen und (Über-)Prüfungskult(ur) *199*

Stefan POHLKAMP, RWTH Aachen University; Markus HELMERICH, Universität Siegen; David KOLLOSCHE, Universität Klagenfurt; Katja LENGNINK, Justus-Liebig-Universität Gießen; Tanja HAMANN, Universität Hildesheim

stefan.pohlkamp@rwth-aachen.de; helmerich@mathematik.uni-siegen.de; david.kollosche@aau.at; katja.lengnink@math.uni-giessen.de & hamann@uni-hildesheim.de

Einleitung der Herausgeber*innen

Am 19. Januar 2021 riss das plötzliche Ableben von Andreas Vohns ein tiefes Loch nicht nur in die deutschsprachige Mathematikdidaktik, sondern auch in die Herzen vieler seiner Kolleg*innen. Andreas Vohns war nicht nur ein begnadeter und gewitzter Mathematikdidaktiker, sondern vielen von uns auch freundschaftlich verbunden. Wo Andreas Vohns welche Lücken in seinen verschiedenen Tätigkeitsfeldern hinterließ, wird in der Vielfalt der Nachrufe auf ihn deutlich (zusammengestellt von Kollosche, 2021), etwa in der Mathematiklehrplankommission der Republik Österreich, in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), deren Vorstand Andreas Vohns viele Jahre lang angehörte, im GDM-Arbeitskreis „Mathematik und Bildung“, im Herausgeberteam von mathematica didactica, am Klagenfurter Institut für Didaktik der Mathematik, dem Andreas Vohns einige Jahre vorstand, oder an der School of Education der Universität Klagenfurt, die Andreas Vohns zuletzt im Dekansrang leitete.

Während die Würdigung des Menschen Andreas Vohns an anderer Stelle erfolgte, soll dieser Band sein wissenschaftliches Erbe in den Mittelpunkt rücken. Dies soll jedoch nicht geschehen in Form eines Denkmals, das man aufsucht und in Erinnerungen versunken still betrachtet, sondern in Form eines Aufrufs, sich der intellektuellen Einladungen, die Andreas Vohns hinterlassen hat, zu erinnern und diese produktiv weiterzudenken.

Dieser Sammelband beginnt mit zwei persönlich gehaltenen Erinnerungen an das akademische Wirken von Andreas Vohns. So würdigt Rainer Danckwerts die Dissertation von Andreas Vohns mit dem Titel „Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht – Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie“ und deren Resonanz in der mathematikdidaktischen Community. Dabei zeichnet er auch Andreas Vohns’ akademischen Lebensweg von Siegen nach Klagenfurt nach.

Thomas Jahnke widmet sich breiter Andreas Vohns’ Publikationen, indem er den zugehörigen Erkenntnisgewinn herausarbeitet und zentrale Aussagen im Überblick bündelt. Dabei treibt ihn die Frage um, wie diese für die Mathematikdidaktik wichtigen Schriften langfristig zugänglich gemacht werden können.

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 5–11). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Auch wenn der Slogan „Mathematische Bildung neu denken“ Andreas Vohns als Überbegriff seines Schaffens gefallen haben könnte, lässt sich sein Werk kaum unter dieser Überschrift subsummieren. Wir können und wollen an dieser Stelle nicht all seine Tätigkeitsfelder im Detail ausleuchten, möchten aber sehr wohl auf die großen Stränge seiner Forschung eingehen und dabei ankündigen, wie diese im vorliegenden Band durch die wissenschaftlichen, peer-reviewten Beiträge aufgegriffen werden. Wir hoffen, damit einen kurzen Überblick über das Werk von Andreas Vohns und gleichzeitig eine Übersicht über die Inhalte dieses Bandes liefern zu können.

1. Fundamentale Ideen des Mathematikunterrichts

In seinem Dissertationsprojekt befasst sich Andreas Vohns zunächst mit fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts, die in ähnlicher Interpretation zuweilen auch grundlegende, zentrale oder universelle Ideen genannt werden. Während Listen mit Vorschlägen für solche Ideen eine lange Tradition in der Mathematikdidaktik haben, möchte Vohns sie nun „als stoffdidaktisches Analyseelement für Zugänge und Aufgaben zu mathematischen Themengebieten begreifen“ und „das Potenzial grundlegender Ideen für eine Orientierung bei der Gestaltung und konkreten Umsetzung von Lehr- und Lernprozessen“ herausarbeiten (Vohns, 2007, S. v). Bedeutsam seien fundamentale Ideen in vielfacher Hinsicht, nämlich

- *mathematisch*, denn sie zeigen typische Züge der Mathematik auf und geben partiell Aufschluss über Struktur und Zusammenhänge der fachlichen Inhalte,
- *bildungstheoretisch*, denn sie bauen eine Brücke zwischen fachlichen Inhalten und allgemeinen Bildungszielen einerseits und zwischen mathematischen und außermathematischen (lebensweltlichen) Sachverhalten, Denk- und Arbeitsweisen andererseits sowie
- *pragmatisch*, d. h. sie geben Aufschluss über Aspekte der Lernbarkeit von Mathematik.

(Vohns, 2007, S. 2, mit syntaktischen Änderungen, Hervorhebungen im Original)

Seine grundsätzlichen Überlegungen arbeitet Vohns in den Folgejahren durchaus auch inhalts- und unterrichtsbezogen aus, etwa zur Tätigkeit des Messens (Vohns, 2012a) oder zum Vektorbegriff (Vohns, 2016a). Seine Abgrenzung und Symbiose von fundamentalen Ideen mit dem für die deutschsprachige Mathematikdidaktik ebenfalls zentralen Konzept der Grundvorstellungen kann Vohns noch als Doktorand im *Journal für Mathematik-Didaktik* veröffentlichen (Vohns, 2005). Im Rahmen des in Deutschland abgehaltenen 13th International Congress on Mathematics Education erarbeitet Vohns (2016b) schließlich auch eine englischsprachige Darstellung seiner Arbeit zu fundamentalen Ideen des Mathematikunterrichts.

Im vorliegenden Band arbeitet Henning Heske heraus, wie fundamentale Ideen in den bildungspolitischen Vorgaben des Landes Nordrhein-Westfalen seit 1981

aufgegriffen wurden. Dabei geht er insbesondere auf die Interpretation von Hans-Werner Heymann (1996) sowie auf dessen Deutungen und Umdeutungen in den Lehrplänen ein und problematisiert deren Verdrängung durch den Bezug auf die von Heinrich Winter (1995) für Schüler*innen eingeforderten Grunderfahrungen. Im Gegensatz zu den Hoffnungen von Andreas Vohns hält Heske schließlich fest, dass die derzeitige Orientierung an fundamentalen Ideen nicht hilft, die Frage nach Inhalt und Methode des Mathematikunterrichts hinreichend zu lösen.

Gero Stoffels betrachtet fundamentale Ideen in Bezug auf das Lehrplänen zugrundeliegende Spiralcurriculum und ergänzt neben der stoffdidaktischen Betrachtungsweise eine lernpsychologische und eine entwicklungsforschende Perspektive auf deren Zusammenwirken. Konkret zeigt er an dem Projekt „SpiraMaGS“, wie auch in der Lehramtsausbildung die Verbindung beider schulformübergreifend und produktiv reflektiert werden können und welches Potenzial einer solchen Sensibilisierung für den spiralcurricular aufgebauten Mathematikunterricht innewohnt.

2. Bildungstheorie des Mathematikunterrichts

Andreas Vohns hinterfragt den Mathematikunterricht aus einer bildungstheoretischen Perspektive und findet immer wieder neue Legitimationen, indem er vorausgegangene Überlegungen von Humboldt über Klafki bis Fischer und Winter gegenüberstellt, verknüpft und weiterdenkt. Sein hermeneutisch gewonnenes Verständnis von mathematischer Bildung als (ablehnbares) Angebot einerseits und unerreichbares Ideal andererseits bündelt er in einem Hauptvortrag auf der GDMV-Tagung, der einen grundlegenden Beitrag zur bildungstheoretischen Debatte der deutschsprachigen Mathematikdidaktik liefert (Vohns, 2018b), den er auch international einbringt und vertritt (Vohns, 2017a). Regelmäßig konkretisiert er den bildungstheoretischen Anspruch an Mathematikunterricht in entsprechend konzipierten Unterrichtsvorschlägen und Lernmaterialien (s. nächster Abschnitt).

Im vorliegenden Band leitet Rudolf Sträßer aus einem historischen Überblick über die zeitgenössische Bedingtheit des mathematischen Bildungsbegriffes allgemeine Überlegungen und konkrete Beispiele ab, wie Mathematikunterricht bildsam wird. Dafür setzt er sich kritisch mit existierenden Konzepten wie der Kompetenzorientierung auseinander und findet etwa bei Klafki und Winter Anknüpfungspunkte für seine fünf Thesen zum Bildungspotenzial von Mathematik und Mathematikunterricht.

Mathematik auch im Spannungsfeld von Mittel- und Systemaspekten zu begreifen und in ihrer Bedeutung für gesellschaftliche Konstituierungsprozesse und politische Meinungsbildung und Kommunikation zu sehen, sind Anliegen von Andreas Vohns, die im Beitrag von Eva Jablonka zur Auseinandersetzung mit Mathematik im öffentlichen Diskurs eines politisch bildenden Mathematikunterrichts aufgegriffen und aktuell ausgeleuchtet werden. Einerseits wird Mathematik als mäch-

tiges Arbeitsmittel in den Wissenschaften verwendet, bleibt aber in ihrer Komplexität oft undurchschaubar für die Öffentlichkeit. Andererseits wirkt Mathematik durch die Materialisierung von komplexen gesellschaftlichen, ökonomischen oder naturwissenschaftlichen Zusammenhängen in Form von Kennzahlen politisch steuernd. Von dieser Beobachtung ausgehend wird ein kritischer Diskurs über den Gebrauch von Mathematik in der Wissenschaftskommunikation und öffentlichen Debatte geführt. Daraus werden Erkenntnisse für eine Umsetzung als kritischer Mathematikunterricht im Rahmen einer bildungstheoretischen Verortung gewonnen.

Cornelia Plunger fokussiert Reflexion als Aspekt mathematischer Bildung und differenziert zwischen modell- und kontextorientierter Reflexion. Bildungstheoretisch begründet sie, welches Potenzial dem Reflektieren mit und über Mathematik für Bürger*innen einer demokratischen Gesellschaft innewohnt. Für die Praxis des Mathematikunterrichts beschreibt sie an einer Fallstudie mit zwei Schülerinnen den Reflexionsprozess bei der Bearbeitung reflexionsfördernder Aufgaben.

Daniela Steflitsch und Kora Deweis-Weidlinger gehen der Frage nach, wie Schüler*innen im Rückblick Lerneinheiten zu gesellschaftsrelevanten, allgemeinbildenden Themen im Mathematikunterricht bewerten. Im Nachgang zu Unterrichtsthemen, die sich am bildungstheoretischen Anspruch der Critical Mathematics Education orientieren, äußern sich die befragten Schüler*innen zwar positiv zu den behandelten Themen und der didaktischen Herangehensweise, haben aber Schwierigkeiten, die objektiv aufzeigbaren mathematischen Tätigkeiten jenseits des Rechnens subjektiv als solche wahrzunehmen, zu benennen und zu würdigen.

3. Civic Education und normative Modellierung

Eng verbunden mit Andreas Vohns' Engagement in bildungstheoretischen Fragestellungen ist sein Interesse daran, welchen Beitrag Mathematikunterricht zu Civic Education, also einer Bildung mit dem Ziel der Ermöglichung der zivilgesellschaftlichen Teilhabe, haben kann und haben muss (Lengnink, Meyerhöfer & Vohns, 2013; Vohns, 2017a, 2018). Dabei kann er seine Expertise aus seinem Zweitfach Sozialwissenschaften gewinnbringend in seine Forschung einbringen. Er befasst sich etwa mit den mathematisch-politischen Möglichkeiten der Definition von Armut und will dieses Thema durchaus im Mathematikunterricht verortet wissen (Vohns, 2010a, 2010b, 2013). In weiterer Folge schlägt er auch eine Erkundung der Einkommensteuertarife für eine Behandlung im Mathematikunterricht vor (Vohns, 2017b). Andreas Vohns erkennt hier früh die Notwendigkeit eines tiefergehenden Bedarfs des Nachdenkens über normative mathematische Modellierung und begleitete das hierzu thematisch einschlägige Dissertationsprojekt von Stefan Pohlkamp (2022).

Im vorliegenden Band greifen Michael Liebendörfer, Lara Gildehaus und Bastian Vajen die Ideen von Andreas Vohns auf und präsentieren einen Kreislauf für normative mathematische Modellierungsprozesse. Anhand ihrer Erfahrungen aus der Erprobung solcher Modellierungsprozesse zum Thema Klimawandel mit Schüler*innen und Student*innen reflektieren sie die entstehenden Herausforderungen für die Beteiligten aus mathematik- und politikdidaktischer Perspektive.

Stefan Pohlkamp rezipiert Andreas Vohns' Publikationen, in denen letzterer aus einer mathematischen Perspektive heraus sozialpolitische Themen vor allem über deren mathematische Modellierung analysiert. Aus diesen Debattenbeiträgen leitet Pohlkamp ab, auf welche Weise mathematisch fundierte Analysen zu gesellschaftlich relevanten Themen einen Mehrwert für die Öffentlichkeit darstellen können. Darüber hinaus zeigt er auf, wie bei dieser auf die Gesellschaft abzielenden Aufklärung auch das Verständnis von mathematischer Bildung für einen innermathematikdidaktischen Diskurs ausgeschärft wird.

Wolfram Meyerhöfer führt eindringlich die Gefahren vor Augen, die entstehen können, wenn in der Öffentlichkeit unreflektiert mit mathematischen Modellierungen argumentiert wird, weil Annahmen und Auswertungen nicht transparent sind oder nicht hinterfragt werden. Diese am Beispiel der Corona-Maßnahmen veranschaulichte Problematik ordnet er in den größeren Kontext eines falschen Glaubens an die Aussagekraft von Mathematik ein.

4. Mathematiklehrer:innenbildung

Brennt man für bildungstheoretische Fragestellungen und ist man gleichzeitig in der Lehrer*innenbildung tätig, so liegt der Transfer nahe, sich auch für bildungstheoretische Fragestellungen im Lehramtsstudium zu interessieren. Dieses Forschungsinteresse verfolgt Andreas Vohns aus fachspezifischer Sicht, zunächst in einem langen Beitrag für die GDM-Mitteilungen (Vohns, 2009), mit etwas Abstand dann zur Frage, ob Mathematiklehrpersonen überhaupt Bildung brauchen (Vohns, 2017c), oder zu den Spannungen zwischen Bildungsanspruch und Kompetenzorientierung in der Bildung oder eben Ausbildung von Mathematiklehrpersonen (Vohns, 2019).

Im vorliegenden Band charakterisiert Lukas Günther den Übergang der Schul- zur Hochschulmathematik als krisenhaften und transformatorischen Bildungsprozess. Vohns' Diktum, dass mathematische Bildung nicht erzwungen werden kann, erweitert er um eine theoretische Argumentation, inwiefern ein solches Scheitern aufgrund einer auf Differenzerfahrung beruhenden mathematischen Enkulturation unumgänglich ist und dass es produktiv in Lernsituationen begleitet werden kann.

Anknüpfend an Andreas Vohns' Engagement in der Lehrer*innenbildung und den von ihm geprägten Begriff der „Kompetenzerwerbsbegleiter*innen" als idealtypisches Bild des Berufs der Mathematiklehrkraft, gibt Johanna Ruge einen Ein-

blick in eine Interviewstudie mit Mathematiklehramtsstudierenden, die verschiedene Perspektiven auf dieses Idealbild werfen. Darin zeigt sich das Verhältnis zwischen Professionalisierung und Generierung von Wissen in der Lehrer*innenbildung. Es wird die Frage aufgeworfen, wie solche „Kompetenzerwerbsbegleiter*innen“ selbst kompetent werden können. Dies knüpft auch an die intensive Auseinandersetzung von Andreas Vohns mit dem Kompetenzbegriff und seine Operationalisierung für schulische und universitäre Bildungsprozesse an.

5. Schluss

Natürlich gibt es auch Beiträge von Andreas Vohns, die sich nicht unter die obenstehenden Überschriften einordnen lassen, etwa den forschungsmethodischen JMD-Beitrag „Zur Rekonstruierbarkeit impliziter Standardsetzungen zentraler Prüfungen mit Hilfe des Rasch-Modells“ (Vohns, 2012b), seine Arbeit zur Geschichte der GDM (Toepell & Vohns, 2016) oder seine Mitwirkung an Versuchen, deutsche Traditionen in der mathematikdidaktischen Forschung auch einem internationalen Publikum zu präsentieren (z. B. Bikner-Ahsbahs & Vohns, 2019).

Wo Andreas Vohns gewirkt hat, hat er stets Ideen und Fragen hinterlassen, die anderen Anlass sind für weitergehende Forschung oder Orientierung und Inspiration bieten. Die interessierten Leser*innen dieser Einleitung haben vielleicht jetzt schon Lust bekommen, einen Aspekt des Schaffens von Andreas Vohns genauer zu beleuchten und für das eigene Tun zu nutzen. Andere, denen es so geht, wurden in dieser Einleitung bereits kurz angesprochen und haben im vorliegenden Buch ihre Beiträge hinterlassen.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A., & Vohns, A. (2019). Theories of and in mathematics education. In H. N. Jahnke & L. Hefendehl-Hebeker (Hrsg.), *Traditions in German-speaking mathematics education research* (S. 171–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_7

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

Kollosche, D. (Hrsg.) (2021). Im Gedenken an Andreas Vohns. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (111), 107–110.

Lengnink, K., Meyerhöfer, W., & Vohns, A. (2013). Mathematische Bildung als staatsbürgerliche Erziehung? *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 2–7.

Pohlkamp, S. (2022). *Normative Modellierung im Mathematikunterricht: Bildungspotential, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen.* WTM.

Toepell, M., & Vohns, A. (2016). Zur Gründung und Entwicklung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (101), 12–17.

Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen. Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 26*(1), 52–79.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie*. Norderstedt: Books on Demand.

Vohns, A. (2009). Lehrer sein, das ist nicht schwer, Lehrer werden umso mehr. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (87), 4–9.

Vohns, A. (2010a). Die Mathematisierung der Menschenwürde: Ein mathematikdidaktischer Kommentar zum „Hartz IV“-Urteil des Bundesverfassungsgerichts. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, (89), 4–12.

Vohns, A. (2010b). Relative Armut, relative Menschenwürde – relatives Desinteresse? *Gesellschaft, Wirtschaft, Politik, 59*(3), 367–375.

Vohns, A. (2012a). Grundprinzipien des Messens. Erkunden, Vernetzen, Reflektieren. *mathematik lehren*, (173), 20–24.

Vohns, A. (2012b). Zur Rekonstruierbarkeit impliziter Standardsetzungen zentraler Prüfungen mit Hilfe des Rasch-Modells. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33*(2), 339–349. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0041-y

Vohns, A. (2013). Relative Armutsgefährdung: Nur eine Zahl? *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 49–58.

Vohns, A. (2016a). Algebraisierung, Geometrisierung und Kapselung. Globale Ideen bei den Vektoren im Unterricht zur Analytischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht, 62*(4), 4–14.

Vohns, A. (2016b). Fundamental ideas as a guiding category in mathematics education. Early understandings, developments in German-speaking countries and relations to subject matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(S1), 193–223.

Vohns, A. (2017a). Bildung, mathematical literacy and civic education: The (strange?) case of contemporary Austria and Germany. In A. Chronaki (Hrsg.), *Mathematics education and life at times of crisis* (S. 968–978). University of Thessaly Press.

Vohns, A. (2017b). Einkommensteuertarife mit Schulmathematik erkunden: Ein Zugang aus bildungstheoretischer Perspektive. *Der Mathematikunterricht, 63*(3), 3–13.

Vohns, A. (2017c). Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage. In A. Vohns, G. Nickel & R. Krömer (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* (S. 139–168). Universitätsverlag Siegen.

Vohns, A. (2018a). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (105), 8–21.

Vohns, A. (2018b). Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft: Historische, philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 203–219). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-16123-1_19

Vohns, A. (2019). Bildung, professionalization and competencies: Clashing narratives in German mathematics teacher education research and practice. In J. Subramanian (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 864–873). MES10.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (61), 37–46.

Erinnerungen an das akademische Wirken von Andreas Vohns

Rainer DANCKWERTS, Universität Siegen
danckwerts@mathematik.uni-siegen.de

Erinnerungen an Andreas Vohns

Liebe Kolleginnen und Kollegen, verehrte Gäste,

ich möchte von Andreas sprechen, von Andreas Vohns als Mathematikdidaktiker, genauer: von den Anfängen seines Schaffens.

Ich hatte das Glück, ihn in seinen Siegener Jahren vom Studienbeginn bis zur Promotion zu begleiten. Meine Erinnerung an Andreas wird bestimmt von dem Gefühl, was für ein besonderer Mensch und potenzieller Kollege er war.

Unverkennbar waren ganz früh seine Leidenschaft für die Sache, seine Ernsthaftigkeit und Zuverlässigkeit, sein Humor, seine intellektuelle Redlichkeit und die Unbestechlichkeit seines Urteils. Ich hatte sehr früh das Gefühl, von seinen Ideen etwas lernen zu können.

Seine Arbeit als studentischer und später als wissenschaftlicher Mitarbeiter war intuitiv stark geprägt vom Freudenthalschen Motto der „Mathematik als pädagogische Aufgabe“. Mit natürlichem Lehrgeschick und erkennbar konstruktivistischer Perspektive wusste er die Studierenden zu fordern und zu gewinnen. Eine Kommilitonin aus frühen gemeinsamen Tagen erinnert sich lebhaft, wie hintergründig-witzig und zugleich ermutigend Andreas sein konnte. Ein anderer erinnert sich an seinen ausgeprägten Sinn für Fairness und Gerechtigkeit.

Getragen von seinem zweiten Standbein, den Sozialwissenschaften, entwickelte Andreas früh einen spezifischen Blick auf die Mathematikdidaktik, der die komplexe Beziehung zwischen Mensch, Mathematik und Gesellschaft explizit einschließt. Unvergessen sind mir seine engagierten Beiträge in einem Seminar, in dem es um einen bildungstheoretischen Vergleich der Allgemeinbildungskonzepte von Heinrich Winter und Hans Werner Heymann ging, einer seinerzeit stark diskutierten Thematik mit polarisierten Auffassungen. Andreas legte dar, wie weit man den Bogen spannen muss, um den Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts konzeptionell zu fassen und damit die Fachdidaktik selbst herauszufordern. Die fortgeschrittenen Studierenden folgten ihm nicht ohne Bewunderung. Gleichwohl wusste und lebte er früh, dass die zentrale Bezugswissenschaft der Mathematikdidaktik die Mathematik selbst ist. Und dass es darauf ankommt, im Sinne eines berühmten Zitats des Erziehungswissenschaftlers Herwig Blankertz, „die Mathematik mit ihrer eigenen Lehrbarkeit zu konfrontieren“. Dies setzt eine hohe Affinität und Fähigkeit zur Elementarmathematik voraus, und genau darüber verfügte Andreas in reichlicher Fülle.

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 15–18). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Andreas Vohns war ein politischer Mensch. Sein klarer analytischer Blick für gesellschaftspolitische Zusammenhänge und seine inhaltlich deutliche Sprache fielen auf in den hochschulpolitischen Gremien, in die er als Vertreter des wissenschaftlichen Nachwuchses gewählt worden war. Für manchen meiner Kollegen war das gelegentlich eine Herausforderung, für andere eher eine willkommene Bereicherung. Wie sehr die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik später von seinen Fähigkeiten profitiert hat, wurde schon an anderer Stelle umfassend gewürdigt.

Andreas Vohns hat in der kurzen Lebenszeit, die ihm vergönnt war, beachtliche mathematikdidaktische Spuren gelegt. Ich möchte hier über die Anfänge seines wissenschaftlichen Werks sprechen; sie sind aus meiner Sicht ein früher Indikator für nachfolgende, breit rezipierte Weiterentwicklungen.

Andreas hatte sich als Student sehr bald für die Rolle der fundamentalen Ideen in der Mathematik und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht interessiert und dieses Thema bereits im Rahmen seiner Staatsexamensarbeit umfassend und originell bearbeitet. In seiner Dissertation aus dem Jahre 2007 gelang ihm dann eine Tiefe der Auseinandersetzung, die den Betreuer ebenso wie die Zweitgutachterin regelrecht begeisterte. Das Thema: „Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht – Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie“

Was war das Besondere dieser Arbeit? Seinerzeit bot die Literatur eine stattliche Zahl an Einzelbeiträgen, die sich mit den fundamentalen oder zentralen Ideen befassten. Aber es fehlte an einer gründlichen übergreifenden Analyse, die drei für das Thema wesentliche Aspekte zusammenführt:

- die ideengeschichtlich-hermeneutische Perspektive für ein genaueres Verständnis der komplexen Begrifflichkeit „Grundlegende Ideen“,
- die wissenschaftstheoretische Perspektive für die Einordnung der Thematik in das Forschungsparadigma der normativen Stoffdidaktik,
- die bildungstheoretische und empirische Perspektive für eine exemplarische Konkretisierung an schulmathematischen Inhalten.

Genau diesem tiefer greifenden Anspruch wurde die Arbeit gerecht. Sie bringt normative, deskriptive und konstruktive Elemente in einer Weise zusammen, die – wie es in einem der beiden Gutachten heißt –

> es erlaubt, zu einem neuen, umfassenden Verständnis der grundlegenden Ideen als mathematikdidaktische Kategorie zu gelangen. Zugleich wird der Bogen so weit gespannt, dass man von einer substanziellen Weiterentwicklung klassischer stoffdidaktischer Analysen sprechen kann.

Unverkennbar war das erklärte Ziel, das Konzept der grundlegenden Ideen letztlich auf Lehr-Lern-Prozesse zu beziehen und damit unterrichtswirksam zu machen.

In einer für Andreas Vohns typischen Weise wurde eine hochkomplexe Thematik so durchdrungen und strukturiert, dass sich zukunftsweisende Perspektiven eröffnen: Hier geht es um einen Beitrag zur konstruktiven Weiterentwicklung des stoffdidaktischen Forschungsparadigmas. In folgendem Credo liegt für mich zusammenfassend das immer noch hochaktuelle Vermächtnis der Arbeit:

Die bisweilen potenziell unterschätzte Stoffdidaktik wird ihre wissenschaftliche Berechtigung umso leichter glaubhaft machen, wie es gelingt, in ihren Analysen im Sinne des Vohns'schen Ansatzes die ideengeschichtliche, die wissenschaftstheoretische und die bildungstheoretische Perspektive mitzudenken und exemplarisch zu konkretisieren. Man stelle sich etwa vor, welche Tiefenschärfe eine Didaktik der Analysis bekäme, würde man sie nach diesem Modell fachdidaktisch rekonstruieren. Der Gegenpol ist die Reduktion einer Didaktik der Analysis auf die rein unterrichtsmethodische Dimension, eine Akzentuierung, auf die sich die Arbeit in der zweiten Phase der Lehrerbildung aus guten Gründen beschränkt. In einer Mathematikdidaktik als Wissenschaft ist zu begründen, warum die reduktionistische Perspektive nicht ausreicht. Das schien für Andreas Vohns selbstverständlich.

Ich gehe einen Schritt weiter und stelle mir vor, dass auch künftige mathematikdidaktische Analysen davon profitieren würden, wenn – bei welchem forschungsrelevanten Meta-Thema auch immer – jeweils genauer diskutiert würde, welche der drei genannten Perspektiven mitzudenken wäre, um Tiefe und Akzeptanz des Themas zu steigern:

Das beginnt erstens mit der Klärung von Begrifflichkeiten, deren prinzipielle Unschärfe ihre Leistungsfähigkeit für die Mathematikdidaktik ja oft erst begründet. Neben den „Grundlegenden Ideen" in der Vohns'schen Arbeit wären etwa die Meta-Themen „Verstehensorientierung" oder auch „Fehlerkultur" weitere Beispiele solcher komplexer Begrifflichkeiten. Jeweils könnten ideengeschichtlich-hermeneutische Analysen zu einem genaueren Verständnis beitragen.

Zweitens erschließt die wissenschaftstheoretische Perspektive oft eine bessere Einordnung und Begründung der verwendeten Forschungsmethode. Sie trägt gleichsam zur methodologischen Vergewisserung bei. Hier hat zum Beispiel die unverzichtbare Stoffdidaktik, wie es scheint, immer noch einigen Klärungsbedarf.

Schließlich drittens eröffnen die bildungstheoretische und die empirische Perspektive die Chance, die normative und die deskriptive Sicht aufeinander zu beziehen. Erst dadurch kann eine exemplarische Konkretisierung an schulmathematischen Inhalten die nötige Relevanz und Akzeptanz gewinnen.

Im Idealfall gelingt eine wechselseitige Integration aller drei Perspektiven, so wie sie in der Dissertation von Andreas Vohns angelegt ist. Insgesamt ist hier aus meiner Sicht eine nachhaltige wissenschaftliche Spur gelegt worden.

Der Wechsel nach der Promotion von Siegen nach Klagenfurt erwies sich für Andreas als Glücksfall, war doch der neue Standort ein Hort etablierter Wertschätzung der bildungstheoretischen Perspektive in der Mathematikdidaktik. Seine Dissertation war der vielversprechende Anfang und inhaltliche Ausgangspunkt auf dem Weg zu einem hoch geachteten Mitglied unserer Community, einem Kollegen mit nachhaltigen Ideen und einer gewinnenden, unverwechselbaren Persönlichkeit. Bei ihm war die Beziehung Mensch-Mathematik wahrlich in den besten Händen.

Andreas hat Spuren hinterlassen, an die sich viele unserer Kolleginnen und Kollegen sehr genau und lange erinnern werden. Man muss im Übrigen nur einmal schauen, wie häufig und breit er in den vergangenen Jahren in einschlägigen Arbeiten zitiert wurde. Andreas war ein Gewinn für so viele!

Gleichsam als weiterer Beleg hier abschließend noch ein jüngstes Beispiel für die Kraft seines mathematikdidaktischen Urteils:

Als nicht mehr zu übersehen war, welche faktische Bedeutung und Reichweite Modellierungsaktivitäten im Mathematikunterricht erlangt hatten, wies Andreas sehr früh, eher beiläufig, wie ich mich erinnere, aber mit Nachdruck darauf hin, dass letztlich erst die normative Seite der Modellbildung, also der Teil, wo gesellschaftliche Realität mit Mitteln der Mathematik geschaffen wird, das Bildungspotenzial ausschöpft und erst darüber die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik erfahrbar wird. Genau diesen Anspruch hat jüngst Stefan Pohlkamp in seiner Dissertation prominent aufgegriffen (und - wie ich finde – überzeugend eingelöst).

Hier wurde ein Mega-Thema aktualisiert, das für Andreas Vohns sehr früh zu einer Herzensangelegenheit geworden war: die komplexe Wechselwirkung Mensch-Mathematik-Gesellschaft. In dieser Domäne war er ein geachteter Gesprächspartner.

Liebe Kolleginnen und Kollegen, verehrte Gäste, im Rückblick entsteht ein klares Bild: Viele in unserer Community sind durch Andreas' Persönlichkeit, seine Sichtweisen und Ideen in einer besonderen Weise inspiriert worden. Insgesamt werden es diese genauen Erinnerungen sein, die uns trösten können.

Rainer Danckwerts

Siegen / Berlin im Oktober 2022

Thomas JAHNKE, Universität Potsdam

jahnke@uni-potsdam.de

Das Schriftwerk von Andreas Vohns – eine Eulogie

Einleitung/Emeritierung

> „Die Katze füttert die Nachbarin."

Die deutsche Sprache flektiert und konjugiert Substantive und Verben in einem Maße, das ermöglicht, die Stellung der Wörter in einem Satz recht frei zu wählen. Meist ist das ohne Sinnverlust oder Erzeugung von Mehrdeutigkeit möglich. Wenn Frau Müller ihre Urlaubsvorbereitungen mit dem Satz

> „Die Blumen gießt mein Schwager, die Katze füttert die Nachbarin, die Post ist abbestellt."

erläutert, verstehen wir das, ohne zu zögern oder Surreales zu vermuten. Letzteres stellt sich erst ein, wenn wir noch einmal darüber nachdenken, was wir da gerade gehört haben:

> „Die Blumen gießt mein Schwager, die Katze füttert die Nachbarin, die Post ist abbestellt."

Wie kann es denn sein, dass die Katze die Nachbarin füttert? Diesen sprachlichen Doppelsinn hat Andreas Vohns genutzt, als er sein ‚Grußwort des Schriftführers zur Verabschiedung von Thomas Jahnke in den Ruhestand – Potsdam, 11.7. 2014' mit den Satz

> „Thomas Jahnke hat die Mathematikdidaktik gestört."

begann. Wer hat da wen gestört? Wie auch immer. Von mir soll heute natürlich keine Rede sein (außer dieser), sondern von dem Sprach- und Geisteswitz von Andreas Vohns und seinem Schriftwerk.

David Kollosche hat letzteres vorsichtig und nicht überlappungsfrei sortiert (s. u.) in

- Reflexionen zu Theorie und Methodik der Mathematikdidaktik,
- Lehrerbildung,
- Civic Education und Normative Modellierung,
- Bildungstheorie des Mathematikunterrichts,
- Fundamentale Ideen,
- Stoffdidaktik aus reflektierter Sicht

und Miscellanea etwa zur GDM oder andere, die sich schwer zuordnen lassen. Beim Eintauchen, Lesen und Wiederlesen der Schriften von Andreas Vohns

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 19–30). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

wurde mir zunehmend bewusst, dass ich die Überschrift zu meinen Ausführungen hier leider unbescheiden, ja vermessen wählte. Gedrängt durch Eile der Veranstalterinnen dieser Tagung, emphatisch und voller Empathie von meiner Seite fiel sie zu vollmundig aus, als könne ich den Horizont seines Schriftwerkes mit Ihnen abschreiten. Das ist mir heute nicht möglich. Sein Schriftwerk ist umfangreicher und vielfältiger und tiefer, als mir bewusst war. Stattdessen will ich es also bescheidener mit dem nicht gerade mitreißenden Titel dieser Tagung „Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken" halten und auf einzelne Momente seiner Schriften eingehen, statt mich hier zu einem summa summarum aufzuschwingen, das mir – ob nun eulogisch oder kritisch – irgendwie auch nicht zusteht; es wäre, wie man im Angelsächsischen formuliert, unangemessen. Patronizing in welcher Art auch immer will ich nach Kräften vermeiden.

Denn sie wissen nicht, was sie tun

Die jähe Penetration der quantitativen empirischen Forschung in die Mathematikdidaktik hat inzwischen pandemische Züge angenommen. Eine Kritik des instrumentellen Verstandes scheint ihrer Selbstgefälligkeit grundsätzlich – also dem Grunde nach – schlicht obsolet. Ihre Datenhörigkeit und -gewissheit überdeckt das Fehlen jeglicher Reflexion ihrer Methoden. Wie diese die mit ihnen erzielten Ergebnisse generieren und formen, interessiert nicht. Hat man erst einmal Zahlen generiert, dann liefert die Statistik Erkenntnisse wie am Fließband, die mathematische Gewissheit suggerieren. Man gibt vor, schlicht zu messen, was den so generierten Aussagen eine eigene naturwissenschaftliche Faktizität verleihen soll. Solchem Denken ist schwer beizukommen. Es verkapselt sich mit Hilfe der vermeintlichen Untrüglichkeit der Mathematik, es scheint eigentümlich theoriefrei, also gar nicht dem geisteswissenschaftlichen Disput ausgesetzt und verpflichtet, sondern gleichsam deren Gegenpol. Aber "there is a crack in everything, that's how the light gets in". Andreas Vohns hat sich mit dem Rasch-Modell und seinen Implikationen befasst und ihm gelingt sogar ein – wie er selbst titelt – „stoffdidaktischer Zugang zur probabilistischen Modellierung mathematischer Leistung". Eine stoffdidaktische Sternstunde. Unter Rückgriff auf ein Verfahren von Zermelo (1929) ist dieser so einfach und verblüffend, dass ich voller Bewunderung mich nicht enthalten kann, wenigstens die Ausgangsfrage in seinen Worten hier zu zitieren:

> Ein Schach-Verein mit 14 Mitgliedern will seine 5 spielstärksten Mitglieder zu einem internationalen Turnier schicken. Die Mitglieder unterteilen sich in 5 „Meister" (waren im letzten Jahr beim internationalen Turnier) und 9 „Stümper" (waren im letzten Jahr nicht dabei). Es finden zwei Runden statt. Erste Runde: Jeder Meister tritt gegen jeden Stümper an. Zweite Runde: Alle Meister treten gegeneinander an, ebenso alle Stümper gegeneinander. Zum internationalen Turnier fahren diejenigen

> Spieler, die insgesamt die größte Anzahl an Siegen für sich verbuchen können.
> Das Turnier muss nach der ersten Runde abgebrochen werden. Wie kann man nun entscheiden, wer insgesamt am besten war?[1]

Aus den Meistern werden später Personen, aus den Stümpern werden Items. Für die erstrebte Sortierung muss Intransivität vermieden werden, was man erreicht, indem man die empirisch aufgetretenen relativen Häufigkeiten von Siegen durch geglättete Gewinnwahrscheinlichkeiten mit Hilfe einer speziellen logistischen Funktion ersetzt. Nicht passende Items werden ausgeschlossen, die Personen werden derart virtualisiert, dass man nun auch messen kann, wie sie Aufgaben lösen, die sie nicht bearbeitet haben. Wer näheren Aufschluss haben will und erläuternde Folien in diesem Vortrag oder zu diesem Problem vermisst, der kann im Internet einen Satz von 48 Folien finden, mit denen Andreas Vohns die Einzelheiten erklärt.[2]

Wer keinen näheren Aufschluss will, dem sollte man untersagen, mit stolzer Brust und wissenschaftlicher Manier PISA-Ergebnisse zu verkünden, als habe er nur bei den Schülerinnen und Schülern korrekt Fieber gemessen. In seinem Vortrag „Bildungsstandards M8: Wie kommen die offiziellen Zahlen zustande und was sagen sie (nicht) aus?“[3] hat Herr Vohns dann an einer konkreten Untersuchung ausbuchstabiert, um eine Vokabel eines seiner Mitstreiter zu verwenden, was von den hehren Aussagen und Gewissheiten von PISA & Co noch bleibt, wenn man die bei ihrer Erzeugung eingesetzten statistischen Verfahren analysiert.

Modellierungen – ein Steckenpferd der Mathematikdidaktik

Es ist hier nicht die Zeit und der Ort, detailliert zu schildern mit welchem Ernst, welcher Emphase und welchem Impetus das Modellieren Eingang in die Mathematikdidaktik fand. Stichworte sollen hier assoziativ genügen:

National ISTRON und die Schriftenreihe „Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht“, international ICTMA – the International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications.

In der deutschen Mathematikdidaktik fand diese Entwicklung einen oder vielleicht auch ihren Höhepunkt in einem Diagramm von Blum und Leiß, in dem im

[1] Vohns, A. (2015). Zermelo, Rasch, Schrödinger: Ein stoffdidaktischer Zugang zur probabilistischen Modellierung mathematischer Leistung. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 956–959). WTM-Verlag.

[2] Vohns, A. (2015). Zermelo, Schrödinger, Rasch (Foliensatz). Slideshare. https://de.slideshare.net/andreasvohns/zermelo-schrdinger-rasch

[3] Vohns, A. (2014). Bildungsstandards M8: Wie kommen die offiziellen Zahlen zustande und was sagen sie (nicht) aus? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 47*, 91–107. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte

Jahr 2005 der sogenannte Modellierungskreislauf dargestellt wurde. In zwei Wolken, von denen die eine - in recht eigenwilliger Form – mit ‚Rest der Welt', die andere ellipsenförmige mit ‚Mathematik' betitelt ist, sieht man sieben bezifferte Pfeile die vermutlich Modellierungstätigkeiten zum Ausdruck bringen sollen: 1 Verstehen, 2 Vereinfachen/Strukturieren, 3 Mathematisieren, 4 Mathematisch arbeiten, 5 Interpretieren, 6 Validieren, 7 Darlegen/Erklären.

Wie sehr solche begriffliche Stufung schließlich in der schulischen Praxis doch auf den Hund (oder auf die Kanutour) gekommen ist, kann man einer Handreichung entnehmen, die hoffentlich nicht auf die genannten Theoretiker zurückgeht. Dort liest man:

Alle sieben Schritte des Modellierungskreislaufs werden im Weiteren am Beispiel der Aufgabe „Kanutour" (Anforderungsbereich III) exemplarisch konkretisiert:

Die 21 Schüler der Klasse 8e möchten eine Kanutour machen. Leider sind im Kanuclub nicht genügend Kanus vorhanden. Daher möchte Frau Krell einen Kleintransporter mit Anhänger mieten, um weitere Kanus zu transportieren. In der Zeitung findet Frau Krell die beiden folgenden Angebote.

1. Angebot	2. Angebot
Kleintransporter mit Anhänger!	**Kleintransporter mit Anhänger!**
Einmaliger Grundpreis: 90 €	Einmaliger Grundpreis: 110 €
Preis pro gefahrenem Kilometer: 25 Cent (Kilometerpauschale)	Preis pro gefahrenem Kilometer: 0,15 € (Kilometerpauschale)

Vergleiche die beiden Angebote.

Berate Frau Krell bei der Wahl eines Angebots für einen Kleintransporter mit Anhänger.

Notiere deine Argumente.

Abb. 1. Beispielaufgabe aus den Handreichungen zu VERA 8[4]

Wir haben hier eine mäßige interessante Aufgabe vor uns, die trotz aller Kanus, Kleintransporter, Kilometerpauschalen und der 21 Schüler von Frau Krell in den Bereich der linearen Funktionen, linearen Gleichungen oder sogar Ungleichungen gehört, in der man aber weder die sieben genannten Modellierungstätigkeiten findet noch einen Kreislauf. Der Modellierungskreislauf ist zu einem trivialisierten didaktischen Zirkel geworden. Nun didaktische Methoden kommen und gehen, mit irgendwelchen Inhalten muss man die Studierenden in einschlägigen Seminaren ja beschäftigen. Mathematikdidaktik als begriffsstrotzende Wissenschaft der buntlackierten Holzwege?

[4] Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (o. J.). *Handreichung VERA 8 Mathematik 2009: Testheft A.* S. 79. Niedersächsicher Bildungsserver. https://www.nibis.de/nli1/allgemein/gosin/vergleich/v8-2009/Mathe_Handreichung_THA.pdf

Andreas Vohns formuliert dazu – gelassener als ich:

> „Mathematisches Modellieren“ als Kompetenz zu fordern oder zu fördern ist auch deshalb so schwierig, weil hier etwas zum Standard, zur Routine werden soll, was ursprünglich gerade als Alternative zur (Erstarrung des Mathematikunterrichts in der) Routine in die fachdidaktische Diskussion Eingang gefunden hat. Wenn mehr „mathematisches Modellieren“ im Sinne einer „inputorientierten“ Fachdidaktik gefordert wird und wurde, dann ging und geht es dabei immer auch darum, den Mathematikunterricht aus übermäßiger Routiniertheit und Verfahrensorientierung herauszulösen und Räume für authentisches, kreatives, bisweilen auch ergebnisoffenes Arbeiten zu schaffen. Etwas zur Kompetenz zu erheben, die im Sinne einer output-orientierten Fachdidaktik test- und messbar sein soll, schließt solche Räume aber zwangsläufig wieder ein Stück weit.[5]

Ich würde hier allerdings weniger den Kompetenzlerinnen und Kompetenzlern die Schuld geben und halte das eher für ein allgemeines Phänomen: Wenn man einen Lerngegenstand, eine Idee oder ein Projekt schulifiziert, dann wird er oder sie oder es ein anderer, eine andere, ein anderes. Aufbrechen lässt sich das allenfalls individuell und lokal und in actu, nicht aber durch eine Lehrplanisierung. Man kann das im Kleinen daran erkennen, dass schon die einfachste mathematikhaltige Problemstellung innerhalb und außerhalb des Schulunterrichts eine ganz andere Bedeutung und in dem meisten Fällen auch eine andere Lösung haben wird. Im Großen ist die schulische Formation und Deformation, die innere Formbestimmung, wie es bei Marx heißt, noch ungleich mächtiger.

Vohns selbst hat mit seinen Arbeiten

- „Die Mathematisierung der Menschenwürde: Ein mathematikdidaktischer Kommentar zum „Hartz IV“-Urteil des Bundesverfassungsgerichts“ (2010),
- „Relative Armut, relative Menschenwürde – relatives Desinteresse?“ (2010),
- „Relative Armutsgefährdung: Nur eine Zahl?“ (2013)

gezeigt, dass man den Mathematikunterricht und die Mathematikdidaktik und den Modellierungsgedanken auch ernstnehmen kann. Momente der Klärung und der Aufklärung werden hier zum Zentrum des Unterrichts. Ich lese das als einen Gegenpol zu Blum & Co, der die didaktische Spielwiese umso deutlicher als solche bewusst macht.

[5] Vohns, A. (2013). Zur Bedeutung mathematischer Handlungen im Bildungsprozess und als Bildungsprodukte. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess: Philosophische, historische und didaktische Perspektiven* (S. 319–333). Springer. S. 329.

„Mit Blick auf die Realitätsbezüge“ schreibt Vohns übrigens an anderer Stelle:

> Ich denke, wir tun weder den Anwendungen noch der „mathematical literacy“ einen Gefallen damit, wenn wir lauter Anwendungen in den Unterricht hereinnehmen, die entweder völlig schief dargestellt oder eben gar nicht wirklich sachkundlich geklärt werden.[6]

Inhaltlich wird dieser Aussage wohl kann jemand widersprechen, allein die Schulbuch- und nicht zuletzt die Abituraufgaben tun es tausendfach. Subkutan wird dabei auch noch gelehrt, dass jedes mathematikhaltige Problem auch mit Mathematik zu lösen sei. Eine verhängnisvolle Lehre, die die Vorstellung einer Allgemeinbildung geradezu disziplinär widerruft.

Basso Ostinato

Ein basso ostinato in den Schriften von Andreas Vohns ist die mal explizite und mal implizite Auseinandersetzung mit dem Begriff und der Aufgabe von Bildung. Dafür stehen zum Beispiel seine zentralen Aufsätze, die auf Vorträge zurückgehen:

- „Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage“ (2017)
- „Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage“ (2018)

Dort ist zu lesen:

> Ich könnte es mir jetzt leicht machen und alles, was im Umfeld der Kompetenzorientierung in der Lehrer(innen)(aus)bildung passiert, in Grund und Boden verdammen, mich im Lichte großer Gestalten wie Humboldt, Diesterweg, Spranger und Luhmann sonnen und die Kompetenzorientierung zum Untergang des Bildungsgedankens, wenn nicht des Abendlandes überhaupt erklären, mich auf der Seite der Guten wähnen, den aktuellen kompetenzorientierten Mainstream auf Seiten der Bösen und damit klare Fronten schaffen. Ich halte das für wenig produktiv und – was trotz des par force Ritts durch 200 Jahre Bildung und Lehrerausbildung hoffentlich klar geworden ist – auch für kaum angemessen. Vielleicht sollten wir uns (…) daran gewöhnen, dass es jeder Epoche notwendig zukommt, Bildung beständig „anders zu denken“ und in der Kompetenzorientierung weder vom Grundsatz her Gutes noch Schlechtes gegeben ist, aber eben etwas potentiell Gefährliches

[6] Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (105), 8–21.

> – nur teilt es diese Eigenschaft eben letztlich auch mit dem Bildungsdenken vergangener Tage.[7]

Und:

> Mein Punkt ist nicht, dass an den Transformationen oder am Kompetenzbegriff alles schlimm ist, sondern dass alles beides, althergebrachtes hochtrabendes idealistisches Bildungsdenken genauso wie neues pragmatisches-positivistisches Kompetenztesten, potentiell gefährlich ist. Das hat durchaus ein „silver lining", denn die Antwort auf die Frage nach dem Ausgang der Epoche mathematischer Bildung könnte dann lauten: Nicht, so lange die Bedingung ihrer Möglichkeit ernsthaft bedacht wird.[8]

Die Wertung als ‚Gefahr', die in den beiden Resümees für mich etwas überraschend auftritt, ist, wie Vohns in dem nicht unernsten Beitrag in einer Fußnote angibt eine Anlehnung oder Übernahme von Foucault. Er zitiert diesen mit den Worten:

> My point is not that everything is bad, but everything is dangerous, which is not exactly the same as bad. If everything is dangerous, then we always have something to do.[9]

Gefahr ist also ein Motiv und eine Aufgabe zu handeln.

Den Hauptvortrag schließt Vohns mit vier Thesen für und wider den Ablass der Bildung' ab, von denen ich die erste nebst ihrer Erläuterung trotz ihrer Länglichkeit als ein den Autor charakterisierendes Dictum zitiere:

> Die Bedingung der Möglichkeit von „mathematischer Bildung" bzw. „mathematischer Allgemeinbildung" oder ggf. „mathematical literacy" ernsthaft zu bedenken heißt, sich mit deren Charakter als regulativen Ideen (Führer) zu arrangieren – alles andere ist im Sinne Damerows Ideologie.
> Wir können als Mathematikdidaktiker(innen) und oder als Mathematiklehr(innen) durch Mathematikunterricht ebenso wenig gewährleisten, dass Lernende zu „konstruktiven, interessierten und reflektierten Bürgerinnen oder Bürgern" werden oder zu entscheidungskompetenten Laien, welche effektiv die Expertinnen kontrollieren können, wie der Mathematikunterricht des 19. und frühen 20. Jahrhunderts nicht

[7] Vohns, A. (2017). Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage. In A. Vohns, G. Nickel & R. Krömer (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* (S. 139–168). Universitätsverlag Siegen.

[8] Vohns, A. (2018).

[9] Ebd.

> gewährleisten konnte, dass die Lernenden „Gesinnung und Charakter“ ausbilden konnten und dann einmal „gute und anständige Menschen und Bürger“ wurden.
> Aber wir können uns vielleicht bemühen, unser Möglichstes zu tun, den Lernenden im Sinne Wenigers und Klafkis ein wohl überlegtes „Angebot“ zu machen, ihnen eine – mit Winter gesagt –, Erfahrung davon zu ermöglichen, was Mathematik sein kann, was sie für die Menschen und die Gesellschaft bedeuten kann, warum es sich lohnen kann, sich auf sie einzulassen und wo es besser sein kann, sich ihrer Anwendung zu verweigern.[10]

Zutiefst stimme ich hier dem Begriff Angebot zu: All unser Lehren, all unsere Bemühungen sind ein Angebot. Nimmt man die Lernenden ernst, dann muss man von der Vorstellung Abschied nehmen, man könnte sie sich passgenau zurecht backen.

Plädoyer für eine digitale Vohns-Bibliothek

Ich will hier einen doppelten Anlauf nehmen.

1. Als Lutz Führer 1993 nach einer 12-jährigen Tätigkeit als Mathematik-Fachleiter für das gymnasiale Lehramt auf einen Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik in an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, wie sie damals noch hieß, in Frankfurt am Main berufen wurde, war einer seiner ersten Vorschläge, dieser Disziplin ein zehnjähriges Publikationsverbot zu erteilen und stattdessen eine Lesepflicht zu verordnen, die darauf dringt, das bereits einschlägig Publizierte zur Kenntnis zu nehmen. Es wurde und wird mehr geschrieben als gelesen. Die Bedeutung und Expertise einer oder eines Gelehrten drücken sich bekanntlich in seiner Publikations- und nicht in einer Leseliste aus, auch wenn zuweilen deren Existenz und Ausmaß durch einen überlangen Literaturapparat am Ende der Publikationen suggeriert wird. Nun, wenn mehr gelesen werden soll – übrigens auch von den Studierenden, muss die Literatur auffindbar und zugänglich sein.
2. Als im Jahr 2000 Jahrestagung der GDM in Potsdam stattfand, kam überraschend der spätere Weltmathematiker Martin Grötschel, Generalsekretär der Internationalen Mathematiker Union (IMU) von 2007 bis 2014, zu mir und bat, ja drängte einen kurzen Vortrag halten zu dürfen, natürlich nicht in irgendeiner Sektion, sondern vor dem Plenum. Wir haben ihm das an einem der folgenden Tage auf Kosten der Mittagspause eingeräumt, so dass er in der Kürze einer Viertelstunde ohne große Einleitung oder motivierende Hinführung jäh verkündete, wer keine Webseite habe, der sei schon tot, vorausgesetzt, er habe überhaupt je gelebt.

[10] Ebd.

Ich hielt solche Aussagen für übertrieben. Aber schon damals war mir bewusst, dass unsere Disziplin einer digitalen Präsenz systemnotwendig bedarf. Inzwischen hat die Mathematikdidaktik jedoch einen digitalen Suizid begangen, von dem sich nur schwerlich und nicht ohne gravierende Folgen erholen wird. Auf der Webseite Zentralblatt-math.org ist zu lesen:

> **MathEduc no longer available**
>
> At this address, the MathEduc database, published by FIZ Karlsruhe and the German Society for Didactics of Mathematics (GDM), has been available until December 31, 2019.
> For information on math education, we refer to Madipedia.

Selbst der Vordenker von Madipedia, Ulrich Kortenkamp, gesteht schon bei deren Konzeption:

> Madipedia kann die Funktion der etablierten MathEduc Datenbank, die mathematische Publikationen verzeichnet, nicht übernehmen. MathEduc hat einen enormen Datenbestand, der kontinuierlich ausgebaut wird, und verfügt über Mittel zum weiteren Ausbau und für die technische Infrastruktur.[11]

Ein digitaler Selbstmord also. Noch heute kann man auf der Webseite des Berliner Arbeitskreis Information http://bak-information.de/iud-branchenbuch/unser-branchenbuch/m/mathematics-education-database-matheduc/ (14.01.2023) lesen, was da mit dem Jahreswechsel 2019/2020 sang- und klanglos untergegangen ist:

> Mathematics Education Database MathEduc
>
> **Beschreibung**
> Die Literaturdatenbank MathEduc enthält als weltweit einzige Datenbank Hinweise auf Artikel und Bücher zur Didaktik der Mathematik und Informatik. Dazu gehören Dokumente über Lehrmaterial, Curricula, Arbeiten, die auch Soziologie, Psychologie, Anthropologie und Philosophie mit einbeziehen, außerdem Unterhaltungsmathematik, Geschichte der Mathematik und populäre Mathematik für Laien.
>
> **Sprache:**
> Englisch/Deutsch (teilweise Französisch, Spanisch und weitere Sprachen)
>
> **Sachgebiete:**
> Didaktik: Mathematik
> Didaktik: Informatik
> Mathematik für Laien

[11] Kortenkamp, U., & Fleckenstein, S. (2013). Madipedia: Das Wiki für die Mathematikdidaktik. *Cantor-Heft, 15,* 25–39.

Dokumentationsart:
Literaturdokumentation

Datenbankumfang:
Über 160.000

Zeitliche Abdeckung:
ab 1975

Regionale Abdeckung:
weltweit

Aktualisierung:
zweimonatlich

Jährlicher Zuwachs:
ca. 5.500

Produzent(en) der Datenbank:
FIZ Karlsruhe – Leibniz-Institut für Informationsinfrastruktur
Abteilung Mathematik und Informatik
Franklinstr. 11, 10587 Berlin
https://www.fiz-karlsruhe.de/

Die Datenbank liegt auf bei:
http://www.zentralblatt-math.org/matheduc

Arbeitshilfen:
Benutzeroberfläche mit umfangreichen Such- und Filterfunktionen. Hilfeseite.

Ich war von 2013 bis 2016 der vorletzte Editor-in-Chief von MathEduc. Die reizvolle Aufgabe war sich neben der weltumspannenden Datenbank ZBmath zu behaupten als kleine Schwester, die von dieser renommierten Verwandtschaft profitierte. ZBmath ist inzwischen übrigens inzwischen in die konträre Richtung gegangen, Öffnen statt Schließen, und ist jetzt kostenfrei zugänglich. Ein wichtiges und sehr einflussreiches Werkzeug, das historisch gesehen eines der wenigstens Überbleibsel des goldenen Zeitalters der Mathematik in Deutschland ist.

Genug des Schreckens und des Lamentierens. ‚Unwiederbringlich' heißt ein Roman von Theodor Fontane. Texte, die wir für wichtig halten und bewahren wollen, müssen digital zugänglich sein. Studierende nehmen andere kaum noch war. Daher mein zunächst noch vager Vorschlag, eine digitale Andreas Vohns Bibliothek aufzubauen, die mit leichter Hand moderiert Texte zu Mathematik und Bildung wie die von Vohns versammelt und zugänglich hält. In einer Grenzziehung, was da hineingehört, muss man nicht kleinlich sein.

Publikationsliste von Andreas Vohns

Aus Gründen einer ansprechenden Textanordnung folgt die Publikationsliste erst nach diesem Beitrag, wodurch sie möglicherweise als Anhang zu den vorstehenden Äußerungen aufgefasst werden könnte. Das Gegenteil ist der Fall: diese sind nur die Vorrede, der Vorhang für das Schriftwerk von Andreas Vohns – ein Spalt breit geöffnet für inquisitive Rezipientinnen und Rezipienten.

Angefügt sind Angabe zu Andreas Vohns auf den WEBseiten des kommerziellen Anbieters Researchgate.net. Auf der WEB-Seite researchgate.net führt Andreas Vohns in einer Selbstanzeige zu seiner Person aus:

> **Introduction**
> I'm an Associate Professor working in the field of mathematics education at the University Klagenfurt in Austria. My general interests include conceptions of mathematical literacy, critical mathematics education and/or "Bildung", fundamental ideas as a guiding principle in mathematics education and the teaching and learning of elementary and analytical geometry at the school and university level.
>
> **Disciplines**
> Educational Technology * Teaching Methods * Teacher Education
>
> **Skills and expertise**
> Mathematics Education * Mathematical Thinking * Didactics * Education Research * Curriculum *Teacher Education * Educational Technology * Teaching Methods * Teaching and Learning * Pedagogy and Education * Teaching * Teacher Training * Curriculum Development * Learning * Professional Development * Educational Theory *Pedagogy
>
> **Languages**
> German * English
>
> **Activity on ResearchGate**
> 99 Research Items * 4 Projects

Andreas Vohns auf YouTube

Zum Schluss ein schönes Vohnszitat, das alles bündelt, an dem man sich wärmt und erfreut? Ich habe das nicht gefunden. Und welches Menschenleben könnte man schon in einem Satz oder unter einem Motto zusammenfassen?

Stattdessen kann man ihn sehen, hören und wenigstens digital erleben in seinen YouTube-Videos: Zum Beispiel seine Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik und zur Elementaren Diskreten Mathematik, sowie den Vortrag „Das Digitale als Bildungsherausforderung für den Mathematikunterricht".

Andreas Vohns hat die Mathematikdidaktik nicht gestört, er hat sie bereichert und erweitert mit seinem Schriftwerk, seiner Erscheinung, seinem Auftreten, seinem Witz und seinem Schalk.

David KOLLOSCHE, Universität Klagenfurt
david.kollosche@aau.at

Sortierte Auflistung der Veröffentlichungen von Andreas Vohns

Auf die Bitte von Thomas Jahnke hatte ich mich nach dem Ableben von Andreas Vohns darum bemüht, eine Übersicht der Veröffentlichungen von Andreas zu erstellen. Bei über 60 Publikationen wird eine solche Liste schnell unübersichtlich, weshalb ich zwei Entscheidungen traf: Zum einen habe ich darauf verzichtet, Buch-Herausgeberschaften, Rezensionen und Kurzbeiträge wie in den *Beiträgen zum Mathematikunterricht* der GDM aufzuführen. Zum anderen habe ich mir erlaubt, die Beiträge thematisch zu sortieren. Die dabei verwendeten Kategorien sind sicherlich nicht überschneidungsfrei. So ist Thomas Jahnke zuzustimmen, wenn er Andreas' JMD-Beitrag „Zur Rekonstruierbarkeit impliziter Standardsetzungen zentraler Prüfungen mit Hilfe des Rasch-Modells" (2012) nicht nur als Beitrag in der Kategorie „Reflexionen zu Theorie und Methodik der Mathematikdidaktik" sieht, sondern auch als „stoffdidaktische Sternstunde" bezeichnet (s. o.). In der Hoffnung, dass diese Auflistung nicht nur die Breite und Tiefe des akademischen Schaffens von Andreas Vohns dokumentiert, sondern der interessierten Kollegin auch Orientierung spendet beim Einarbeiten in dieses Schaffen, folgt nun die sortierte Auflistung.

Reflexionen zu Theorie und Methodik der Mathematikdidaktik

Bikner-Ahsbahs, A., & Vohns, A. (2019). Theories of and in mathematics education. In H. N. Jahnke & L. Hefendehl-Hebeker (Hrsg.), *Traditions in German-speaking mathematics education research* (S. 171–200). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11069-7_7

Jahnke, H. N., Biehler, R., Bikner-Ahsbahs, A., Gellert, U., Greefrath, G., Hefendehl-Hebeker, L., Krummheuer, G., Leuders, T., Nührenbörger, M., Obersteiner, A., Reiss, K., Rösken-Winter, B., Schulz, A., Vohns, A., Vom Hofe, R., & Vorhölter, K. (2017). German-Speaking traditions in mathematics education research. In G. Kaiser (Hrsg.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (S. 305–319). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_20

Bikner-Ahsbahs, A., & Vohns, A. (2016). Theories in mathematics education as a scientific discipline. In A. Bikner-Ahsbahs, A. Vohns, O. Schmitt, R. Bruder & W. Dörfler (Hrsg.), *Theories in and of mathematics education* (S. 3–11). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42589-4_2

Vohns, A. (2012). Zur Rekonstruierbarkeit impliziter Standardsetzungen zentraler Prüfungen mit Hilfe des Rasch-Modells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(2), 339–349. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0041-y

Vohns, A. (2014). Bildungsstandards M8: Wie kommen die offiziellen Zahlen zustande und was sagen sie (nicht) aus? *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, 47*, 91–107. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 31–33). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Lehrerbildung

Vohns, A. (2019). Bildung, professionalization and competencies: Clashing narratives in German mathematics teacher education research and practice. In J. Subramanian (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 864–873). MES10.

Vohns, A. (2017). Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernst gemeinte Frage. In A. Vohns, G. Nickel & R. Krömer (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* (S. 139–168). Universitätsverlag Siegen.

Vohns, A. (2009). Lehrer sein, das ist nicht schwer, Lehrer werden umso mehr. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (87), 4–9.

Civic Education und Normative Modellierung

Vohns, A. (2018). Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft: Historische, philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 203–219). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-16123-1_19

Vohns, A. (2017). Einkommensteuertarife mit Schulmathematik erkunden: Ein Zugang aus bildungstheoretischer Perspektive. *Der Mathematikunterricht, 63*(3), 3–13.

Vohns, A. (2017). Bildung, mathematical literacy and civic education: The (strange?) case of contemporary Austria and Germany. In A. Chronaki (Hrsg.), *Mathematics education and life at times of crisis* (S. 968–978). University of Thessaly Press.

Lengnink, K., Meyerhöfer, W., & Vohns, A. (2013). Mathematische Bildung als staatsbürgerlich Erziehung? *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 2–7.

Vohns, A. (2013). Relative Armutsgefährdung: Nur eine Zahl? *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 49–58.

Vohns, A. (2010). Die Mathematisierung der Menschenwürde: Ein mathematikdidaktischer Kommentar zum „Hartz IV"-Urteil des Bundesverfassungsgerichts. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (89), 4–12.

Vohns, A. (2010). Relative Armut, relative Menschenwürde – relatives Desinteresse? *Gesellschaft, Wirtschaft, Politik, 59*(3), 367–375.

Bildungstheorie des Mathematikunterrichts

Vohns, A. (2020). Zur Spannung von Fach und Bildung: Gedanken zum Mathematikunterricht. In M. Heer & U. Heinen (Hrsg.), *Die Stimmen der Fächer hören: Fachprofil und Bildungsanspruch in der Lehrerbildung* (S. 231–249). Schöningh.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (105), 8–21.

Vohns, A. (2016). Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts. *Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (100), 35–42.

Vohns, A. (2015). Argumentationen in der Mathematik – Mathematik in Argumentationen: Ein bildsames Spannungsverhältnis? In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 123–137). Waxmann.

Vohns, A. (2013). Zur Bedeutung mathematischer Handlungen im Bildungsprozess und als Bildungsprodukte. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess: Philosophische, historische und didaktische Perspektiven* (S. 319–333). Springer.

Fundamentale Ideen

Vohns, A. (2016). Fundamental ideas as a guiding category in mathematics education: Early understandings, developments in German-speaking countries and relations to subject matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(S1), 193–223. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0086-4

Vohns, A. (2016). Algebraisierung, Geometrisierung und Kapselung: Globale Ideen bei den Vektoren im Unterricht zur Analytischen Geometrie. *Der Mathematikunterricht, 62*(4), 4–14.

Vohns, A. (2012). Grundprinzipien des Messens: Erkunden, Vernetzen, Reflektieren. *mathematik lehren,* (173), 20–24.

Vohns, A. (2010). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 227–255. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0012-0

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht: Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie*. Books on Demand.

Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 26*(1), 52–79. https://doi.org/10.1007/BF03339006

Stoffdidaktik aus reflektierter Sicht

Vohns, A. (2013). Von der Vektorrechnung zum reflektierten Umgang mit vektoriellen Darstellungen. In H. Allmendinger, K. Lengnink, A. Vohns & G. Wickel (Hrsg.), *Mathematik verständlich unterrichten: Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung* (S. 147–166). Springer.

Vohns, A. (2013). Algebraisieren erleben und reflektieren: Dreieckstransversalen und besondere Punkte. *Praxis der Mathematik in der Schule,* (49), 37–41.

Zur GDM

Toepell, M., & Vohns, A. (2016). Zur Gründung und Entwicklung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. *Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (101), 12–17.

Toepell, M., & Vohns, A. (2016). The foundation and development of the GDM. *Mitteilung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* (Suppl.), 3–12.

Nicht zugeordnet

Vohns, A. (2014). Zur Dialektik von Kohärenzerfahrungen und Differenzerlebnissen: Bildungstheoretische und sachanalytische Studien zur Ermöglichung mathematischen Verstehens. Profil.

Vohns, A. (2011). Mathematik im Kontext Bericht aus dem Projekt „Fächerkonzepte und Bildung“. In M. Helmerich, K. Lengnink, G. Nickel & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik verstehen: Philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 221–233). Vieweg + Teubner. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9836-4_18

1.
Fundamentale Ideen des Mathematikunterrichts

Henning HESKE, Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Krefeld
henning.heske@zfsl-krefeld.nrw.schule

Entwicklung und Perspektiven der bildungstheoretischen Grundlegung des Faches Mathematik am Beispiel der nordrhein-westfälischen Lehrpläne

Nach Vohns (2007) gelten „grundlegende Ideen" als wesentliche fachdidaktische Kategorie, die helfen soll, das Curriculumproblem zu lösen, d. h. eine Auswahl mathematischer Inhalte für die allgemeinbildende Schule begründen zu können. Anhand der Lehrpläne für das Fach Mathematik des Bundeslandes Nordrhein-Westfalen, insbesondere der Gymnasialen Oberstufe, wird exemplarisch untersucht, welche Rolle diese grundlegenden Ideen ebenso wie Allgemeinbildungskonzepte für die Konzeption des Mathematikunterrichts spielten und wie diese sich auf dem Weg zur Kompetenzorientierung veränderte. Es zeigt sich, dass auch das von Vohns weiterentwickelte Meta-Konzept der grundlegenden Ideen nicht geeignet ist, das Curriculumproblem in einem angemessenen Konkretisierungsgrad zu lösen. Das gilt auch für den konzeptionellen Ansatz der drei Grunderfahrungen nach Winter (1995), auf den die bundesweiten Bildungsstandards immer noch aufbauen. Diesbezüglich wird auch die fehlende bildungstheoretische Fundierung dieses fachbezogenen Allgemeinbildungskonzepts kritisiert. Die Befunde münden schließlich in Vorschläge für eine künftige Curriculumentwicklung durch eine ständige Curriculum-Kommission sowie in die Forderung nach einem theoretisch fundierten, zeitgemäßen Allgemeinbildungskonzept.

1. Grundlegende Ideen als fachdidaktische Kategorie des Mathematikunterrichts

In seiner Dissertation beschäftigt sich Andreas Vohns eingehend mit den sogenannten grundlegenden Ideen als wesentliche fachdidaktische Kategorie des Mathematikunterrichts (Vohns, 2007). Zuvorderst stellt er die angestrebte Wirkmächtigkeit und Bedeutsamkeit dieser Kategorie heraus: „Grundlegende Ideen sollen helfen, das Curriculumproblem zu lösen, d.h. mit ihrer Hilfe soll eine begründete bzw. begründbare Auswahl mathematischer Inhalte erfolgen können" (ebd., S. 1). Für die Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts ist das Curriculumproblem von entscheidender Bedeutung, denn seine Lösung gäbe eine Antwort auf die Frage: Was sollen unsere Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik an den allgemeinbildenden Schulen lernen, damit sie an unserer Gesellschaft teilhaben und sie fortentwickeln können?

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 37–47). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Nach Vohns sind grundlegende Ideen in dreifacher Hinsicht bedeutsam. Als erstes mathematisch, da sie typische Elemente der Mathematik und ihrer Strukturen aufzeigen. Zum zweiten in bildungstheoretischer Hinsicht, weil sie die Verbindung zwischen fachlichen Inhalten und allgemeinen Bildungszielen schaffen. Dabei können sie helfen, „den Bildungsauftrag des Faches inhaltsbezogen zu konkretisieren“ (ebd., S. 2). Und schließlich sind sie auch pragmatisch bedeutsam, da sie „Aufschluss über die Lernbarkeit von Mathematik“ (ebd.) geben. Vohns sieht den Begriff der „grundlegenden Idee“ als Oberbegriff und Metakonzept, das die teilweise unterschiedlichen Konzepte der „fundamentalen Ideen“ (vgl. Humenberger & Reichel, 1995), der „zentralen Ideen“ (vgl. Heymann, 1996) sowie der „Leitideen“ (z. B. Einheitliche Prüfungsanforderungen, 2003) miteinschließt. Zudem hat Vohns (2005) den Zusammenhang und das Zusammenwirken zwischen fundamentalen Ideen und Grundvorstellungen schlüssig dargestellt. Einen detaillierten und verlässlichen Überblick über die Genese der Begriffe und der Konzepte sowie die Diskussion darüber in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik findet man in Vohns (2016).

Fundamentale Ideen (1995)
1. Modelle, Sprache und Übersetzungsvorgänge
2. Näherungsverfahren, Näherungswerte und Fehlerkontrolle
3. Stochastik
4. Optimieren
5. Algorithmen
6. Darstellen von Situationen unter einer „mathematischen Brille“ – „Heuristik“
7. Vernetzen mathematischer Sachverhalte – „Projekte“ und „Facharbeiten“

Tab. 1: Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik (Humenberger & Reichel, 1995, S. 30)

Betrachtet man die Liste der sieben von Humenberger und Reichel formulierten fundamentalen Ideen (Tab. 1), so fällt auf, dass einerseits bedeutsame mathematische Gegenstände genannt werden (Modelle, Stochastik, Algorithmen) und andererseits mathematische Tätigkeiten (Optimieren, Darstellen und Vernetzen). Das macht deutlich, dass kein konsistentes theoretisches Konzept dieser Zusammenstellung zugrunde liegt. Dies liegt darin begründet, dass im Mathematikunterricht neben die Gegenstände eben immer auch die aktive Tätigkeit der Lernenden treten muss. Zudem muss einschränkend festgehalten werden, dass Humenberger und Reichel den Fokus auf die angewandte Mathematik gelegt haben, und daher die Mathematik als Struktur mit ihrem induktiven und vor allem deduktiven Vorgehen sich zu wenig in der Liste wiederfindet. Dies gilt vor allem für den Themenbereich Geometrie.

In seinem Vorschlag einer Liste der zentralen Ideen für den Mathematikunterricht reagiert Heymann auf die Problematik in der inkohärenten Zusammenstellung, wie sie bei Humenberger und Reichel sichtbar wurde, indem er sich selbst die

folgende Bedingung vorgibt: „Keine der Ideen soll ausschließlich einen bestimmten mathematischen Stoff repräsentieren.“ (Heymann, 1996, S. 173) Seine Liste soll darüber hinaus eine möglichst konkrete, theoretisch konsistente Antwort auf die folgende von ihm aufgeworfene Leitfrage geben: „Anhand welcher Ideen läßt sich Schülern die besondere Universalität der Mathematik verdeutlichen, die auf Abstraktion und symbolischen Techniken beruht, die mittels Abstraktion gewonnen werden?“ (ebd.) Heymanns Antwort besteht aus sechs zentralen Ideen, die in ihrer Formulierung weitgehend konsistent erscheinen (Tab. 2). Allerdings bleibt fragwürdig, inwieweit sie tatsächlich die gesamten Inhalte des Mathematikunterrichts abdecken. Insbesondere der Themenbereich Stochastik, den Humenberger und Reichel explizit als fundamentale Idee aufführen, lässt sich nur bedingt diesen zentralen Ideen zuordnen.

Zentrale Ideen (1996)
1. Idee der Zahl
2. Idee des Messens
3. Idee des räumlichen Strukturierens
4. Idee des funktionalen Zusammenhangs
5. Idee des Algorithmus
6. Idee des mathematischen Modellierens

Tab. 2: Zentrale Ideen – der Diskussionsvorschlag von Heymann (1996, S. 174)

Auf diesen Vorarbeiten aufbauend, formuliert Vohns in seiner Arbeitsdefinition zusammenfassend, dass eine grundlegende Idee „partiell Aufschluss über Strukturen und Zusammenhänge innerhalb der Mathematik, zwischen Mathematik und dem ‚Rest der Welt‘, zwischen Mathematik und ihren möglichen oder gewünschten Bildungswirkungen, zwischen mathematischen Inhalten und ihrer Lernbarkeit“ gibt (Vohns, 2007, S. 3).

Betrachtet man Vohns’ Katalog grundlegender Ideen (Tab. 3), so fällt – ähnlich wie bei Humenberger und Reichel – die Inkonsistenz in den Begrifflichkeiten auf. Darüber ist sich Vohns selbst im Klaren und er gibt an, „bewusst keine einheitliche Formulierung der Ideen als Begriffe oder Handlungen angestrebt“ zu haben, da es ihm nicht um die Terminologie gehe, „sondern um die Ideen *als Ideen*“ (ebd., S. 91). Dem ist entgegenzuhalten, dass dadurch seine Konzeption mit insgesamt zwölf grundlegenden Ideen unterschiedlicher Art wenig griffig und theoretisch nur bedingt fundiert erscheint. Vohns gliedert seine Ideen in pragmatisch orientierte Ideen, die „mathematischen Objekten zugeneigt“ (ebd., S. 90) seien und eher Lernbereiche benennen (Tab. 3, linke Seite) sowie speziellere und abstraktere Ideen, die „stärker mathematische Vorgehensweisen beschreiben“ (ebd., S. 90; Tab. 3, rechte Seite). Er verzichtet zudem auf eine Extraktion grundlegender Ideen, die dem Bereich Stochastik in spezifischer Weise gerecht

werden, mit der unbefriedigenden Begründung, dass dieser Lernbereich im Rahmen seiner Arbeit nicht behandelt werde. Im weiteren Verlauf seiner Dissertation untersucht Vohns anhand dreier Analysebeispiele, inwieweit sich die grundlegenden Ideen wechselseitig zur Erschließung mathematischer Inhalte eignen. Vohns kommt zu dem Ergebnis, dass sich die sieben grundlegenden Ideen „Zahl, Messen, Strukturieren in der Ebene und im Raum, funktionales Argumentieren, Repräsentation, Symmetrie und Optimalität als hilfreich herausgestellt haben“ (ebd., S. 171). Für eine Generalisierung dieses Befundes und insbesondere bezüglich der Tauglichkeit der anderen fünf formulierten Ideen bedürfe es weiterer bildungstheoretischer und stoffdidaktischer Forschung.

Zahl	Optimalität
	Symmetrie
Messen	Ideation/ Abstraktion
	Exhaustion/ Approximation
Strukturieren in Ebene und Raum	Algorithmus
	Invarianz
	Induktion
Funktionales Denken	Repräsentation

Tab. 3: Vohns’ Vorauswahl grundlegender Ideen (Vohns, 2007, S. 90)

2. Entwicklung der bildungstheoretischen Grundlegung des Faches Mathematik am Beispiel der nordrhein-westfälischen Lehrpläne

Anhand der Lehrpläne für das Fach Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen, insbesondere der Gymnasialen Oberstufe, wird untersucht, welche Rolle diese grundlegenden Ideen, die auch als fundamentale Ideen, zentrale Ideen oder Leitideen bezeichnet wurden und werden, für die Konzeption des Mathematikunterrichts spielten.

In den Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe aus dem Jahr 1981 heißt es:

> Das Fach Mathematik wird daher weniger durch Anwendungsbereiche charakterisiert als vielmehr durch die besondere Methode, möglichst umfassende Strukturmuster bereitzustellen und die in diesen Strukturen möglichen Deduktionen zu beschreiben. (Richtlinien, 1981, S. 26)

Als Ordnungskategorie fungiert hier demnach noch die Strukturmathematik als Relikt der sogenannten „Mengenlehre“ bzw. „Neuen Mathematik“ (vgl. dazu Weiss, 2023). Der Allgemeinbildungsanspruch des Faches wird lediglich indirekt – quasi *ex negativo* – begründet:

> Mathematische Verfahren und Erkenntnisse bestimmen daher die heutigen technischen und gesellschaftlichen Lebensbedingungen des Menschen in so hohem Maße mit, daß ein Verständnis der geschaffenen

> Umwelt ohne mathematische Bildung nur unzureichend möglich ist. (Richtlinien, 1981, S. 27)

Diese Richtlinien bewiesen ein enormes Beharrungsvermögen und galten erstaunliche 18 Jahre lang, bevor sie durch einen neuen Lehrplan ersetzt wurden. Erst Ende der 1990er Jahre wurde in Nordrhein-Westfalen auf grundlegende Ideen und zugleich auch auf Allgemeinbildungskonzepte zur Fundierung und Strukturierung des Curriculums zurückgegriffen, zunächst auf die von Heymann (1996) begründeten sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule sowie seine Liste von zentralen Ideen. Diese bildeten zum ersten Mal 1998 die Grundlage für den Lehrplan der Gesamtschule. Dort heißt es:

> Der Mathematikunterricht hat zu einer zeitgemäßen Allgemeinbildung der Schülerinnen und Schüler beizutragen. […] Für die allgemeinbildende Wirkung ist der unterrichtliche Umgang mit Mathematik ebenso entscheidend wie der behandelte Stoff. So ist Mathematik nicht nur ein gegenstandsbezogenes sondern zugleich ein interaktives Geschehen. (Richtlinien und Lehrpläne, 1998, S. 23)

Der Bezug zu Heymann ist sehr deutlich, denn ein entscheidender Satz in seiner Habilitationsschrift lautet: „Allgemeinbildung im Mathematikunterricht ist eine Frage der *Unterrichtskultur*." (Heymann, 1996, S. 262) Allerdings wurden Heymanns sechs zentrale Ideen nicht exakt übernommen, sondern abgeändert. Die beiden Ideen der Zahl und des Messens wurden zur „Idee des Zählens und Messens" zusammengefasst (vgl. Tab. 4). Zudem wurde die „Idee der Wahrscheinlichkeit" hinzugefügt, offenbar aus der Einschätzung heraus, dass der Themenbereich der Stochastik bei Heymann nicht ausreichend berücksichtigt worden sei. Zu dieser bildungstheoretischen Grundlegung des Faches heißt es wörtlich:

> Zentrale Ideen verbinden Mathematik und außermathematische Kultur. Die kulturell bedeutsame Universalität der Mathematik wird für Schülerinnen und Schüler einsehbar, wenn Unterricht an diesen Ideen angebunden ist." (Richtlinien und Lehrpläne, 1998, S. 25)

Lehrplan Sekundarschule I Gesamtschule Nordrhein-Westfalen 1998
1. Idee des Zählens und Messens
2. Idee des funktionalen Zusammenhangs
3. Idee des räumlichen Strukturierens
4. Idee des Algorithmus
5. Idee der Wahrscheinlichkeit
6. Idee des mathematischen Modellierens

Tab. 4: Die zentralen Ideen im Lehrplan Gesamtschule (Richtlinien und Lehrpläne, 1998, S. 25)

In ähnlicher Weise begründete ein Jahr später der neue Lehrplan für die Gymnasiale Oberstufe die Bedeutung des Faches:

> Es sind zentrale Ideen herauszuarbeiten, die den Zusammenhang zwischen mathematischer und außermathematischer Kultur sichtbar machen. Der Mathematikunterricht muss exemplarisch verdeutlichen, weshalb Mathematik ein so wesentliches Instrument zur rationalen Erkenntnis und Gestaltung von Welt ist, aber auch, wo die Grenzen der Mathematisierbarkeit liegen. (Richtlinien und Lehrpläne, 1999, S. 5)

Auch in diesem Lehrplan wurde die ursprüngliche Liste von Heymann abgeändert. Wie im Gesamtschul-Lehrplan wurde die Idee der Wahrscheinlichkeit hinzugefügt, die Aufteilung in die Idee der Zahl und die des Messens aber beibehalten, sodass die Liste nun aus sieben zentralen Ideen bestand (siehe Tab. 5). Zugleich dienten die zentralen Ideen in erster Linie als „Kern der didaktischen Konzeption“ (ebd., S. 6), sie sollten „rote Fäden“ darstellen, die die mathematischen Gegenstände der Sekundarstufen I und II miteinander verbinden. Damit wurde die didaktische Bedeutung der zentralen Ideen erweitert und in höherem Maße in Anspruch genommen, dadurch eigneten sie sich aber nur noch bedingt als deduktives Instrument, um das Curriculumproblem zu lösen.

Lehrplan Sekundarstufe II Gymnasium/ Gesamtschule Nordrhein-Westfalen 1999
1. Idee der Zahl
2. Idee des Messens
3. Idee des räumlichen Strukturierens
4. Idee des funktionalen Zusammenhangs
5. Idee der Wahrscheinlichkeit
6. Idee des Algorithmus
7. Idee des mathematischen Modellierens

Tab. 5: Die zentralen Ideen im Lehrplan Gymnasiale Oberstufe (Richtlinien und Lehrpläne, 1999, S. 7–11)

So ist es nicht verwunderlich, dass die ersten nordrhein-westfälischen Lehrpläne des 21. Jahrhunderts keinen Bezug mehr auf das Allgemeinbildungskonzept von Heymann nahmen. Auch die grundlegenden Ideen als Meta-Konzept verschwanden als Legitimationsgrundlage des Mathematik-Lehrplans. An ihre Stelle trat der gemeinhin akzeptierte Ansatz der drei Grunderfahrungen nach Heinrich Winter (1995):

> Schülerinnen und Schüler sollen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I
>
> - Erscheinungen aus Natur, Gesellschaft und Kultur mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen und verstehen *(Mathematik als Anwendung)*
> - mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiterentwickeln *(Mathematik als Struktur)*

- in der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen auch überfachliche Kompetenzen erwerben und einsetzen *(Mathematik als kreatives und intellektuelles Handlungsfeld)*. (Kernlehrplan Gesamtschule, 2004, S. 11)

Die bundesweit geltenden Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung dagegen orientierten sich 2003 explizit an Leitideen, die noch deutliche Bezüge zu Heymanns zentralen Ideen aufwiesen (s. Tab. 6). Allerdings heißt es dort: „Um die verbindlichen Anforderungen an das Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten deutlich zu machen, werden die Inhalte ausgewählten mathematischen Leitideen beispielhaft zugeordnet." (Einheitliche Prüfungsanforderungen, 2003, S. 13) Dadurch, dass also die Inhalte den Leitideen zugeordnet und nicht etwa von ihnen abgeleitet wurden, wird deutlich, dass – zumindest aus Sicht der Kultusministerkonferenz – die Leitideen und allgemeiner die grundlegenden Ideen zur Lösung der Curriculumfrage nur eingeschränkt geeignet erschienen.

Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik 2003
1. Leitidee Funktionaler Zusammenhang
2. Leitidee Grenzprozesse/Approximation
3. Leitidee Modellieren
4. Leitidee Messen
5. Leitidee Algorithmus
6. Leitidee Räumliches Strukturieren / Koordinatisieren
7. Leitidee Zufall

Tab. 6: Leitideen in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen (2003)

Bildungsstandards Mathematik Allgemeine Hochschulreife 2012	
Allgemeine mathematische Kompetenzen	Leitideen
▪ Mathematisch argumentieren (K1) ▪ Probleme mathematisch lösen (K2) ▪ Mathematisch modellieren (K3) ▪ Mathematische Darstellungen verwenden (K4) ▪ Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) ▪ Mathematisch kommunizieren (K6)	▪ Algorithmus und Zahl (L1) ▪ Messen (L2) ▪ Raum und Form (L3) ▪ Funktionaler Zusammenhang (L4) ▪ Daten und Zufall (L5)

Tab. 7: Mathematische Kompetenzen und Leitideen in den Bildungsstandards (2012)

Die immer noch gültigen Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife von 2012 (Tab. 7) zeigen, dass mit den Kompetenzbereichen ein neues Strukturierungselement Einzug in die bildungstheoretische Grundlegung des Faches gehalten hat, das ebenfalls kaum geeignet erscheint, das Curriculumproblem zu lösen, da es ausschließlich Tätigkeiten und Fähigkeiten der Lernenden beschreibt,

die nicht an bestimmte mathematische Inhalte gebunden sind. Dem gegenüber sind fünf Leitideen aufgeführt, deren Bezug zu Heymanns zentralen Ideen noch erkennbar ist. Auch diese Liste räumt dem Themenbereich Stochastik eine eigene Leitidee ein. In der Fachpräambel heißt es konkret: „Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts sind der Allgemeinbildungsauftrag wie auch die Anwendungsorientierung des Unterrichtsfaches Mathematik.“ (Bildungsstandards, 2012, S. 11) Beides soll durch die Vermittlung der drei Grunderfahrungen nach Winter (1995) umgesetzt werden. Bemerkenswert ist, dass die Anwendungsorientierung, die sich auch als Teil des Allgemeinbildungsauftrags verstehen lässt, gesondert erwähnt und damit herausgehoben wird.

Der Lehrplan für die Gymnasiale Oberstufe von 2013 stützt sich nur noch auf die Grunderfahrungen nach Winter, das Meta-Konzept der grundlegenden Ideen ist vollständig aufgegeben worden. Der Begriff der zentralen Idee taucht lediglich an einer einzigen Stelle auf: „Inner- und außermathematische Fragestellungen werden an zentralen mathematischen Ideen orientiert miteinander vernetzt.“ (Kernlehrplan, 2013, S. 11) Welche Ideen das sein sollen, wird nicht formuliert. Der Lehrplan enthält diesbezüglich keine bildungstheoretische Begründung. Auch der neue Kernlehrplan Mathematik für die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen aus dem Jahr 2022 legitimiert sich bildungstheoretisch weiterhin über die Winter’schen Grunderfahrungen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass im 1981 erschienenen Lehrplan für die Oberstufe in Nordrhein-Westfalen noch das deduktive Konzept von Mathematik als „Strukturmuster“ mit wenigen Anwendungen dominierte. Erst ab 1998 bemühte man sich um einen allgemeinbildenden Ansatz als bildungstheoretische Grundlegung für das Fach Mathematik, zunächst auf der Grundlage des Konzepts von Heymann (1996). Es wurden zentrale Ideen formuliert, doch es wurde kein einheitliches Konzept von grundlegenden Ideen (fundamentalen Ideen, zentralen Ideen, Leitideen) verwendet. Die Anzahl der grundlegenden Ideen schwankte dabei zwischen fünf und sieben. Bei der Konzeption der Lehrpläne wurden diese nach Bedarf abgeändert. Die Orientierung an grundlegenden Ideen gab Nordrhein-Westfalen ab 2004 auf, obwohl die Bildungsstandards weiterhin das Konzept der Leitideen vorgaben. In diesem Bundesland erfolgte die bildungstheoretische Grundlegung in den Lehrplänen seit 2004 durchgängig anhand der drei Grunderfahrungen von Winter (1995), wie sie auch in den bundesweiten Bildungsstandards (2012) weiterhin postuliert wird. Damit einher ging teilweise eine Umformulierung der Grunderfahrungen, die kritisch zu betrachten ist (vgl. Kaenders & Weiss, 2017). Zudem erscheint die Legitimation des Mathematikunterrichts mithilfe der Grunderfahrungen insofern problematisch und unzureichend, als es sich beim Aufsatz von Winter lediglich um einen Diskussionsbeitrag in der Mitgliederzeitschrift der GDM handelt und nicht um einen wissenschaftlichen Beitrag im engeren Sinne, da er keine theoretische Verortung und keinerlei Literaturverweise enthält.

3. Perspektiven einer bildungstheoretischen Grundlegung und einer zukünftigen Curriculumentwicklung

Die Probleme mit der bildungstheoretischen Grundlegung des Faches Mathematik werden auch im Handbuch der Mathematikdidaktik deutlich, wo Michael Neubrand die verschiedenen Ansätze aufzuarbeiten versucht. Seine Darstellung, die von Wilhelm von Humboldt ausgeht, bleibt letztlich wenig mehr als eine Aufzählung bestehender Konzepte wie die der fundamentalen Ideen, um dann „synthetisierend“ (Neubrand, 2015, S. 68) bei den drei Grunderfahrungen nach Winter (1995) als gemeinhin akzeptierte Grundlage zu landen.

Vohns (2018) formuliert in seinem Beitrag „Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche?“ fünf moderate „Thesen für und wider den Ablass der Bildung“. Sie sind der Versuch, die verschiedenen Konzepte mathematische Bildung, mathematische Allgemeinbildung und mathematical literacy (Kompetenzorientierung) übereinzubringen. Sein zentrales Argument, man müsse sich damit „arrangieren“ (S. 19), dass diese Konzepte lediglich „regulative Ideen“ seien und es nur um das richtige „Mischungsverhältnis“ zwischen Anwendungen, fachlicher Systematik und Lebenswirklichkeit gehe, nimmt zwar die Schärfe aus den Diskussionen, hilft aber letztlich kaum bei der Lösung der Curriculumfrage. Die neuste Überarbeitung der Bildungsstandards für die Sekundarstufe I zeigt, dass dort weiterhin mit Leitideen als Strukturierungskategorie gearbeitet wird, die durch einen Katalog von prozessbezogenen Kompetenzen quasi als zweite Dimension ergänzt werden (Barzel et al., 2022). Diese fünf Leitideen sind so allgemein gehalten (z. B. Raum und Form, Daten und Zufall), dass sie nicht helfen, das Curriculumproblem in einem angemessenen Konkretisierungsgrad zu lösen.

Es bleibt also festzuhalten, dass die grundlegenden Ideen in der bislang ausformulierten Form das Curriculumproblem nicht lösen. Die weithin akzeptierte Grundlegung des Mathematikunterrichts mithilfe der Grunderfahrungen nach Winter stellt keine bildungstheoretische Grundlegung dar, zumal Winters Beitrag keine wissenschaftliche Einordnung und theoretische Fundierung enthält.

Aus diesen Befunden möchte ich Vorschläge für eine künftige Curriculumentwicklung ableiten. Als These liegt dem zugrunde, dass die bisherige Form der Lehrplanentwicklung, die etwa in Dekaden abläuft, nicht mehr zeitgemäß erscheint. Wie groß das Beharrungsvermögen insbesondere bezüglich des tradierten Stoffkatalogs ist, wurde unlängst am Beispiel des Themengebietes Chaos und Fraktale gezeigt (Heske, 2021). Es wird daher für eine ständige Curriculum-Kommission plädiert, die im Zeitalter der Digitalität wesentlich flexibler auf gesellschaftliche und fachliche Entwicklungen reagieren kann. Zudem wird ein neues, theoretisch fundiertes Allgemeinbildungskonzept für den Mathematikunterricht in der Nachfolge der Winter’schen Grunderfahrungen angemahnt. Das heißt, forcierte Bemühungen um eine zeitgemäße bildungstheoretische Grundlegung des Faches Mathematik an den allgemeinbildenden Schulen sind dringend geboten.

Die Einrichtung einer landesweiten als auch einer bundesweiten ständigen Curriculum-Kommission ist zudem angezeigt, um auf die von der Kultusminister-Konferenz angestrebte Angleichung der sechzehn verschiedenen Lehrpläne voranzutreiben. Zu ihren Kernaufgaben würde eine fortwährende Evaluation in Form einer empirischen Überprüfung der Lernerträge zählen. Der Lehrplan könnte aufgrund dieses permanenten Monitorings kurzfristig und flexibel aktualisiert werden, etwa in einem dreijährigen Rhythmus. Dafür spricht im Zeitalter der Digitalität auch, dass digitale Schulbücher jährliche Updates erlauben würden. Schon jetzt gibt es in Nordrhein-Westfalen beispielsweise jährlich neue Hinweise zu den Anforderungen in der Abiturprüfung Mathematik, wodurch stets eine Konkretisierung, teilweise auch eine Einschränkung, der Vorgaben durch den Kernlehrplan erfolgt. Grundsätzlich könnte diese Aufgabe in der Bundesrepublik vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) übernommen werden. Ihr müsste aber wie vor über fünfzig Jahren (Lenné, 1969) eine umfassende Bestandsaufnahme der Mathematikdidaktik vorausgehen, um mit einer Revision des Curriculums einen zeitgemäßen Mathematikunterricht im Rahmen einer Allgemeinbildung für das 21. Jahrhundert etablieren zu können.

Eine multiprofessionelle ständige Curriculum-Kommission könnte auf jeden Fall ein geeignetes Gremium sein, um das Zusammenwirken zwischen der wissenschaftlichen Forschung in der Mathematikdidaktik, den gesellschaftlich-politischen Ansprüchen und der Praxis des Mathematikunterrichts deutlich effektiver zu gestalten.

Literatur

Barzel, B., Gasteiger, H., Greefrath, G., Maritzen, N., Nührenbörger, M., & Stanat, P. (2022). Weiterentwicklung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich und die Sekundarstufe I. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 30*, 208–211.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (2012). Carl Link.

Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (2003). Luchterhand.

Heske, H. (2021). Chaos und Fraktale: Aufstieg und Fall eines innovativen Themengebiets für den Mathematikunterricht. *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, 14*, 197–210.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Beltz.

Humenberger, J., & Reichel, H.-C. (1995). *Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. Bibliographisches Institut.

Kaenders, R., & Weiss, Y. (2017). Mathematische Schneeschmelze. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *25*, 82–89.

Kernlehrplan für die Gesamtschule – Sekundarstufe I in Nordrhein-Westfalen Mathematik (2004). Ritterbach.

Kernlehrplan für die Sekundarstufe I Gesamtschule/Sekundarschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (2022). Ritterbach.

Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (2013). Ritterbach.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Klett.

Neubrand, M. (2015). Bildungstheoretische Grundlagen des Mathematikunterrichts. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 51–73). Springer Spektrum.

Richtlinien für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen Mathematik (1981). Ritterbach.

Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe I – Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (1998). Ritterbach.

Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik (1999). Ritterbach.

Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 26*, 52–79.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht: Entwicklung und Perspektiven einer fachdidaktischen Kategorie*. Books on Demand.

Vohns, A. (2016). Fundamental ideas as a guiding category in mathematics education: Early understandings, developments in German-speaking countries and relations to subject matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (Suppl. 1), 193–223.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 105*, 8–21.

Weiss, Y. (2023). West German *Neue Mathematik* and some of its protagonists. In D. de Bock (Hrsg.), *Modern Mathematics: An international movement?* (S. 103–125). Springer.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*, 37–46.

Gero STOFFELS, Universität Siegen
stoffels@mathematik.uni-siegen.de

SpiraMaGS: Das Spiralcurriculum im Mathematikunterricht (wieder-)entdecken!

Im vorliegenden Beitrag wird das Spiralcurriculum und dessen Verknüpfung mit dem Konzept fundamentaler Ideen nicht nur unter der etablierten Perspektive der Stoffdidaktik betrachtet, sondern mit einer lernpsychologischen Perspektive auf Basis subjektiver Erfahrungsbereiche und der Perspektive der Entwicklungsforschung verknüpft. Nach einem Problemaufriss sowie der Diskussion aktueller normativer Vorgaben werden die genannten Perspektiven auf das Spiralcurriculum und deren Verbindung mit fundamentalen Ideen auf Basis etablierter Forschungsliteratur im jeweiligen Bereich entwickelt. Die sich theoretisch ergebende verbindende Perspektive wird dann zur Formulierung verschiedener Forschungsdesiderate im Kontext längerfristiger mathematischer Lehr-Lern-Prozesse genutzt und anhand konkreter Ergebnisse aus der Seminarkonzeption „SpiraMaGS" illustriert. „SpiraMaGS" ermöglicht Lehramtsstudierenden verschiedener Schulformen diese Perspektiven zur eigenen Reflexion zu erfahren und eine höhere Awareness gegenüber längerfristigen mathematischen Bildungswegen zu entwickeln.

> Eines ist abschließend allerdings zu betonen:
> Wenn ‚Orientierung an fundamentalen Ideen' ein Leitprinzip für die Gestaltung von Mathematikunterricht darstellen soll, so liegt dem immer die normative Entscheidung zu Grunde, dass es für den Mathematikunterricht wichtig ist, auch über einzelne Begriffe und Verfahren hinaus typische Zielsetzungen, Denk- und Arbeitsweisen als mögliche Sinnangebote bereit zu stellen. Falls dies überhaupt möglich ist und falls das Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen im Umfeld von fundamentalen Ideen dafür eine geeignete Reflexionsebene darstellt, so kann dies nur funktionieren, wenn dem expliziten „Sprechen über Mathematik" (Schweiger 1992, S. 207), der Reflexion über fundamentalen Ideen auch ausreichend Raum im Unterricht gewährt wird.
>
> (Vohns, 2010, S. 253)

In diesem Zitat und dem zugehörigen JMD-Artikel arbeitet Vohns (2010) sehr genau heraus, dass es eine normative Entscheidung ist, im Mathematikunterricht typische Zielsetzungen, Denk- und Arbeitsweisen herauszustellen, die nicht notwendigerweise mit der mathematischen Begriffsentwicklung und Thematisierung von Verfahren einhergehen müssen. Entsprechend schlussfolgert Vohns, dass, wenn fundamentale Ideen als Reflexionsanlässe dieser Arbeitsweisen verwendet werden, auch deren Reflexion – also ein Sprechen über Mathematik auf einer

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 49–63). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Meta-Ebene über die Tätigkeit der Mathematik hinaus – notwendig wird. Dies mag zunächst verwunderlich erscheinen, da der Mathematik und ihren Gebieten oft eine starke innere Vernetzung sowie ein prinzipieller konsekutiver Aufbau zugeschrieben wird, dieser aber eben nicht immer offen zutage treten muss. Entsprechend hatte die Idee des Spiralcurriculums von Bruner (2009) einen großen Einfluss auf Vorschläge zum Lehren und Lernen von Mathematik. So wird etwa in Weigands (n.d.) Sammlung didaktischer Prinzipien der Mathematikdidaktik das „Spiralprinzip" an erster Stelle genannt, das in seiner Erläuterung mit dem Konzept der „fundamentalen Ideen" verbunden wird, die Beziehungen zwischen verschiedenen mathematischen Inhaltsfeldern herstellen. Diese fundamentalen Ideen können, wie bei Vohns (2020) anhand des Konzepts „Messen" und der Tätigkeit des Messens ausgearbeitet, sowohl konzeptuellen als auch prozeduralen Charakter haben. Die im Eingangszitat herausgestellte Normativität der Behandlung fundamentaler Ideen, die spiralförmig im Rahmen des Bildungsgangs behandelt werden, bilden die Leitlinie aktueller Curricula (KMK, 2003).

Entsprechend ist die Idee eines spiralförmigen Aufbaus mathematischer Lern- und Lehrgänge nicht neu, was Vohns (2006, 2010) und weitere Autor*innen immer wieder betont haben. Nichtsdestotrotz stellen sich bis heute wichtige Forschungsfragen, die aus verschiedenen Perspektiven auf das Spiralcurriculum resultieren:

- einer stoffdidaktischen Perspektive
- einer lernpsychologischen Perspektive und
- Perspektiven der Entwicklungsforschung

Der Kern dieses Beitrags liegt nicht nur in der Darstellung dieser Perspektiven, sondern ihrer Verknüpfung und konkreten Nutzung in der hier vorgestellten fachdidaktischen Seminarkonzeption „SpiraMaGS". In diesem Seminar identifizieren Studierende des Grundschullehramts sowie des Lehramts für Gymnasien gemeinsam Schlüsselstellen und deren Verbindung zur Entwicklung fundamentaler Ideen im Sinne eines Spiralcurriculums. Dabei dienen identifizierte fundamentale Ideen und das Nachdenken über ihr Attribut der „Fundamentalität", wie Vohns in seinem Zitat ausweist, als Initiatoren die Reflexion über Kohärenzen und Differenzen in einem Spiralcurriculum zu ermöglichen. Auf Basis der Analyse dieser Auseinandersetzung der Studierenden scheint es plausibel zu sein, dass nur dann Lehrer*innen konstruktiv und kompetent über Mathematik im Sinne des Spiralcurriculums sprechen können, wenn entsprechend geeignete Erfahrungsräume für solche Reflexionen ermöglicht werden (wie z. B. in „SpiraMaGS").

Zunächst wird anhand zweier Beispiele ein Problemaufriss gegeben, inwiefern das Spiralcurriculum längerfristig in den Blick genommen werden muss. Dann wird die aktuelle „normative Entscheidung" (vgl. Vohns, 2010, S. 253) für ein Spiralcurriculum in den aktuellen Bildungsstandards aufgezeigt. Im Hauptteil

wird eine Konkretisierung der genannten verschiedenen Perspektiven auf das Spiralcurriculum vorgelegt, bevor sie anhand der Leitfrage „für wen das Spiralcurriculum wirksam werden kann“ mit besonderer Berücksichtigung impliziter und expliziter Ansätze theoretisch vor dem Hintergrund „subjektiver Erfahrungsbereiche“ (Bauersfeld, 1983) und konkreter empirischer Forschungsergebnisse diskutiert wird. Im Fazit wird ein Forschungsdesiderat nach Einsichten in und empirische Belege für *längerfristige* mathematische Lern- und Lehrprozesse eröffnet sowie damit einhergehende forschungsmethodische und -inhaltliche Fragestellungen thematisiert.

1. Problemaufriss: Längerfristigkeit eines Spiralcurriculums im Mathematikunterricht

Ari (10 Jahre, „eigentlich schon fast 11“) war immer gut in Mathe und hört in ihrer vorletzten Mathematikstunde von ihrem Grundschullehrer Herrn Netz „Ari, denk immer an deine Hilfsaufgaben! Die können dir in so mancher schwierigen Situationen weiterhelfen!“. Ari freute sich, dass sie sich an diesen Trick erinnert, als sie in ihrer ersten Mathematikstunde der weiterführenden Schule die Aufgabe 701-698 lösen soll. Sie wusste, dass man dies folgendermaßen rechnen konnte:

$$701 - 700 = 1 \text{ und } 1 + 2 = 3, \text{ also } 3!$$

Frau Schema, ihre Lehrerin an der weiterführenden Schule, wirkte aber gar nicht begeistert. „So rechnen wir das <u>hier</u> aber nicht Fräulein! Wir machen das so:“

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 0 & 1 \\ - & 6 & 9 & 8 \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ \hline & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Diese fiktive Situation[1] soll stark überspitzt zeigen, wie ein Übergang von der Grundschule zur weiterführenden Schule in Bezug auf Kohärenz von Sichtweisen auf mathematisches Arbeiten nicht gelingt. Neben individuellen Schwierigkeiten der Schüler*innen beim Übergang können Übergänge auch durch fehlende Kenntnisse oder Interesse an der weiterführenden oder vorangehenden Schule auf Seiten der Lehrkräfte erschwert werden. Gerade in den letzten zehn bis zwanzig Jahren wurden in der mathematikdidaktischen Community entsprechend verschiedene Übergänge und Übergangsproblematiken diskutiert. Hierzu gehört die Erforschung mathematischer Vorläuferfähigkeiten im Kindergarten sowie des Übergangs vom Kindergarten in die Grundschule (Hasemann & Gasteiger, 2014), von der Grundschule in die Sekundarstufen (Ditton & Krüsken, 2006; Gellert, 2010; Koch, 2008), von den Sekundarstufen an die Universität (Di Martino et al., 2022; Witzke et al., 2018) und von der Schule in den Beruf (Musch et al., 2009). Alle genannten Arbeiten zeigen auf, dass bei Übergängen Differenzerfahrungen besonders relevant sind. Der Umgang mit solchen Differenzerfahrungen liegt

dann häufig entweder in einer entsprechenden Vorbereitung, also der Adressierung von fehlendem Fachwissen und –kompetenz, oder darin, diese Differenzerfahrung produktiv für den Übergang zu nutzen (Stoffels, 2020, S. 25 ff.). Das häufige Auftreten von Übergängen und damit einhergehenden Schwierigkeiten im mathematischen Bildungsprozess legt nahe, dass nicht nur einzelne Übergangsprozesse in den Blick genommen werden sollten, sondern ein längerfristiger Ansatz notwendig erscheint, der auch eine entsprechende Awareness aller Lehrer*innen an den verschiedenen Schnittstellen notwendig macht.

Betont wird die Wichtigkeit in Bezug auf die Informiertheit von Lehrkräften und möglicherweise auftretenden Problematiken in der Implementation durch Gibbs (2014) eher pessimistische Sichtweise auf Bruners Spiralcurriculum:

> The problem [bezüglich der Implementation eines Spiralcurriculums, G.S.] is — as I realized that day in the penthouse — that the spiral doesn't happen fast enough or with the intention needed. The assumption that teachers at least one year apart will engage the curriculum with the same intent or plan or begin where students left off is incorrect. (Gibbs, 2014, S. 42–43)

Die in Abschnitt 4 ausführlich vorgestellte Seminarkonzeption „SpiraMaGS: Spiralcurriculum Mathematik von der Grundschule in die Sekundarstufen“ begegnet dieser Problematik einer höheren Awareness für mögliche Übergangsprobleme als gemeinsamer Erfahrungsraum für Lehramtsstudierende der Grundschule und der weiterführenden Schule durch einen fachinhaltlichen Austausch sowie Reflektion typischer Zielsetzungen, Denk- und Arbeitsweisen von Mathematik *und* Mathematikunterricht.

2. Verortung: Normative Entscheidung für ein Spiralcurriculum in den Bildungsstandards

Für die Implementation eines Programms wie „SpiraMaGS“ können verschiedene Hürden auftreten, insbesondere hochschulorganisatorischer Natur, da bspw. die Studiengänge für das Grundschullehramt oft nur wenig, bis gar keine Schnittmengen im Bereich Mathematikdidaktik besitzen, oder wie in Baden-Württemberg und Österreich an unterschiedlichen Hochschulen ausgebildet werden. Die Relevanz für eine solche Kooperation zwischen den Studiengängen ergibt sich trotzdem nicht nur aus den intensiven Forschungsbemühungen an den verschiedenen Schnittstellen, sondern ganz konkret auf der Basis normativer Anforderungen in den später zu unterrichtenden Curricula. Natürlich unterliegen diese grundsätzlich einem Wandel der Zeit und bilden oft Anlass zur Diskussion (Kühnel et al., 2015). Nichtsdestotrotz lohnt sich ein Blick in die aktuellen Fassungen der Bildungsstandards, die den Gedanken des Spiralcurriculums in den allgemeinen normativen Anforderungen an den Mathematikunterricht explizit thematisieren und – zumindest hinsichtlich der Formulierung mathematikspezifischer inhalts- und prozessbezogener Kompetenzen – wirksam werden lassen.

Die verbindlichen Bildungsstandards für einige Kernfächer in Deutschland waren ein (bildungspolitisches) Resultat der sog. „PISA-Krise“ im Jahr 2000. Die Bildungsstandards wurden sukzessive implementiert, beginnend mit Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (KMK, 2003), den Bildungsstandards für die Primarstufe (KMK, 2004) und wesentlich später für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012). Mittlerweile wurden die Bildungsstandards für die Primarstufe (KMK, 2022b) und den mittleren Schulabschluss (KMK, 2022a) überarbeitet und weisen nun eine ähnliche Struktur und Darstellung wie die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012) auf. Auch die Namen der ausgewiesenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen sind bis auf einzelne Ausnahmen weitgehend vereinheitlicht. Interessant in Bezug auf den normativen Wunsch nach spiralcurricularer, nämlich stufenübergreifender Kohärenz genügenden, Bildungsstandards ist folgende Stelle, die sich in den Präambeln beider aktualisierter Bildungsstandards wieder findet, und diese Kohärenzbemühung explizit betont:

> Die nun vorgelegten Bildungsstandards *gewährleisten eine deutlich höhere stufenübergreifende Konsistenz* [Herv. G.S.]. Dies ist unter anderem für die Lehrplanarbeit wichtig, die eine Verständigung über fachspezifische Übergänge gewährleisten muss, und auch für die pädagogische Praxis von Lehrkräften, die in ihrer Unterrichtsplanung Passungen zwischen Schulstufen herstellen müssen. Die Gelegenheit der Weiterentwicklung der Standards für den Primarbereich und die Sekundarstufe I wurde deshalb genutzt, um *sowohl die stufenübergreifende Progression der Anforderungen als auch die Konsistenz von Konzepten und Begriffen zu optimieren, auch mit Blick auf den Übergang zur Sekundarstufe II* [Herv. G.S.]. (KMK, 2022a, 2022b, S. 3)

Die Fragen, die sich nun stellen, sind[2]: Wird darauf vertraut, dass eine solche Konsistenz der Bildungsstandards automatisch gegeben sei, beispielsweise aufgrund der fachlichen Struktur der Mathematik? Falls ja, welche Folgen hätte das für den Unterricht in den verschiedenen Schulstufen, ist es beispielsweise nur noch nötig die jeweils schulspezifischen Bildungsstandards anzuschauen oder wird durch diese Formulierung gerade die Lust geweckt auch einen „Blick über den (eigenen) Tellerrand hinaus“ in die Bildungsstandards der übrigen Stufen zu werfen?

Eine empirische Untersuchung zu diesen Fragen wäre spannend, insbesondere um Einsichten in die konkrete Implementation des Spiralcurriculums, also der Umsetzung der normativ erwünschten Kohärenz des Mathematikunterrichts zu erlangen, die erst durch einen entsprechenden Wunsch der Lehrkräfte, wie Vohns (2010) feststellt, wirksam werden kann. Eine Grundlage für eine solche Untersuchung, wie normative Ansprüche im Sinne eines spiralcurricularen Aufbaus von Mathematikunterricht mit besonderer Berücksichtigung von Kohärenz mit Fragen der Lernpsychologie sowie Entwicklungsforschung verknüpft werden können,

bildet folgende Diskussion entsprechender Perspektiven auf das Spiralcurriculum und dessen Verknüpfung mit dem Konzept fundamentaler Ideen.

3. Konkretisierung: Drei Perspektiven auf das Spiralcurriculum

Die bereits in der Einleitung zum Spiralcurriculum genannten Aspekte und auch die explizite Nennung spiralcurricularer Ideen in Curricula legen nahe, dass Überlegungen zu diesem Thema ein alter Hut zu sein scheinen. Gerade der Zusammenhang zwischen Spiralcurriculum und fundamentalen Ideen wird seit mehr als 50 Jahren diskutiert (Vohns, 2010; Weigand, n.d.), wobei deren konstruktive und operative Nutzbarkeit, insbesondere unter Nutzung fundamentaler Ideen, häufig in Frage gestellt bzw. nicht exemplifiziert wird (Vohns, 2006). Eine Ursache kann darin liegen, dass nur einzelne Aspekte von Bruners (2009) Konzeption herausgegriffen werden.

Eine naheliegende Frage ist nun, was unter dem Spiralcurriculum verstanden werden soll. Hierbei ist klar, dass die Konzepte die Bruner (2009) in den 60er Jahren in seinem Buch „The Process of Education“ entwickelt hat, nicht als einfaches Umsetzungsprogramm verstanden werden sollten, wie Bruner (1971) selbst kritisiert. Vielmehr liegt die fundamentale Idee des Spiralcurriculums darin, dass die fachliche Struktur einer Disziplin so zu nutzen sei, dass Schüler*innen auch schon früh in ihrem Bildungsweg „fundamental ideas of a discipline“ (Bruner, 2009, S. 3) erkennen können. Diese Grundidee kann auch heutige Überlegungen zur Struktur mathematischer Bildungswege sowie Übergänge zwischen Bildungsinstitutionen leiten. Ganz konkret fordert Bruner (2009, S. 52), dass diese fundamentalen Ideen im gesellschaftlichen Diskurs als solche ausgehandelt werden, und sowohl das Kriterium erfüllen schon jungen Kindern vermittelbar zu sein als auch, sofern sie „vollständig entwickelt sind“, eine Person zu einem „besseren Erwachsenen“ machen. Entsprechend sind die Konzepte des „Spiralcurriculums“ und „fundamentalen Ideen“ bereits bei Bruner eng verwoben, machen aber Aushandlungsprozesse notwendig, für die in der Seminarkonzeption „SpiraMaGS“ ein entsprechender Erfahrungsraum eröffnet wird.

Ein neuer Hut wird daraus, wenn man nicht nur die lernplanerischen Aspekte in den Blick nimmt, sondern allgemeiner fragt:

- Für wen soll/kann das Spiralcurriculum wirksam werden?
- Inwiefern kann/soll das Spiralcurriculum entsprechend explizit werden?

Um diese Fragen zu diskutieren, werden in diesem Beitrag drei Perspektiven in den Blick genommen, die anhand spezifischer Fragen konkretisiert werden.

- *Stoffdidaktische Perspektiven*: Welche „mathematischen Ideen/Inhalte“ sollen als fundamentale Ideen gelten und können so zu einem spiralförmigen Aufbau mathematischen Lehrens und Lernens beitragen?

- *Lernpsychologische Perspektiven*: Wie wird der spiralige Aufbau mathematischer Inhalte wahrgenommen und im mathematischen Wissen oder Auffassungen von Lernenden wirksam?
- *Perspektiven der Entwicklungsforschung*: Welche Gelingensbedingungen für geeignete Lehr- und Lernformate lassen sich identifizieren, die eine längerfristige spiralförmige Entwicklung mathematischer Konzepte und Prozesse ermöglichen? Welche Aspekte können in der Lehrer*innenbildung beachtet werden, damit zukünftige Lehrer*innen prinzipiell entsprechende Lernprozesse initiieren können?

Ein Blick in die einschlägige Forschungsliteratur zum Thema Spiralcurriculum (im Mathematikunterricht) zeigt, dass in allen Bereichen erste Ergebnisse erzielt wurden, diese allerdings bis auf wenige Ausnahmen (Igcasama, 2021; Ronald L. Orale & Ma. Emalyn A. Uy, 2018; Vohns, 2006) auf theoretischer und normativer Ebene zu verorten sind oder nur kurz- bis mittelfristige Perspektiven in den Blick nehmen. Zum Beispiel den schon beschriebenen Übergang von der Grundschule in die weiterführende Schule.

Für die *stoffdidaktische Perspektive* auf das Spiralcurriculum liegen vielfältige Ergebnisse vor, gerade im Zusammenhang mit fundamentalen Ideen, sodass Vohns (2010, S. 229) feststellt:

> Angesichts der hohen Diversität verschiedener Konzeptionen fundamentaler Ideen ist es kaum möglich, ein einheitliches Bild davon zu gewinnen, was sich die jeweiligen Autor(inn)en unter ‚Ideen' eigentlich vorstellen bzw. was sie als solche bezeichnen.

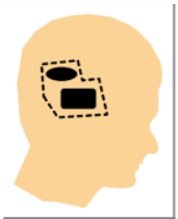
Je nach Konzeption der verschiedenen Autor*innen gehören zu solchen *fundamentalen Ideen*:

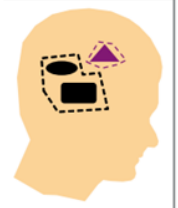
- *mathematische Begriffe* (Algorithmus, Funktion, Menge, Zahl, Analysis, …) (weitestgehend Bruner, 2009)
- *typische mathematische Tätigkeiten und Prozesse* („Abstraktion", Approximation, Beweisen, Induktion, Linearisierung, Messen, Modellieren, Optimieren, Repräsentation, (räumliches) Strukturieren, …) (Whitehead, 1913; Schweiger, 2010)
- *wichtige Eigenschaften* (Symmetrie, Optimalität, Invarianz, …). („universelle Ideen" bei Bender & Schreiber, 1985)

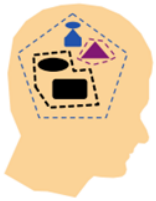
Eine sehr gelungene Übersicht der verschiedenen Beiträge im Bereich der Stoffdidaktik und deren Unterschiede, wie oben durch Verweise skizziert, findet sich in Vohns (2016) und wird daher an dieser Stelle nicht weiter ausdifferenziert. Mit den verschiedenen Konzeptionen sind auch Auffassungen verbunden, welche Aspekte der Mathematik (subjektiv) als besonders wichtig angesehen werden. Diese

sind leitend für die Adressierung solcher fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht wie etwa die Untersuchung individueller Curricula zeigt, die eng mit Auffassungen der Lehrenden zusammenhängen (Eichler, 2007).

Dieser Blick auf Auffassungen bietet einen Weg von der stoffdidaktischen zur *lernpsychologischen* Perspektive. Beim Übergangsprozess von der Schule zur Hochschule zeigt sich zum Beispiel, dass dieser nicht zwingend als spiralcurricular aufbauend wahrgenommen wird (vgl. Abbildung 1), sondern ganz im Gegenteil große Differenzen wahrgenommen werden. Zum einen wird dies an den Assoziationen von „Emil“ in der Tabelle deutlich, zum anderen ist dies auch schematisch im Piktogramm dargestellt. Dieses illustriert aufbauend auf Bauersfeld (1983) wie schulische subjektive Erfahrungsbereiche (SEB) (schwarz gefüllte Figuren, oben links) mit hochschulischen SEB (violett gefüllte Figur, Mitte links) nur in neuen übergeordneten SEB (blau gefüllte Figur, unten rechts) miteinander verbunden werden können (Stoffels, 2020).







Schulmathematik [Emil_Pre_9]	**Hochschulmathematik** [Emil_Pre_10]
reduziert	endlos
unpräzise	exakt
unakademisch	wissenschaftlich
Grundverständnis vermittelnd	detailverliebt
für alle wichtig	für Spezialisten wichtig

Abbildung 1: Emils (Pseudonym) fünf Assoziationen zur „Schulmathematik“ und zur „Hochschulmathematik“ in einem Pre-Test des Projekts „ÜberPro_WR“ (Stoffels, 2020, S. 422).

Auch in Bezug auf den Aufbau mathematischen Wissens kann es zu Differenzerfahrungen kommen. Häufig ergibt sie sich durch die Annahme von Kohärenz sowohl von Lernenden aber auch von Lehrenden. Dies soll an einem bekannten Beispiel von Ginsburg aufgezeigt werden, das hier in der Fassung von Bauersfeld (1983, S. 3) vorliegt, ergänzt durch Ausweisung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen in eckigen Klammern.

> George, 9 Jahre alt und in der 3. Klasse, löste die gegebene Subtraktionsaufgabe so […]. Er folgte der häufig anzutreffenden Subtraktionsregel, die kleinere Zahl von der größeren abzuziehen (unabhängig vom

> Ort im Schema) [Kohärenter Transfer der Regel im Ihn bekannten Zahlenraum, „dass man nur von einer größeren Zahl subtrahieren darf“]. Der Interviewer bat ihn dann, die Aufgabe mit Hilfe von Heftklammern zu lösen. Der Interviewer erwartete, George würde mit vierzehn Klammern anfangen, fünf wegnehmen und dann sehen, daß neun übrig bleiben [Interviewer nimmt Kohärenz im Umgang mit Material zur Kardinalität von Mengen an]. George aber zählte fünf Klammern ab, nahm vier davon wieder weg und behielt eine Klammer übrig. Dann nahm er eine weitere Klammer in die Hand. Auf diese Weise bestätigte er seine Lösung 14-5=11. [Kohärente Handlung mit Material zum von ihm gewählten Rechenweg; Differenz zur Intention des Interviewenden] (Ginsburg, 1977, S.114/115)

Ein solches Nachdenken über Kohärenz und Differenz, wie es durch die Ergänzungen hier expliziert wurde, ermöglicht die von Vohns (2010, S. 253) geforderte Reflexion im Rahmen eines Spiralcurriculums.

Die Frage wie solche Reflexionsprozesse konkret umgesetzt und wirksam werden, eröffnet die *Perspektive der Entwicklungsforschung*. Ein Desiderat dieser Perspektive stellt einen Mangel von Einsichten in und konkrete empirischer Belege für *längerfristige* mathematische Lehr- und Lernprozesse fest, insbesondere auch über verschiedene Schulformen hinweg, nicht nur im Sinne von Querschnittsstudien (Schneider, 2018). Eine weitere Frage aus der Perspektive der Entwicklungsforschung ist, wie Erfahrungsbereiche für zukünftige Lehrer*innen geschaffen werden können, sodass Sie in ihrem eigenen Mathematikunterricht entsprechende Lernprozesse überhaupt initiieren können. Mithilfe des Projekts „SpiraMaGS“ konnten entsprechende Best-Practice Beispiele entwickelt werden, für die allerdings die Frage nach dem längerfristigen Transfer zurzeit noch ebenso aussteht wie für die ersten Fragen. Die vorläufigen Ergebnisse werden im folgenden Abschnitt detaillierter dargestellt.

4. Diskussion: Für wen kann/soll das Spiralcurriculum (explizit) wirksam werden

Im bereits zitierten Auszug aus den aktuellen KMK (2022a, S. 3) Bildungsstandards lässt sich leicht ableiten, für wen das Spiralcurriculum wirksam werden soll. Dies sind Lehrplaner*innen, Lehrkräfte und Schüler*innen zur Förderung der „Konsistenz von Konzepten und Begriffen“. Dabei soll das Spiralcurriculum (implizit) wirksam werden durch die Behandlung der ausgewiesenen Leitideen und den Erwerb der ausgewiesenen prozessbezogenen Kompetenzen. Auch aus einer lernpsychologischen Perspektive ist eine Betrachtung dieser Akteure relevant, da sie miteinander mittelbar oder unmittelbar entsprechende Bedeutungen aushandeln können (Igcasama, 2021; Steinbring, 2015). Für Vohns (2010) bedeuten solche Aushandlungsprozesse ein Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen

- zwischen bereits Gelerntem (Gelehrtem) und noch zu Lernendem (Lehrendem),
- zwischen implizit Genutztem/Geahntem und explizit Thematisiertem,
- zwischen alltäglichen und mathematischen Denk- und Handlungsweisen.

Aus lernpsychologischer Sicht stellt sich nun die Frage, wie überhaupt solche Kohärenz- und Differenzerfahrungen möglich sind und wie diese in einem weiteren Schritt reflektiert werden können. Nutzt man die Theorie der SEB (Bauersfeld, 1983), so lässt sich eine Differenzerfahrung zwischen Akteuren (oder eines Individuums) darin begründen, dass unterschiedliche SEB aktiviert werden, die inkongruente Perspektiven ermöglichen. Kohärenzerfahrung meint entsprechend die Aktivierung von SEB‘en, die kongruente Perspektiven ermöglichen. Ein Nachdenken über Kohärenz und Differenz wird dann folgendermaßen möglich:

> Die Bestimmung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden spezifischer Elemente sowie das „In-Beziehung setzen“ von SEB‘en (Bauersfeld, 1983, S. 7) kann vom Träger dieser SEB nur in einem weiteren SEB geleistet werden. (Stoffels, 2020, S. 98)

Entsprechend muss ein passender neuer SEB „zum Nachdenken“ entwickelt werden (Abbildung 1). Die Frage ist nun, wie die Entwicklung solcher neuen SEB angeregt werden kann, die spiralcurriculare Perspektiven für Schüler*innen, Lehrer*innen (und vielleicht sogar für Lehrplaner*innen) ermöglichen.

Im Projektseminar „SpiraMaGS“ sollen solche Erfahrungsräume geschaffen und erprobt werden. Die Grundidee bei Lehramtsstudierenden anzusetzen, liegt darin begründet, dass einerseits davon auszugehen ist, dass sie selbst bereits einige Differenz- und Kohärenzerfahrungen im Rahmen ihrer mathematischen Bildung sammeln konnten und damit auch verschiedene passende SEB vorliegen. Außerdem ermöglicht der Raum der Universität solche Reflexionsprozesse ohne unter einem unterrichtspraktischen Implementationsdruck zu stehen. Zuletzt ist es (zumindest an der Universität Siegen) auch auf organisatorischer Ebene relativ leicht Lehramtsstudierende verschiedener Schulformen zusammen arbeiten zu lassen.

Umgesetzt wurde dieses Seminar bisher zweimal mit Lehramtsstudierenden verschiedener Schulformen. Nach einer Einführung in mathematikdidaktische Sichtweisen auf das Spiralcurriculum sowie fundamentaler Ideen und der Diskussion des Ansatzes subjektiver Erfahrungsbereiche, identifizieren Studierende (ab dem 4. Fachsemester) in schulstufengemischten Gruppen von 3-5 Personen gemeinsam eine fundamentale Idee auf Basis der besprochenen Literatur und durch gruppeninterne Aushandlungsprozesse. Diese werden dann von der 1. Klasse bis zur allgemeinen Hochschulreife in Bezug auf mögliche Kohärenzen und Differenzen diskutiert. Der Diskussionsanlass liegt in der Konzeption eines passenden fortlaufenden Advanced Organizers für Lernende, der die verschiedenen Differenzen

und Kohärenzen entlang eines Spiralcurriculums explizit machen soll – auch für die spätere eigene Praxis der Lehramtsstudierenden.

Schon während der Diskussion mathematikdidaktischer Sichtweisen auf das Spiralcurriculum wurden verschiedene Perspektiven und Erfahrungen der Studierenden der verschiedenen Schulformen produktiv – und vor allem von ihnen selbst – miteinander in Verbindung gebracht. Dies belegt folgender Auszug aus einem Schreibgespräch im Anschluss an die Lektüre von Vohns (2010) zur Frage „warum ist Mathematik überhaupt kohärent?“.

Student*in G:

> Meines Verständnisses nach bedeutet Kohärenz in Bezug auf Mathematik, dass es eine grundlegende zusammenhängende Logik gibt, die sich z.B. in den „fundamentalen Ideen“ wiederfindet. D.h. Verbindungen und Schnittstellen zwischen bestimmten Inhalten herzustellen oder aufzudecken beschreibt den Akt des Aufzeigens eben dieser Kohärenz.
>
> Zur Frage, warum Mathematik kohärent ist: da sie ein vernetztes System von Grundvorstellungen und Verfahren darstellt, die erst durch Rückgriffe und Bezugnahmen aufeinander, nutzbar gemacht werden.

Student*in Gym 1

> Du hast auf jeden Fall recht mit der zusammenhängenden Logik, da die Mathematik eine deduktive, auf Axiomen aufgebaute, Wissenschaft ist. Durch diese Tatsache ist die Kohärenz zwischen den Themenbereichen bereits gegeben.
>
> Ein anderer Punkt. Ich finde, dass er in der These die Sinnhaftigkeit der fundamentalen Ideen für den schulischen Mathematikunterricht anzweifelt. Denn aus didaktischer Sicht, sollten SuS Konzepte und Ideen immer selbst erarbeiten, bzw. erfassen. Wenn dies nicht der Fall ist, dann handelt es sich nur um einen weiteren „Knochen“, der den Lernenden vorgeworfen wird. Dadurch folgt kein tieferer Erkenntnisgewinn. Jedoch wird in der These angesprochen, dass für das Finden einer fundamentalen Idee ein umfangreiches kohärentes mathematisches Wissen vonnöten ist. Dadurch stellt sich mir die Frage, ob eben diese Ideen, falls sie überhaupt existieren, didaktische Relevanz besitzen.

Student*in Gym 2

> Ich kann mir vorstellen, dass der Autor hier nicht einzelne Ideen zu Aufgaben meint, die sich die SuS selber (ggf. mit Hilfestellung) erarbeiten können, sondern dass er bewusst die Ideen für ein ganzes „Bündel“ an Strategien meint, also zum Beispiel: Wie geht man generell mit Textaufgaben oder Beweisführung um?
>
> In Bezug auf die Kohärenz stimme ich Student*in G zu, diese Vernetzungen zwischen Verfahren oder Themengebieten könnte man didaktisch auch im (Oberstufen-)Unterricht den SuS aufzeigen und gut nutzen.

Im Weiteren werden auch während der Identifikation von, aus Sicht der Studierenden, fundamentalen Ideen (z.B. Messen, Funktion, Darstellungen mit Material), spezifische Sichtweisen von den Studierenden artikuliert, in denen sie jeweils ihr bereits erlangtes mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen

einbringen. Gleiches gilt für die Konzeption des Advanced Organizers, dessen Nutzung mit einer von den Studierenden zusammengestellten Aufgabensammlung und zugehörigem Impuls für ihre Kommiliton*innen, im Plenum diskutiert wird. Blickt man auf diesen Erfahrungsraum im Gesamten, ermöglicht er an einer konkreten möglichen fundamentalen Idee einen fachinhaltlichen Austausch sowie die Identifikation typischer Zielsetzungen, Denk- und Arbeitsweisen von Mathematik *und* Mathematikunterricht durch ein geeignetes Setting, nämlich eine gemeinsame Konzeption eines Advanced Organizers schulstufenübergreifend zu entwickeln. Auf diese Weise werden

- eigene Perspektiven bewusst,
- diese hinsichtlich Kohärenz und Differenz mit anderen abgeglichen und
- produktiv zur Konzeption eines Spiralcurriculums genutzt, indem Schlüsselstellen identifiziert werden.

5. Fazit: Forschungsdesiderat zum Verständnis längerfristiger mathematischer Lern- und Lehrprozesse

In diesem Beitrag wurden besondere Herausforderungen einer echten längerfristigen Betrachtung des Spiralcurriculums aus einer stoffdidaktischen und lernpsychologischen Perspektive sowie Herausforderungen für die Entwicklungsforschung aufgezeigt. Neben einer Konkretisierung damit einhergehender Forschungsfragen konnte insbesondere auf lernpsychologischer Ebene durch den Ansatz subjektiver Erfahrungsbereiche eine Brücke zwischen den (normativen) Anforderungen an das „Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen“ (Vohns, 2010, S. 253) durch Anregen übergeordneter subjektiver Erfahrungsbereiche und Entwicklungsmöglichkeiten konkreter Settings geschlagen werden. In solchen Settings verbinden Lehramtsstudierende schulformübergreifend, selbstwirksam und wertschätzend das Konzept der „fundamentalen Ideen“ im mathematikdidaktischen Diskurs mit dem Konzept des „Spiralcurriculums“. So können fundamentale Ideen als Initiatoren die Reflexion über Kohärenzen und Differenzen in einem Spiralcurriculum ermöglichen (zumindest für Lehramtsstudierende) und es scheint plausibel, dass nur dann Lehrer*innen konstruktiv und kompetent mit Mathematik im Sinne des Spiralcurriculums interagieren können, wenn geeignete Erfahrungsräume ermöglicht werden (wie z.B. in „SpiraMaGS“). Das bedeutet natürlich nicht, dass die damit einhergehende Awareness der Lehrkräfte direkt zu einer erfolgreichen Umsetzung eines spiralcurricularen Bildungsgangs führt. Weitere Faktoren sind die Nutzung dieser Awareness bei der konkreten Planung von Unterrichtsreihen sowie Auswahl von Unterrichtsmaterialien, aber auch die kognitive Voraussetzung von Lernenden, u.a. Vorwissen, um neue Wissenselemente in bereits bestehendes Wissen einzubetten, sowie motivationale Aspekte, wie etwa die Freude an der Vernetzung mathematischer Ideen und Zugangsweisen.

Offen bleibt das Forschungsdesiderat, wie genau längerfristige mathematische Lehr- und Lehrprozesse verlaufen, welche forschungsmethodischen Zugänge für deren Evaluation geeignet sind und inwiefern sie sich dabei von kurzfristigen Lehr- und Lernprozessen unterscheiden. Die Idee des Spiralcurriculums zu nutzen, um passende Erfahrungsräume für ein entsprechendes Nachdenken über Kohärenz und Differenz in mathematischen Bildungsprozessen für alle Akteure zu ermöglichen, erscheint zur Behandlung solcher Fragen ein guter Ansatzpunkt zu sein.

Dank

Ich bedanke mich recht herzlich für die konstruktive Kritik der Reviewer*innen, die aus meiner Sicht zu einer größeren Klarheit dieses Beitrags geführt haben.

[1] Diese Situation ist natürlich frei erfunden. Inspiriert hat mich das PIK-AS Material zum „Flexiblen Rechnen“ https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_5_-_Individuelles_und_gemeinsames_Lernen/FM/Modul_5.3_neu/Teil2/Moderator-Material/Infotext_FlexiblesRechnen.pdf

[2] Dies setzt natürlich voraus, dass solche Präambeln auch von den durch die Bildungsstandards adressierten Zielgruppen gelesen werden.

Literaturverzeichnis

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld (Hrsg.), *Lernen und Lehren von Mathematik* (S. 1–56). Aulis.

Bender, P., & Schreiber, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie*. Hölder-Pichler-Tempsky & Teubner.

Bruner, J. S. (1971). “The Process of Education” Revisited. *The Phi Delta Kappan*, *53*(1), 18-21.

Bruner, J. S. (2009). *The process of education*. Harvard university press.

Di Martino, P., Gregorio, F., & Iannone, P. (2022). The transition from school to university in mathematics education research: new trends and ideas from a systematic literature review. *Educational studies in mathematics*, 1–28. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10194-w

Ditton, H., & Krüsken, J. (2006). Der Übergang von der Grundschule in die Sekundarstufe I. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *9*(3), 348–372. https://doi.org/10.1007/s11618-006-0055-7

Eichler, A. (2007). Individual Curricula: Teachers’ Beliefs Concerning Stochastic Instructions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 208–226. https://doi.org/10.29333/iejme/184

Gellert, U. (2010). *Verdeckt und Verborgen: Anforderungen beim Übergang vom Mathematikunterricht der Grundschule zum Mathematikunterricht am Gymnasium* (Handreichungen des Programms SINUS an Grundschulen). IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Gellert.pdf

Gibbs, B. C. (2014). Reconfiguring Bruner: Compressing the Spiral Curriculum. *Phi Delta Kappan*, *95*(7), 41–44. https://doi.org/10.1177/003172171409500710

Hasemann, K., & Gasteiger, H. (2014). Mathematiklernen im Übergang Kindergarten – Grundschule. In K. Hasemann, H. Gasteiger & F. Padberg (Hrsg.), *Anfangsunterricht Mathematik* (S. 43–61). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-40774-1_2

Igcasama, R. M. (2021). Teachers and Students' Perceptions on the Implementation of K-12 Spiral Progression Approach. *IJIET (International Journal of Indonesian Education and Teaching), 5*(1), 116–124. https://doi.org/10.24071/ijiet.v5i1.2983

KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

KMK (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA).* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

KMK (2022b). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf

Koch, K. (2008). Von der Grundschule zur Sekundarstufe. In J. Böhme & W. Helsper (Hrsg.), *Handbuch der Schulforschung* (2. Aufl., S. 577–592). VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-531-91095-6_22

Kühnel, W., Bandelt, H.-J., Jahnke, T., Klein, H.-P., Remus, D., Schweighofer, M., Sonar, T., Spindler, M., & Walcher, S. (2015). Zur neuen Schulmathematik im Abitur – Die Bildungsstandards der KMK von 2012. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *23*(2). https://doi.org/10.1515/dmvm-2015-0038

Musch, M., Rach, S., & Heinze, A [A.]. (2009). Zum Spannungsverhältnis zwischen mathematischen Anforderungen im Schulunterricht und im Berufsleben. In A. Heinze & M. Grüssing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 217–228). Waxmann.

Orale, R. L., & Uy, M. (2018). When the Spiral is Broken: Problem Analysis in the Implementation of Spiral Progression Approach in Teaching Mathematics. *Journal of Academic Research*, *3*(3), 14–24. http://jar.ssu.edu.ph/index.php/jar/article/view/8

Schneider, E. (2018). Einleitung. In E. Schneider (Hrsg.), *Studien zur Schul- und Bildungsforschung: Band 67. Von der Hauptschule in die Sekundarstufe II: Eine schülerbiografische Längsschnittstudie* (S. 1–4). Springer VS. https://doi.org/10.1007/978-3-658-20882-0_1

Schweiger, F. (2010). *Band 3 der Schriften zur Didaktik der Mathematik und Informatik an der Universität Salzburg, Fundamentale Ideen*. Shaker.

Steinbring, H. (2015). Mathematical interaction shaped by communication, epistemological constraints and enactivism. *ZDM*, *47*(2), 281–293. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0629-4

Stoffels, G. (2020). *(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen*. universi. http://141.99.19.133/handle/ubsi/1720 https://doi.org/10.25819/ubsi/5563

Vohns, A. (2006). Reconstructing basic ideas in geometry—an empirical approach. *ZDM, 38*(6), 498–504. https://doi.org/10.1007/BF02652787

Vohns, A. (2010). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(2), 227–255. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0012-0

Vohns, A. (2016). Fundamental ideas as a guiding category in mathematics education—Early understandings, developments in German-speaking countries and relations to subject matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 193-223. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0086-4

Vohns, A. (2020, 5. Mai). *Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I.* Staatsexamensarbeit. Universität Siegen.

Weigand, H. G. (n.d.). *Didaktische Prinzipien.* Didaktik der Mathematik, Universität Würzburg. https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040500/dokumente/Texte_zu_Grundfragen/weigand_didaktische_prinzipien.pdf

Whitehead, A. N. (1913). The mathematical curriculum. *Mathematical gazette, 7*, 87–94.

Witzke, I., Clark, K. M., Struve, H., & Stoffels, G. (2018). Überpro: Addressing the Transition from School to University. In K. M. Clark et al. (Hrsg.), *Mathematics, Education and History: Towards a harmonious partnership.* Springer International.

2.
Bildungstheorie des Mathematikunterrichts

Rudolf STRÄßER, Justus-Liebig-Universität Gießen / Australian Catholic University
rudolf.straesser@math.uni-giessen.de

Nachdenken über Bildung – Kompetenzen – Mathematik. Auch ein Kommentar zu Andreas Vohns

Beim Nachdenken über Bildung geht es im Folgenden zunächst um einen Text von Andreas Vohns (2016), der in vier Etappen die Veränderungen untersucht, die sich bei politischen, pädagogischen und mathematikdidaktischen Überlegungen zum Bildungswert des Mathematikunterrichts ergeben haben. In diesen Rückblick in die bundesrepublikanische Bildungsdebatte fließen auch Erkenntnisse ein, die bei vergleichbarer Phasierung schon in einem Text von Sträßer und von Aufschnaiter (2009) zur mathematischen Bildung formuliert wurden. Folgerungen aus diesem Rückblick auf zwei Texte steuern dann Versuche, den Bildungswert von Mathematik(-unterricht) allgemein und an Beispielen weiter zu denken, um abschließend einige allgemeine Konsequenzen aus dem Rückblick, den Beispielen und den allgemeinen Überlegungen zum Mathematikunterricht zu formulieren.

1 Etappen mathematischer Bildung

Der Rechen- und Mathematikunterricht muss in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts bis in die 1950/1960er Jahre (also in der ersten Etappe nach Vohns) als zweigeteilt beschrieben werden. Zum einen werden in der „Volksschule“ unter den Überschriften „Rechnen“ und „Raumlehre“ vor allem Verfahren für einzelne Problemsituationen gelehrt, die die Grundrechenarten, das Rechnen mit dem Dreisatz und die Prozent- und Zinsrechnung umfassen. Jeder Mensch soll diese Rechenverfahren korrekt ausführen und in alltäglichen Situationen einsetzen können. Demgegenüber hat der Unterricht im Gymnasium den Anspruch, Mathematik als Teil der (Menschen-)Bildung zu vermitteln. Dabei wird davon ausgegangen, dass hier wissenschaftliches Wissen gelehrt wird, wobei die Mathematik ein unverzichtbarer Gegenstand in der Bildung eines vollständigen Menschen ist. Bildung ist dabei „jene Verfassung des Menschen […], die ihn in den Stand setzt, sowohl sich selbst als auch seine Beziehungen zur Welt in Ordnung zu bringen“ (Klafki, 1963, Theodor Litt zitierend).

Der Unterricht in beiden Schulformen ist dabei nach Art einer Aufgabendidaktik organisiert, d. h.:

> Jedes Teilgebiet [des Unterrichts] ist durch einen Aufgabentyp bestimmt, der systematisch von einfachen zu komplexen Formen hin abgewandelt wird. […] Die einzelnen Gebiete zeigen so in sich eine strenge Systematik. Sie sind jedoch untereinander wenig verknüpft […] Die Mathematik im Ganzen tritt daher dem Schüler weniger als ideelle

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 67–81). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

> Einheit, sondern vielmehr als eine Sammlung von Aufgabentypen entgegen. (Lenné, 1975, S. 34f)

Mindestens in der ersten Hälfte der 1950er Jahre waren diejenigen, die sich um das Bildungssystem, das didaktische System, Gedanken machten, also in der Terminologie von Chevallard die „Noosphere“ (Chevallard, 1982, S. 9), mit dem schon in der Weimarer Republik entstandenen, dreigliedrigen Schulsystem durchaus zufrieden. Zwischen „Volksschule“ (für die niederen Schichten von Handarbeitern in Landwirtschaft und industrieller Produktion) und Gymnasium (als „geistiger Elite“) hatte sich inzwischen zur Ausbildung der langsam größer werdenden Schicht von Funktionsträgern in Produktion und Handel als dritte Säule die „Realschule“ zur Ausbildung von Angestellten und Handwerkern geschoben (für eine detailliertere Darstellung und Kritik zum dreigliedrigen Schulsystem vgl. z. B. Blankertz, 1982, S. 234–239).

Diese Zufriedenheit wurde in der zweiten Etappe nach Vohns zunächst einmal im Jahre 1957 durch den „Sputnik-Schock“ erschüttert. Die Noosphere erkannte, dass das dreigliedrige Schulsystem der Bundesrepublik Deutschland (BRD) den Anforderungen einer zunehmend naturwissenschaftlich-technisch orientierten Welt nicht mehr gewachsen war – nicht zuletzt weil es in der damaligen BRD zu einer zu geringen Beteiligung an höherer Bildung etwa in Realschulen und Gymnasien führte. Als Konsequenz und zur Förderung des Wirtschaftswachstums bemühte man sich bildungspolitisch um eine Expansion des Bildungssystems in der BRD im Sinne einer Verlängerung der Schulpflicht und insbesondere um eine Förderung der naturwissenschaftlichen Schulfächer einschließlich der Mathematik. Auf der Ebene des Schulsystems reagierte ein „Deutscher Bildungsrat“ 1970 mit einem „Strukturplan für das Bildungswesen“, der die Dreigliedrigkeit des Schulsystems zugunsten einer Stufung des Bildungssystems (Vorschulbereich, Grundstufe, Sekundarstufe I mit den Klassen 5 bis 10, Sekundarstufe II) ablösen wollte. Für die gymnasiale Oberstufe führte die Konferenz der Kultusminister 1972 mit der „Vereinbarung zur Neugestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II“ ein Kurssystems von Grund- und Leistungskursen ein, beendete so im Prinzip die Typisierung der Gymnasien in der Sekundarstufe II (in altsprachliche, neusprachliche, naturwissenschaftliche Gymnasien, Mädchengymnasien, (Ober-)Lyzeum etc.) und trug die Verantwortung für die Fächerwahl in der gymnasialen Oberstufe zunächst weitgehend den einzelnen Lernenden auf. Die Beschreibung dieser zweiten Etappe nach Vohns folgt im Übrigen zum Teil wörtlich Sträßer et al. (im Druck).

Typisch für diese Zeit und für den Mathematikunterricht international einflussreich waren die Bemühungen um eine Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts auch im Kontext der Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD), die durch internationale Tagungen eine inhaltliche Neuordnung des mathematischen Unterrichts in ihren Mitgliedsländern angestoßen hat (vgl. die entsprechenden Dokumente OECD, 1961, 1966). In der

BRD kamen solche politischen wie pädagogischen Bemühungen um eine Reform des mathematischen Unterrichts zu einem ersten sichtbaren Abschluss bereits im Beschluss der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland (KMK, 1968) „Zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“, der zum ersten Mal für die BRD einen einheitlichen (und dem Anspruch nach verbindlichen) Plan für den Mathematikunterricht in allen allgemeinbildenden Schulen formulierte. Der Text beruht auf der Idee mathematischer Grundstrukturen und entsprechender Schul-geeigneter Modelle, was sich in einer Schwächung euklidisch-statischen Denkens in der Geometrie zugunsten eines eher abbildungsgeometrischen Zugangs auswirkte. „Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik“ werden (womöglich erstmalig) in einem bundeseinheitlichen Dokument unter einem letzten Themenkreis ohne weitere Erläuterung immerhin erwähnt. Diese „neue Mathematik“ setzte bspw. für die Zahlbereichserweiterungen der unteren Sekundarstufe auf eine Orientierung an den algebraischen Grundstrukturen und für die Gleichungslehre auf eine begriffliche Klärung mit Hilfe der Aussagenlogik. Im Gymnasium sollte ein axiomatisches Verständnis der Mathematik mindestens gegen Ende des Unterrichts in Analysis und Linearer Algebra angestrebt werden. Überdeutlich wird so der stoffdidaktisch fundierte Rückgriff des mathematischen Unterrichts auf die grundlegenden Strukturen der Fachmathematik im Sinne einer Abbild-Didaktik, die Inhalte und Methoden ungeprüft aus einer Wissenschaftsdisziplin in den Unterricht überträgt. Fragt man unter diesen Vorgaben nach einer Bildung durch Mathematik, so ist zu entscheiden, ob und wie weit Bildung durch Wissenschaftspropädeutik möglich ist – und schon bei Blankertz (1969, S. 126–134) findet sich unter der Überschrift „Die Funktion der Wissenschaften“ eine fundierte Kritik an dieser „Abbild-Didaktik“.

In der dritten Etappe nach Vohns (2016) emanzipiert sich der schulische (Mathematik-)Unterricht von dieser strikten Orientierung an der Wissenschaftsdisziplin Mathematik. Die Mathematik in der Schule kann nicht einfach die Mathematik der Hochschule imitieren, sondern muss „zwischen allgemeiner Menschenbildung, Erziehung zum mündigen Staatsbürger und pragmatischer Grundbildung […] vermitteln […] Es geht also […] um eine Einführung in eine altersgemäße Interpretation der Aktivität ‚Mathematik‘“, die vom Erstrechenunterricht der Grundschule bis in die letzte Klasse der Sekundarstufe II, etwa einer studienvorbereitenden Schule, durchzuhalten ist (vgl. Vohns, 2016, S. 38 f.). In der Mathematikdidaktik wird dafür in der Regel – übrigens auch heute, am Beginn des 21. Jahrhunderts – auf die drei “Grunderfahrungen” von Winter (1995, S. 37) verwiesen, die der Mathematikunterricht ermöglichen sollte (für eine Darstellung und Auseinandersetzung mit diesen Grunderfahrungen vgl. den folgenden Abschnitt 3).

Sowohl zeitlich wie programmatisch passt im Übrigen zu dieser Emanzipationsbewegung der Text von Fischer (1984) mit dem Titel „Unterricht als Prozess der

Befreiung vom Gegenstand: Visionen eines neuen Mathematikunterrichts“ im *Journal für Mathematik-Didaktik* (JMD). Das Abstract beginnt: „The central thesis is that one of the functions of mathematics education within the official educational system should be to make a contribution for the liberation from mathematics“ (S. 51).

Gegen Ende des 20. Jahrhunderts, verstärkt seit dem Anfang des 21. Jahrhunderts, gewinnen in einer vierten Etappe nach Vohns „Bildungsstandards“ und die sogenannte „Kompetenzorientierung“ an Bedeutung. Man kann mindestens für die Hinführung zum Studium die Jahre seit der Reform der gymnasialen Oberstufe des Jahres 1972 (mit Ausnahme der dritten Etappe) als einen Zeitraum beschreiben, in dem die große Freiheit des Individuums in der Wahl der zu lernenden Inhalte immer mehr eingeschränkt wurde. Das lässt sich auch in den Mathematik-Themen der gymnasialen Oberstufe zeigen, wo sich eine Vielfalt von Themen immer weiter auf die „drei Säulen“ der Oberstufen-Mathematik (Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik) verengt. Man vergleiche dazu nur den Themenkatalog möglicher Kurse des Jahres 1977 (mit Einträgen wie „Boolesche Algebra“, „Komplexe Zahlen“, „Grundlagen der Geometrie“, „Wirtschaftsmathematik“ oder „Logik“; vgl. Luschberger, 1977, S. 257) mit den „Einheitliche[n] Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik“ der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der BRD (KMK in der Fassung von 2002), wo auf Seite 3 festgestellt wird: „Den folgenden drei Sachgebieten kommt unverändert zentrale Bedeutung zu: Analysis […] Lineare Algebra/Analytische Geometrie […] Stochastik“. Für die Abituraufgaben werden zwar „mögliche zusätzliche Themenbereiche“ genannt, doch lassen sich diese bis auf „numerische Näherungsmethoden“ (S. 8) genau den genannten drei Sachgebieten zuordnen.

In Bezug auf die Idee einer Bildung im Rahmen von Schule ist eine Verschiebung nicht nur der Terminologie festzuhalten. In der einflussreichen „Expertise“ „Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards“ wird explizit in Anspruch genommen, dass diese Expertise mit ihren „Bildungsstandards und Kompetenzmodelle[n] […] die pragmatische Antwort auf die Probleme der Bildungsziele“ (vgl. die Überschrift bei Klieme et al., 2003, S. 62) liefert, und zwar insbesondere durch die Betonung der Kompetenzen an Stelle einer Formulierung von Bildungszielen. Dabei sieht die Expertise die „Probleme von Bildungsdebatten in modernen Gesellschaften […] [in] fünf Problemdimensionen“:

(1) Unentscheidbarkeit der anthropologischen und gesellschaftlichen Prämissen für Bildungsprozesse,
(2) Offenheit der Zukunft für Individuen und Gesellschaft,
(3) Unbestimmtheit der Aufgaben und Anforderungen,
(4) Pluralität und Konflikthaftigkeit der Erwartungen sowie
(5) Utopieüberschuss und Realisierungsprobleme.

(S. 58)

So wird dann bündig formuliert „‚Kompetenzen' beschreiben aber nichts anderes, also solche Fähigkeiten der Subjekte, die auch der Bildungsbegriff gemeint und unterstellt hatte" (Klieme et al., 2003, S. 65). Eine Auseinandersetzung mit dem Kompetenzbegriff der Expertise ist also am Platze.

Zunächst einmal übernehmen Klieme et al. (2003, S. 72) einen Kompetenzbegriff aus der pädagogischen Psychologie:

> In Übereinstimmung mit Weinert (2001, S. 27 f.) verstehen wir unter Kompetenzen die bei Individuen verfügbaren oder von ihnen erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können.

Der schärfste Gegensatz zwischen einem Bildungskonzept und Kompetenzmodellen der Expertise ist die Frage nach der Messbarkeit. Schon früh heißt es in der Expertise „Die Kompetenzen werden so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mit Hilfe von Testverfahren erfasst werden können" (Klieme et al., 2003, in der Zusammenfassung S. 9) oder „Die Kompetenzen werden so konkret beschrieben, dass sie in Aufgabenstellungen umgesetzt und prinzipiell mit Hilfe von *Testverfahren* erfasst werden können." (S. 19; Kursivierung i. O.), während die Kritik am Bildungsbegriff in der Feststellung zum Ende kommt „es gibt bisher keinen Konsens über die angemessene Operationalisierung" des Bildungsbegriffs, er erweist sich also als resistent gegeben die Forderung seiner Messbarkeit. Insbesondere bei der Diskussion um die „Legitimationsprobleme" im Abschnitt 5.4 der Expertise spielt die Frage der Messbarkeit eine zentrale Rolle. Mit von Hentig wird angeführt, dass die

> Bildungskriterien nicht messbar sind […] [Kompetenzorientierte] Bildungsstandards [können demgegenüber] zugleich eine kriteriengestützte Operationalisierung und Messung von Erwartungen an die Lernenden und die Qualität pädagogischer Arbeit anbieten und dabei auch die Bereiche des Wissens und Könnens ausweisen, an denen solche Qualität lehrbar und steigerbar wird. (Klieme et al., 2003, S. 69 f.)

Für das Schulfach Mathematik führen dann kompetenzorientierte Bildungsstandards wegen der Forderung der Messung der Kompetenzen wieder zurück zu einer Aufgabendidaktik im Sinne Lennés (siehe oben, die Beschreibung der ersten Etappe). Es geht etwa bei den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife" (KMK, 2012) wieder um das korrekte Beherrschen von Verfahren zum Lösen von bestimmten Aufgaben(-typen). Die Bildungsstandards für die Mathematik verzichten so mit ihrer Betonung der Messbarkeit der Kompetenzen letzten Endes wieder auf die spezifische Art und Weise der Mathe-

matik (als Grenzerfahrung des Denkens) wie auf die Phänomene, die uns alle angehen oder angehen sollten (also das Kriterium der Aufklärung über uns und die Welt).

Für diesen Abschnitt möchte ich noch auf ein terminologisches Problem hinweisen, dass mit der Kompetenz-Orientierung und der besonderen Gewichtung der Messbarkeit einhergeht. Folgt man der Terminologie und Praxis der Linguistik, aus der der Kompetenzbegriff entliehen worden ist (vgl. z. B. „Kompetenzen sind in der Pädagogik erlernbare, kognitiv verankerte und daher wissensbasierte Fähigkeiten und Fertigkeiten, die auf eine erfolgreiche Bewältigung zukünftiger Anforderungen in Alltags- und Berufssituationen abzielen." versus „*Als Performanz bezeichnet man in der Psychologie ein in einer konkreten Situation gezeigtes Verhalten oder eine manifest erbrachte Leistung. Die Performanz kann erheblich von einer latent vorhandenen Kompetenz auf einem bestimmten Gebiet abweichen." (nach Stangl, 2022),* so werden mit der Frage der Messbarkeit nicht solche der Kompetenz, sondern die Frage nach der „Performanz" aufgeworfen. Wir haben es also eigentlich durch die Bedeutung der Messbarkeit bei den Bildungsstandards mit einer Orientierung an der Performanz zu tun, oder mit Vohns (2016, S. 41): „Kompetenzorientierung ist so gelesen im Kern erneut Performanzorientierung". Die darüber hinausweisende Frage nach den Kompetenzen eines Individuums würde zwar die Frage nach der Bildung dieser Person erleichtern, ist aber mit der Betonung der Messbarkeit, also der Performanz, nicht gestellt. Die meisten Äußerungen zur Kompetenz lassen jedenfalls einen Hinweis auf die komplizierte Beziehung zwischen Verhalten in einem Test, der Performanz, und einem Schluss auf die damit angedeutete Kompetenz vermissen. Im Übrigen finden sich analoge Überlegungen schon im Text von Vohns (2013, S. 323 ff.), wo man insbesondere den Abschnitt zu Heinrich Winter auch als Kritik am Kompetenzbegriff der Bildungsstandards lesen kann. Die dortige Auseinandersetzung mit Texten von Bernhard Dressler (Vohns, 2013, S. 327 ff.) problematisiert auf andere Weise die Beziehung zwischen Performanz und Kompetenz, während die dortige Auseinandersetzung mit dem Allgemeinbildungsbegriff von Roland Fischer (Vohns, 2013, S. 325 ff.) wie auch die Diskussion zu Dressler auf die geringe Bedeutung einer Ausführungskompetenz bei hohen Fähigkeiten zur Kommunikation mit ExpertInnen abstellt.

2 Weiterdenken – auch an Beispielen

2.1 Allgemeinbildung und Mathematikunterricht

Was kann man aus der oben beschriebenen Geschichte lernen? Offensichtlich erfordert die Idee der Bildung ein bestimmtes Verhältnis von Individuen/eines Individuums zu ihrer/seiner Umgebung. Und zunächst einmal wird dieses Verhältnis durch ein formales Kriterium bestimmt, nämlich es soll „in Ordnung" sein (siehe die oben zitierte Begriffsbestimmung von Klafki). Ich ziehe aus dieser Bestimmung zwei Schlüsse:

Zum einen kann in verschiedenen Umgebungen Gebildetsein oder -werden für ein Individuum durchaus Verschiedenes bedeuten – je nachdem, was über ihre/seine Umgebung zu sagen ist. Das erklärt dann auch, warum man heute nicht einfach die von Klafki (1985/2007) benannten „epochal typische[n] Schlüsselprobleme“ als Kriterium für Gebildetsein oder -werden benutzen kann. Man lernt aber aus seinen Überlegungen, dass mindestens zur Zeit der Verfassung des ursprünglichen Textes fünf Schlüsselprobleme einer „Bildung im Medium des Allgemeinen“ (so der Titel des Abschnitts, S. 56 ff.) zu nennen sind: die „Friedensfrage“, die „Umweltfrage“, die „gesellschaftlich produzierte Ungleichheit“, die „Gefahren und die Möglichkeiten der neuen technischen Steuerungs-, Informations- und Kommunikationsmedien“ und die „Erfahrung der Liebe, der menschlichen Sexualität, des Verhältnisses zwischen den Geschlechtern oder aber gleichgeschlechtlicher Beziehungen“[1]. Klafki erläutert jedes dieser Schlüsselprobleme noch kurz, betont aber im direkten Anschluss der Nennung die geschichtliche Wandelbarkeit dieser Schlüsselprobleme und die Notwendigkeit einer diskursiven Bestimmung derselben und ihrer Folgen.

Zum anderen finden sich – wiederum bei Klafki – Anforderungen an ein sich bildendes Individuum. Es geht dabei um die „Aneignung von Einstellungen und Fähigkeiten, deren Bedeutung über den Bereich des jeweiligen Schlüsselproblems hinausreicht“. Klafki (1985/2007) nennt hier „Kritikbereitschaft und -fähigkeit einschließlich […] Selbstkritik“, „Argumentationsbereitschaft und -fähigkeit“, „Empathie“ und „vernetzendes Denken“ (S. 63).

Blickt man auf die Genese des Bildungsbegriffes im vorigen Abschnitt dieses Textes zurück, so bestätigt sich mit diesen Überlegungen von Klafki, dass es schwer bis unmöglich ist, Gebildetsein im Sinne dieser Klafkischen Bestimmung zu messen. Weiterhin geben weder die Klafkischen „Schlüsselprobleme“ noch seine „Einstellungen und Fähigkeiten“ thematische Hinweise auf einen bildsamen Mathematikunterricht.

Dieses Manko wird in der Mathematikdidaktik gegenwärtig in der Regel durch Verweise auf zwei Protagonisten kompensiert. Zum einen werden oft – auch in Richtlinien und Lehrplänen – die Winterschen Grunderfahrungen zur Mathematik herangezogen, um Hinweise auf einen gegenwärtigen Bildungswert der Mathematik zu finden (vgl. Winter, 1995, S. 37). Dabei geht es darum,

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Mathematikunterricht sollte nach Winter so zu einer „Reflexion auf das eigene Denkhandeln“ führen, was bei einer gefundenen Lösung für eine Aufgabe zu Überlegungen zu möglichen Fehlern, aber auch zu eventuellen Verallgemeinerungen führen sollte. Auch eine Reflexion der Argumentationslogik und – bei einer Modellierung außermathematischer Sachverhalte – die Angemessenheit und der Einfluss von Interessen auf die Art der Modellierung sind zu prüfen (S. 42ff). Man kann in diesen Grunderfahrungen und Ansprüchen an den Mathematikunterricht eine mathematikspezifische Konkretisierung des Anspruches auf Allgemeinbildung sehen, wie er von Klafki am Anfang dieses Textes zitiert worden ist und sich von einer engen Anlehnung an die Wissenschaftsdisziplin Mathematik emanzipiert.

Zum anderen findet man in der Mathematikdidaktik oft Hinweise, aber auch Kritik an der Habilitationsschrift von Hans-Werner Heymann (1996) mit dem vielversprechenden Titel „Allgemeinbildung und Mathematik“. Im Rahmen seines Allgemeinbildungskonzeptes erarbeitet er sieben Ansprüche an eine Allgemeinbildung und diskutiert diese dann ausführlich in Bezug auf den Mathematikunterricht (S. 131–280). Dabei nennt er explizit einen „Katalog“ von „Mathematischen Inhalte[n] und inhaltsbezogenen Qualifikationen“, die der Mathematikunterricht im Sinne der Lebensvorbereitung – dem ersten der sieben Ansprüche – anzubieten habe (S. 136 f.). Er unterscheidet einen „Arithmetische[n]“ von einem „Geometrische[n] Bereich“ und bietet eine Liste von eindeutig mathematischen Inhalten, die eher im Sinne eines Werkzeuges und Mediums der Kommunikation zu verstehen sind als als Stoffkatalog. Insbesondere die Art der Nutzung von Mathematik wird in der Folge von Heymann detailliert diskutiert und die übliche Verkürzung zu Rechen-Algorithmen kritisiert (S. 138 ff.). Die anderen „Ansprüche“ führen im Übrigen weniger zu mathematischen Themen, als vielmehr zu Konsequenzen für das Mathematik lernende Individuum (siehe „Anleitung zum Kritischen Vernunftgebrauch“, „Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft“ und „Stärkung des Schüler-Ichs“) und ihre/seine Beziehungen zur Umwelt („Stiftung kultureller Kohärenz“ und „Weltorientierung“, vgl. die Überschriften im Orientierungsrahmen des Heymannschen Allgemeinbildungskonzeptes, S. 51–128) wie auch zu „Merkmalen einer neuen Unterrichtskultur“ (S. 262 ff.).

Die Wintersche wie die Heymannsche Allgemeinbildungskonzeption teilen also die schon bei Klafki angelegte Überschreitung eines nur thematischen, materialen Verständnisses von (Allgemein-)Bildung und verweisen auf erwünschte formalbildende Aspekte einer solchen Bildung.

Ich möchte dennoch nicht auf Überlegungen zu Unterrichtsthemen verzichten und im Folgenden an Beispielen zeigen, wie man im Detail über einen Mathematikunterricht nachdenken kann, der „bildsam“ ist, d. h. einen “Bildungswert” hat. Da

ich weiterhin davon ausgehe, dass „man ohne Wolle nicht stricken kann“[2], soll es dabei zunächst um mathematische Inhalte gehen, dann um Konsequenzen für die Bildung über das Fach Mathematik hinaus. Sucht man weitere Anregungen für einen bildsamen Mathematikunterricht in allgemeinbildenden Schulen, so sei auf die Arbeitsblätter des Monats des Vereins von Mathematiklehrenden aus der Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei (MUED) verwiesen (siehe https://www.mued.de/weitere-arbeitsblätter-des-monats).

2.2 Beispiel 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Pandemie

Jenseits der gesetzlichen Vorschriften und Vorgaben stellen sich für jeden entscheidungsfähigen Menschen (ich vermeide bewusst: „Gebildeten“) im Zusammenhang mit der Verbreitung und Eindämmung der Viruskrankheit COVID-19 Fragen nach der Genauigkeit der Tests, nach der Notwendigkeit des Tragens einer FFP2-Maske z. B. im ICE oder der nach dem Sinn einer zweiten oder gar dritten Impfung gegen diese Krankheit.

Sucht man nach rationalen, womöglich evidenzbasierten Antworten, so muss man sich auf die Suche nach verlässlichen Vorinformationen begeben und lernt zum Beispiel sehr schnell, dass für die Test-Genauigkeit etwa eines Antigen-Schnell-Tests allenfalls der Vergleich mit dem wohl genauesten Test, nämlich einem PCR-Test zur Verfügung steht. Ein handelsüblicher Schnell-Test der Firma Safecare Biotech Co. Ltd. aus Hangzhou[3] bietet zum Beispiel die abgebildeten Informationen. Sehr schnell ist klar, dass schon für die Nachvollziehbarkeit der Berechnung der relativen Empfindlichkeit und Spezifität sowie der Genauigkeit elementare Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik hilfreich sind, die dann für weitere Konsequenzen aus der Genauigkeit mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit im Sinne einer Bayes-Statistik verarbeitet werden könnten.

LEISTUNGSMERKMALE

1. Klinische Empfindlichkeit, Spezifität und Genauigkeit

Nasenabstrich mit Wattestäbchen

Insgesamt wurden 237 frische Nasenabstrichproben mit Wattestäbchen von symptomatischen und asymptomatischen Personen entnommen und getestet, darunter 109 positive Proben und 128 negative Proben. Die Ergebnisse des CLINITEST Rapid COVID-19 Antigen Test wurden mit den Ergebnissen aus von der US FDA für die notfallmäßige Anwendung autorisierten RT-PCR-Assays für SARS-CoV-2 anhand von mit Wattestäbchen entnommenen Nasopharynx-Abstrichproben verglichen. Die Gesamtergebnisse der Studie sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Tabelle 1: CLINITEST Rapid COVID-19 Antigen Test (Nasenabstrich mit Wattestäbchen) vs. PCR

Methode		PCR		Gesamtergebnisse
CLINITEST Rapid COVID-19 Antigen Test (Nasenabstrich mit Wattestäbchen)	Ergebnisse	Positiv	Negativ	
	Positiv	106	0	106
	Negativ	3	128	131
Gesamt		109	128	237

Relative Empfindlichkeit: 97,25 % (95%-KI*: 92,17 bis 99,43 %)
Relative Spezifität: 100 % (95%-KI*: 97,69 % bis 100 %)
Genauigkeit: 98,73 % (95%-KI*: 96,35 % bis 99,74 %)

*Konfidenzintervalle

Um etwa die Verbreitung des Virus in ICE-Zügen und die Wirkung von FFP2-Masken abzuschätzen, könnte man annehmen, dass die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind. Kennt man die Werte für die Virus-Verbreitung und die Schutzwirkung der Maske, so mag man diese Wahrscheinlichkeiten dann multiplizieren. Je nach Über- oder Unterschreitung eines (womöglich selbst gewählten) Schwellenwertes wird man entscheiden bzw. die Vorgaben von öffentlichen Stellen akzeptieren und/oder kritisieren und sich selbst entscheiden, ob man in ICE-Zügen eine Maske tragen sollte. Jedenfalls unvermeidlich dürfte ein Verständnis des Konzeptes der Unabhängigkeit von Wahrscheinlichkeiten zu deren Berechnung sein. Ich will nicht verschweigen, dass es mir nicht gelungen ist, die Wahrscheinlichkeiten zur Virus-Verbreitung aus öffentlich zugänglichen Quellen zu entnehmen. Die passendste Information war noch die aus einem Dokument des Robert-Koch-Institutes, dass FFP2-Masken bei guter Anbringung mindestens 94% der Testaerosole aus der Atemluft filtern (Bundesinstitut für Arzneimittel und Medizinprodukte, 2022).

Die Frage nach der Notwendigkeit oder Wirksamkeit einer Zweit- oder Dritt-Impfung gegen das Corona-Virus ließe sich bzgl. einer Betrachtung eines einzelnen Menschen mit denselben mathematischen Werkzeugen bearbeiten. Für eine Betrachtung dieser Frage in Bezug auf eine Gruppe oder die Gesamtgesellschaft dürften globalere Modelle – wie etwa die Perkolationstheorie – einzusetzen sein.

Sollte man aus den Beispielen schließen, dass heute – unter den Bedingungen der weiten Verbreitung des Corona-Virus – gewisse Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik zur Allgemeinbildung gehören und dementsprechend schon im Mathematikunterricht der für alle Lernenden obligatorischen Sekundarstufe I Konzepte der Bayes-Statistik zu lehren sind?

2.3 Beispiel 2: Normatives Modellieren

Die Beispiele im vorigen Abschnitt beruhten u. a. auf dem Versuch, medizinisch bedeutsame Verhältnisse zu modellieren. Man konnte jeweils davon ausgehen, dass unabhängig von der Tatsache der Modellierung wesentliche Parameter der Situation durch die „Umstände“ gegeben waren. Im Kontrast zu dieser Problemlage wurde in der MaBind-Tagung immer wieder die Frage der „normativen Modellierung“ angesprochen (vgl. z. B. die Kapitel von Pohlkamp und von Liebendörfer et al. in diesem Buch).

Typische Fragen, an denen man die Notwendigkeit einer normativen Modellierung aufweisen kann, sind zum Beispiel „(Wie) Soll man eine Vermögenssteuer einführen?“ oder „(Wie) Soll man Zinsen – angesichts von Rezession und/oder Inflation – erhöhen oder abschaffen?“ Für die Abschaffung sei nur auf das Zinsverbot im Islam verwiesen. Oder: „Wie soll man überhaupt – falls man überhaupt Zinsen einführen will – Zinsen berechnen?“. Die übliche gesetzlich festgeschriebene Berechnung nach dem Modell einer in Geldmenge und Zeit der Geldüberlassung lokal linearen Berechnung ist keineswegs zwingend. Antworten auf diese

Fragen sind nur zu haben, wenn man Zinsen (wie im Übrigen auch Steuern) als veränderbare, von Menschen gesetzte Normen auffasst. Die Folgen solcher Entscheidungen können in normativen Modellen mit Hilfe der Mathematik abgeschätzt werden - und solche Abschätzungen dürften die Entscheidungen der entsprechenden Personen, Parteien bzw. Gremien durchaus beeinflussen.

Demnach gehört also ein Verständnis von insbesondere normativer Modellierung zur (Allgemein-)Bildung, während die üblicherweise im Unterricht behandelte deskriptive Modellierung mindestens für an Aufklärung und Emanzipation interessierte Pädagogen eigentlich auch nur eine begrenzte Wertigkeit hat. In der Dissertation von Pohlkamp (2021) lässt sich dann nachlesen, wie Unterricht zum Thema „Normative Modellierung“ aussehen könnte. Gleichzeitig kann das „Normative Modellieren“ als Beispiel eines Themas dienen, welches notwendig mit der Mathematik verbunden ist, aber eindeutig über eine enge mathematische Thematik hinaus geht.

2.4 (Allgemein-)Bildung durch Mathematik?

Erinnert man sich an die oben zitierten Winterschen Grunderfahrungen, so ist insbesondere mit Bezug auf die zweite Grunderfahrung unklar, was denn die „mathematische[n] Gegenstände und Sachverhalte […] als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art“ sein sollen. Sowohl bei speziellen Themen wie der Corona-Krankheit als auch beim normativen Modellieren erweist sich die Mathematik als brauchbares, wenn nicht unverzichtbares Werkzeug und Darstellungsmedium, aber weniger *als genuiner* Beitrag zur Bildung. Man könnte jeweils auch versuchen, rein qualitativ zu argumentieren und so den Einsatz von Mathematik vermeiden. Ich möchte in diesem Unterabschnitt die Auseinandersetzung mit dem Unendlichen als einen Beitrag der Mathematik zur (Allgemein-)Bildung diskutieren und dabei auch Konsequenzen für Unterrichtsinhalte insbesondere der Grund- und Leistungskurse in der Sekundarstufe II ziehen.

Insbesondere in den höheren Klassen der Sekundarstufe I finden sich in den Lehrplänen des Mathematikunterrichts schon heute Themenbereiche, die Anlässe für Überlegungen zum Thema „Unendlichkeit“ bieten könnten[4]. Bei der Behandlung der Dezimalzahlen und deren Beziehungen zu den rationalen Zahlen im Allgemeinen begegnen die Lernenden dem Unendlichen bei der Frage nach der Periode von Dezimalzahlen. Die Thematik kann sich dann in der Geometrie bei der Kreisberechnung im Zusammenhang mit der Kreiszahl π und deren nicht-periodischer Dezimalzahlentwicklung noch verschärfen, stellt sich aber auch schon vorher bei der Entdeckung irrationaler Zahlen meist aus Anlass der Länge der Diagonalen des Einheitsquadrates. Obwohl diese Zahlen als Dezimalzahlen nicht vollständig aufgeschrieben werden können, lässt sich mit ihnen doch rechnen (fast) wie mit den natürlichen Zahlen. Irgendwie fängt die Mathematik diese Unendlichkeit doch in endlichen Schreibweisen ein, um sie mindestens für die Zahlen mit Hilfe der irrationalen Zahlen vollständig in den Griff zu nehmen. Hier bieten sich erste

Gelegenheiten, sich dem Folgenbegriff (etwa in der Dezimalzahlentwicklung der Kreiszahl) und Grenzwerten (etwa bei der Betrachtung von Intervallschachtelungen für irrationale Zahlen) zu nähern.

Die reelle Analysis, die in der BRD mindestens in der gymnasialen Oberstufe unvermeidlich ist (KMK, 2012), thematisiert dann sowohl das unendlich Große wie das unendlich Kleine – auch wenn man die „grenzwertfreie Analysis" als den Versuch lesen kann, eben diese besondere mathematische „Welt eigener Art" zu vermeiden. Ich gehe davon aus, dass diese Vermeidungsstrategie einen Bildungswert der Sekundarstufen-Mathematik geradezu vernichtet. Statt den Grenzwert-Begriff aus der S-II-Mathematik zu eliminieren, sollte man ihn m. E. zu einem begrifflichen Schwerpunkt des Analysis-Kurses sowohl in Grund- wie in Leistungskursen machen. Neben den Rechenverfahren für die Ableitung, lokale Extrema und Integrale, die heute längst durch jedes Schul-geeignete Computer-Algebra-System „automatisiert" ausgeführt werden können, ist gerade die Auseinandersetzung mit dem unendlich Großen wie unendlich Kleinen ein Unterrichtsgegenstand, der längere unterrichtliche Beschäftigung im Sinne eines Bildungsangebotes der Mathematik verdient.

Das Unendliche als Thema eines Kurses ließe sich im Übrigen problemlos ausweiten, wenn man die Diskussionen um die Grundlagenkrise der Mathematik von der Entdeckung des Cantorschen „Paradieses" bis zu den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen für den gymnasialen Mathematikunterricht aufbereitet. Das Cantorsche Diagonalverfahren ist dann der geeignete Anlass, über Stufen im Unendlichen zu diskutieren, vielleicht auch „Hilberts Hotel" (vgl. z. B. Haas et al., 2021) zu thematisieren und erst recht klar zu machen, inwieweit die Mathematik „Welten eigener Art" erschaffen kann. So kann man sich im Unterricht vielleicht der Frage nach einer philosophischen Betrachtung der Axiomatik nähern. Ein Ausflug in die Geometrie – gestützt durch die Konstruktionsmöglichkeiten entsprechender Dynamischer Geometrie-Software wie Cabri-géomètre oder Cinderella – könnte einen solchen Mathematik-Kurs zum Thema Axiomatik abrunden. Der Kurs würde sich allerdings von den drei inzwischen klassischen Säulen Analysis, Lineare Algebra und Analytische Geometrie sowie Stochastik deutlich absetzen.

Man sollte noch hinzufügen: Kein anderes Schulfach als die Mathematik bietet die Gelegenheit, diese philosophisch grundierten Themen (Auseinandersetzung mit dem Unendlichen und mit der axiomatischen Erschaffung widerspruchsfreier Welten) der/m Lernenden anzubieten.

3 Schluss

Das bisher zum Thema Bildung und Mathematik Formulierte möchte ich zu folgenden Thesen zusammenfassen:

(1) Ein Bildungsbegriff braucht – wie schon die Bildungstheorie der geisteswissenschaftlichen Pädagogik bis hin zu den Thesen von Wolfgang Klafki

– die Verbindung zwischen Individuum *und* Gesellschaft. Diese Verbindung sollte „in Ordnung“ sein, womit das Problem von Bildung eines Individuums umschrieben ist. Allerdings erbringt diese Erkenntnis zunächst nur eine formale Beschreibung dessen, was Bildung sein könnte.

(2) Ein heutiger Bildungsbegriff überschreitet eine materiale Bildungstheorie und lässt sich nicht auf die Nennung von Unterrichtsthemen beschränken. Er braucht Ideen mindestens für die Förderung überfachlicher Kompetenz und Performanz (z. B. Modellierungsfähigkeiten). Mathematikunterricht kann dazu beitragen und ist in bestimmten Themenbereichen sogar unverzichtbar, wenn man auch quantitative Ansprüche an die zu gebenden Antworten hat.

(3) Die fachlichen Inhalte eines bildenden Mathematikunterrichts sind wandelbar. Die jeweilige Fachdidaktik, hier also die Mathematikdidaktik, hat solche Inhalte und Verfahren in Bezug auf die „aktuelle Lage“ (zeitlich/räumlich) und ihre „Bildsamkeit“ zu diskutieren. Womöglich lässt sich der Anspruch auf ein gutes Bildungsverständnis nicht einmal national einheitlich einlösen. Konsequenzen für nationale Bildungsstandards sind offensichtlich.

(4) Bei einem Mathematik-bezogenen Bildungsverständnis geht es selten bis „nie“ um die Mathematik für sich. Manchmal braucht Bildung allerdings einzelne mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten als Werkzeuge der Situationsanalyse oder Sprache der Informationsübermittlung. Im entwickelten Industriezeitalter / im Kapitalismus / heute in Mitteleuropa ist die Mathematik für diese Zwecke unverzichtbares und unersetzbares Werkzeug und Medium.

(5) Mathematik an und für sich ist möglicherweise etwas für ExpertInnen, ExotInnen, ÄsthetInnen und AmateurInnen (im Wortsinn: LiebhaberInnen). Das gilt mindestens, falls man sich auf die gegenwärtigen curricularen Vorgaben einlässt. Die Vermittlung von Mathematik um der Mathematik willen lässt sich insofern – von begrenzten Ausnahmen abgesehen – schwer mit einer zu befördernden (Allgemein-) Bildung legitimieren. Aussagen über die langfristige Bedeutung der Mathematik sollten aber nicht zu apodiktisch formuliert werden. Aus der Geschichte der Zahlentheorie kann man lernen, wie eine ehemals nutzlose, esoterische Teildisziplin der Mathematik zu einem unverzichtbaren Werkzeug der Sicherheitsindustrie geworden ist.

Zusätzlich möchte ich auf die fünf Thesen zur mathematischen Bildung von Andreas Vohns (2018, S. 19f) zustimmend verweisen. Vohns formuliert da ein Verständnis von mathematischer Bildung, das über weite Strecken meinen oben formulierten Vorstellungen entspricht und diese weiter detailliert.

[1] Ich möchte anmerken, dass diese mindestens 15 Jahre alten Schlüsselprobleme von bemerkenswerter Aktualität sind.

[2] Ich habe lange nach einer Quelle für die Metapher des „Strickens ohne Wolle“ gesucht. Als beste Quelle findet man im Internet den Titel eines Textes von Ingrid Dietrich (1994) mit dem Titel „Allgemeine Didaktik ist wie Stricken ohne Wolle“.

[3] S. https://www.safecare.com.cn/

[4] Die Abwesenheit einer größten natürlichen Zahl oder einer größten Primzahl wären noch frühere Gelegenheiten, über das Thema „Unendlichkeit“ im Unterricht zu sprechen.

Literatur

Blankertz, H. (1969). *Theorien und Modelle der Didaktik* (2. Aufl.). Juventa.

Blankertz, H. (1982). *Die Geschichte der Pädagogik: Von der Aufklärung bis zur Gegenwart.* Büchse der Pandora.

Bundesinstitut für Arzneimittel und Medizinprodukte (2022). *Hinweise des BfArM zur Verwendung von Mund-Nasen-Bedeckungen, medizinischen Gesichtsmasken sowie partikelfiltrierenden Halbmasken (FFP-Masken).* Abgerufen am 4.12.2022 unter https://www.bfarm.de/SharedDocs/Risikoinformationen/Medizinprodukte/DE/schutzmasken.html

Chevallard, Y. (1982). Pourquoi la transposition didactique? [Wozu didaktische Transposition?]. *Actes de l'année,* 1981-1982, 167–194. http://yves.chevallard.free.fr/spip/article.php3?id_article=103

Dietrich, I. (1994). Allgemeine Didaktik ist wie Stricken ohne Wolle: Zur Bedeutsamkeit des Streits der Disziplinen. In M. A. Meyer & W. Plöger (Hrsg.), *Allgemeine Didaktik, Fachdidaktik und Fachunterricht* (S. 235–242). Beltz.

Fischer, R. (1984). Unterricht als Prozeß der Befreiung vom Gegenstand: Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik, 5,* 51–85.

Haas, K., Hahn, V., & Klevesath, I. (2021). *Hilberts Hotel.* https://funfacts.mathi.uni-heidelberg.de/index.php/Hilberts_Hotel (09.12.2022)

Hentig, H. v. (1996). *Bildung: Ein Essay.* Hanser.

Heymann, H.-W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Beltz.

Klafki, W. (1963). *Studien zur Bildungstheorie.* Beltz.

Klafki, W. (2007). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik: Beiträge zur kritisch-konstruktiven Didaktik.* Beltz. (Erstveröffentlichung 1985)

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P., Gruber, H., Prenzel, M., Reiss, K., Riquarts, K., Rost, J., Tenorth, H.-E., & Vollmer, H. J., Bundesministerium für Bildung und Forschung (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise. BMBF.* https://www.pedocs.de/volltexte/2020/20901/pdf/Klieme_et_al_2003_Zur_Entwicklung_Nationaler_Bildungsstandards_BMBF_A.pdf

KMK (Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder der Bundesrepublik Deutschland). (1968). *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen: Beschluss vom 3.10.1968.* (Zugänglich z. B. in der Dokumentation des IDM, Universität Bielefeld).

KMK (2002). *Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 01.12.1989 i.d.F. vom 24.05.2002).

https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/Beschluesse_Veroeffentlichungen/EPA-Mathematik.pdf

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife.* Kultusministerkonferenz. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Lenné, H. (1975). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland.* Klett.

Luschberger, H. (1977). Synopse zum Mathematikunterricht in der neugestalteten gymnasialen Oberstufe. In H. Bauersfeld, M. Otte & H.-G. Steiner (Hrsg.), *Schriftenreihe des IDM* (Bd. 8, S. 229–274). IDM, Universität Bielefeld.

OECD (1961). *New thinking in school mathematics. Organization for Economic Co-Operation and Development.*

OECD (1966). *Synopses for modern secondary school mathematics. Organization for Economic Co-operation and Development.* Erstveröffentlicht 1961.

Pohlkamp, S. (2021). *Normative Modellierung im Mathematikunterricht Bildungspotenzial, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen* [Dissertation, RWTH Aachen]. https://publications.rwth-aachen.de/record/825689

Stangl, W. (2022). *Online Lexikon für Psychologie und Pädagogik.* https://lexikon.stangl.eu/7006/kompetenz und https://lexikon.stangl.eu/7034/performanz (19.11.2022)

Sträßer, R., & von Aufschnaiter, C. (2009). Vom Bildungskanon zu den Bildungsstandards. In C.-P. Buschkühle, L. Duncker & V. Oswalt u.a. (Hrsg.), *Bildung zwischen Standardisierung und Heterogenität: Ein interdisziplinärer Diskurs* (S. 35–53). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Sträßer, R., Bruder, R., & Büchter, A. (im Druck). Zur Etablierung der Mathematikdidaktik nach dem zweiten Weltkrieg – unter Berücksichtigung von Entwicklungen in der DDR. In A. Büchter, et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (2. Aufl.), Springer.

Vohns, A. (2013). Zur Bedeutung mathematischer Handlungen im Bildungsprozess und als Bildungsprodukte. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess* (S. 319–333). Springer. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-658-02274-7_23

Vohns, A. (2016). Welche Fachlichkeit braucht allgemeine Bildung? Überlegungen am Beispiel des Mathematikunterrichts. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 100*, 35–42.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 105,* 8–21.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen: – Eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 17–31). Beltz.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 61*(4), 37–45.

Eva JABLONKA, Freie Universität Berlin
eva.jablonka@fu-berlin.de

Die Auseinandersetzung mit Mathematik im öffentlichen Diskurs als Teil eines politisch bildenden Mathematikunterrichts?

Der Beitrag knüpft an die bildungstheoretischen Arbeiten von Andreas Vohns an, in denen er auf zwei unterschiedliche Arten des gesellschaftlichen Gebrauchs von Mathematik aufmerksam macht, der generell von einer Wissensasymmetrie geprägt ist: Mathematik wird einerseits als intransparentes Arbeitsmittel von Expertinnen und andererseits als Mittel zur politischen Steuerung in Form von Kennzahlen genutzt. Von diesen Beobachtungen ausgehend, plädiert dieser Beitrag zunächst für eine intensivere Auseinandersetzung mit dem konkreten Gebrauch von Zahlen im öffentlichen politischen Diskurs als Ausgangspunkt für weiterführende bildungstheoretische Überlegungen. Anschließend werden exemplarische Analysen des öffentlichen Gebrauchs von Mathematik am Beispiel des Klimadiskurses und des Krisendiskurses während der COVID-19-Pandemie vorgestellt, die sich methodologisch auf Elemente von Theorien der politischen Argumentation und Rhetorik im Verein mit darüber hinaus gehenden diskurstheoretischen Annahmen stützen. Die daraus abgeleiteten allgemeinen Beobachtungen und Einsichten dienen dann als Ausgangspunkte für vier Thesen zur mathematischen Bildung. Unter Verweis auf die Tradition des Kritischen Mathematikunterrichts und der ‚Critical Mathematics Education' kommt der Beitrag zu dem Schluss, dass für einen politisch bildenden Mathematikunterricht das unvermeidlich Politische im öffentlichen Gebrauch von Zahlen anerkannt werden muss, um Bildungsprozesse durch das Deuten von Situationskomplexen in ihrer mathematisch-politischen Doppelnatur anstoßen zu können.

Wissensasymmetrie und Intransparenz als konstitutive Elemente des gesellschaftlichen Gebrauchs von Mathematik

Andreas Vohns' Beiträge zur gesellschaftlichen Funktion der Mathematik laden dazu ein, in bildungstheoretischen Überlegungen von Untersuchungen ihres tatsächlichen Gebrauchs auszugehen. Das ist kein leichtes Unterfangen. So erinnert uns Andreas Vohns (2015, S. 133) mit zugleich politisch und mathematikdidaktisch geschärftem Blick daran, dass in demokratisch verfassten Systemen Argumentationen zwar als Kernelement politischen Handelns gelten, dass aber die gesellschaftlichen Wirkungen des „mathematischen Modellierens als Argumentationswerkzeug" schwer zu fassen sind. Nichtsdestotrotz gelingt es ihm, unter Rückgriff auf soziologische Untersuchungen herauszuarbeiten, wie „beschreibende mathematische Modelle der zwischenmenschlichen Verhältnisse jedenfalls auch durch ihre *soziale Funktionalität* als ‚technology of trust' motiviert sind."

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 83–97). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Außerdem macht uns Andreas Vohns (2018, S. 14) mit Verweis auf die ‚Principal-Agent-Theorie' auf Asymmetrien der Laien-Expertinnen-Beziehung aufmerksam. Während politische Funktionsträgerinnen als Laien die Verantwortung für die Entscheidung tragen, haben die Expertinnen einen Wissensvorsprung. In solchen Situationen zeigt sich Andreas Vohns zufolge eine doppelte Nutzung von Mathematik: Sie ist einerseits ein intransparentes Arbeitsmittel der konsultierten Expertinnen, wird aber andererseits als Vertrauenstechnologie zur Rechtfertigung und Bewertung von auf Expertenwissen basierenden politischen Entscheidungen und Maßnahmen genutzt, insbesondere in Form von standardisierten Kennzahlen.

An dieser Stelle möchte ich noch anmerken, dass die zitierte ‚technology of trust' in Form von Quantifizierung und Standardisierung in Porters (1995) Geschichte ihrer Entstehung nicht, wie man annehmen könnte, eine bloße Abwanderung naturwissenschaftlicher Methoden in bürokratische und politische Zusammenhänge ist. Sie entsteht vielmehr als eine strategische Antwort auf den Rechtfertigungsdruck, dem traditionelle Eliten gegenüber einer sich formierenden kritischen Öffentlichkeit ausgesetzt wurden. Kennzahlen und Regularien zu ihrer Benutzung definieren in der Folge den sozialen Handlungsspielraum und gewährleisten Unparteilichkeit. Nun geht aber der gegenwärtig anwachsende Bestand an Kennzahlen in Form standardisierter Indikatoren nicht nur aus „beschreibenden Modellen der zwischenmenschlichen Verhältnisse" hervor, die Andreas Vohns (2018, S. 14) im Blick hat, sondern auch aus dem Abgleich und der Aushandlung relevanter Wissensbestände aus naturwissenschaftlichen Modellen, wie bspw. Indikatoren im Zusammenhang der Klimapolitik. Sowohl deren technisches Zustandekommen, das auf der Expertise der konsultierten Expertinnen beruht, als auch der zugrunde liegende politische Aushandlungsprozess bleiben intransparent.

Die beiden hier angedeuteten unterschiedlichen Arten des gesellschaftlichen Gebrauchs von Mathematik – einerseits als intransparentes Arbeitsmittel der konsultierten Expertinnen und andererseits als Mittel zur politischen Steuerung in Form von Kennzahlen und Indikatoren – liefern einen produktiven Anknüpfungspunkt für weitere Untersuchungen. Die beiden Gebrauchsweisen zeigen sich insbesondere in (nicht-ökonomischen) „Krisen", deren formale Gemeinsamkeit im Entscheidungsdruck unter Unsicherheit angesichts eines drohendenden (noch abwendbaren) Szenarios liegt (etwa Boin et al., 2018). Zahlen treten dabei als ein wesentliches Moment im öffentlichen Diskurs in Erscheinung (wie in der „Klimakrise", „Bildungskrise", „Migrationskrise" oder „Coronakrise"). Besonders betont wird in Studien des öffentlichen politischen Diskurses, die sich den Handlungsbegründungen in „Krisen" widmen, deren diskursiver Konstruktionscharakter, indem herausgearbeitet wird, wie etwa die Wahl alarmierender Bezeichnungen sowie konzeptioneller Metaphern (wie „Klimakatastrophe", „Bildungskollaps", „Migrations-Tsunami", „Corona-Explosion") und generell die Nutzung eines bestimmten Krisen-Wortschatzes an der Konstruktion des Problemhaften einer Situation und somit an der Entstehung eines öffentlichen Krisenbewusstseins

beteiligt sind. Es geht dabei um die Frage, wie „Krisen“ in der Öffentlichkeit geformt und politisch verhandelt werden, insbesondere welche Wahrheiten in welcher Form in Umlauf gesetzt werden und mit welchen Mitteln Plausibilität hergestellt wird (vergl. Römer, 2020). Der Gebrauch von Zahlen findet in Studien von Krisendiskursen aber selten besondere Beachtung, wenngleich Zahlen sowohl bei der Feststellung des Krisenhaften einer „Lage“ als auch in der Rechtfertigung politischer Instrumente ihrer Adressierung eine zentrale Rolle spielen. Dass Zahlen dabei niemals „für sich selbst sprechen“, zeigt sich in allen spezifischen Analysen politischer Diskurse, beispielsweise zum Thema Migration, wo „hohe Zahlen“ entweder mit Gefahren (Überforderung, Gefährdung der Stabilität etc.), oder aber einer Verpflichtung und Chance (Abwendung einer humanitären Katastrophe, Ausgleich des demographischen Wandels, Fachkräfte etc.) verknüpft werden (Klein, 2017; Renting, 2017).

Die Betrachtung von Krisendiskursen halte ich insbesondere deshalb für vielversprechend, weil umstandslos konstatiert werden kann, dass darin Zahlen nicht nur des Eindrucks wegen herangezogen werden, und zugleich deren politischer Charakter offensichtlich wird. Meine Ausgangsthese ist nun, dass eine solche intensivere Auseinandersetzung mit dem konkreten Gebrauch von Zahlen im öffentlichen Diskurs neue Einsichten als Grundlage für bildungstheoretische Überlegungen liefert. Indessen kann sich eine solche Auseinandersetzung unter den Bedingungen der Wissensasymmetrie und Intransparenz, auf die Andreas Vohns unsere Aufmerksamkeit lenkt, ebendeshalb nur am Rande auf mathematische Überlegungen stützen.

Mathematik und Zahlen im öffentlichen Krisendiskurs

Wenn man sich in relevanten Forschungsgebieten außerhalb der Mathematikdidaktik umschaut, stößt man zwar selten auf tiefergehende Analysen des konkreten Gebrauchs von Zahlen oder mathematischen Modellen, aber durchaus auf für bildungstheoretische Überlegungen produktive Beiträge. Den folgenden Ausführungen zur Funktion von Zahlen im öffentlichen politischen Diskurs in diesem Abschnitt liegt deren selektive Auswertung zugrunde.

So wird in rhetorisch-argumentationstheoretischen oder linguistischen Annäherungen an politische Diskurse, die sich unter anderem am Topos-Konzept orientieren, ein „Datentopos“, der oft auf Zahlen zurückgreift, als Bestandteil eines allgemeinen Musters zur Rechtfertigung politischen Handelns ausgemacht. Das Topos-Konzept entpuppt sich unterdes als überaus komplex und unscharf. Grundlegend ist der Begriff der *Argumentation*, die im Forschungszusammenhang der politischen Rhetorik als eine Form sprachlichen Handelns aufgefasst wird, in der möglichst kohärent und plausibel auf Basis von (in bestimmten Gruppen) geteilten Wissensbeständen, Überzeugungen, impliziten Normen und Denkgewohnheiten versucht wird, „mit Hilfe des kollektiv Geltenden etwas kollektiv Fragliches

in etwas kollektiv Geltendes zu überführen“ (Klein, 1980, S. 19). Eine Textstruktur (im weitesten Sinn) als Ganzes kann als Argumentation gelten. *Topoi* sind darin strukturbezogene oder inhaltsbezogene Argumenttypen, die zur Kohärenz bzw. Plausibilität der Argumentation beitragen und zu stabilen, gattungsspezifischen Mustern zusammengesetzt sein können. Es geht in der Analyse von öffentlichen politischen Diskursen vor allem darum, das vorausgesetzte, die einzelnen Aussagen verbindende, implizit Geltende herauszuschälen (Klein, 2019; Römer, 2018; Wodak & Köhler, 2010). Der sogenannte ‚Handlungs-Topos‘ ist in diesem Zusammenhang eine gattungsprägende Kategorie, ein typisches zusammengesetztes Muster, das darauf zielt, ein politisches Handlungskonzept argumentativ zu rechtfertigen. Klein (2019) sieht in diesem Topos sogar ein kulturübergreifendes und transtextuelles Grundmuster politischen Argumentierens. Tatsächlich findet sich das Muster insbesondere auch in Krisendiskursen (etwa Kuck & Römer, 2012; Weingart, Engels & Pansegrau, 2002): Zunächst diene ein ‚Datentopos‘ der Charakterisierung einer besonderen Ausgangslage, die durch eine Bewertung dieser Lage, den ‚Valuationstopos‘, ergänzt wird. Das typische Argumentationsmuster enthalte weiterhin einen ‚Finaltopos‘, der ein situationsbezogenes politisches Handlungsziel nennt, gestützt durch einen Bezug auf allgemeine politische Werte, also einen ‚Prinzipientopos‘ (Klein, 2017). Diese „topische Basiskonstellation“ werde oft noch durch weitere Topoi ergänzt (Klein, 2019, S. 338 ff.).

Einem ‚Zahlen-Topos‘, sofern ein solcher überhaupt identifiziert wird, schenken entsprechende Analysen wie gesagt keine besondere Aufmerksamkeit. Daher liefern diese Untersuchungen ohne ergänzende, spezifisch auf den konkreten Gebrauch von Mathematik zielende Studien keine ausreichende Basis für bildungstheoretische Betrachtungen. Das Grundmuster eignet sich aber sehr gut zur Strukturierung von Beobachtungen zur Funktion mathematischer Werkzeuge in Argumentationen. Anknüpfend an die Untergliederung öffentlicher politischer Diskurse, die sich aus dem Grundmuster des ‚Handlungs-Topos‘ ergeben, möchte ich also im Folgenden auf die unterschiedliche Sichtbarkeit und die verschiedenen Funktionen mathematischer Werkzeuge in den Phasen aufmerksam machen. Dazu greife ich auch auf eigene abgeschlossene Analysen des Krisendiskurses in der COVID-19-Pandemie in Deutschland zurück (Jablonka & Bergsten, 2021) und ergänze diese durch weitere Beispiele aus dem Diskurs der Klimakrise, auf den sich einzelne linguistische Studien beziehen, die an geeigneter Stelle herangezogen werden. Methodologisch stützen sich die folgenden Überlegungen auf die oben erläuterten Elemente von Theorien der politischen Argumentation und Rhetorik im Verein mit darüber hinaus gehenden diskurstheoretischen Annahmen (zu letzteren siehe Jablonka & Bergsten, 2021). Diesen Annahmen zufolge entstehen relativ stabile politische Diskurse im Wettstreit um Deutungshoheiten, in dem ein Netz von Bedeutungen in einem bestimmten umkämpften Bereich in Beziehung zu zentralen politischen Referenzbegriffen (den allgemeinen politischen Werten des ‚Prinzipientopos‘) verfestigt wird. Auf tiefer gehende theoretische

Überlegungen muss hier aus Platzgründen verzichtet werden. Ebenso ist eine weitere Ausleuchtung des terminologischen Terrains im Rahmen dieses Beitrags nicht möglich, aber auch nicht nötig.

Zahlenbasierte Situationsdefinition

Im Vorfeld einer „Krise" wird die Funktion mathematischer Werkzeuge vom innerwissenschaftlichen Diskurs bestimmt. Das lässt sich sowohl in dem vergleichsweise kurz andauernden Krisendiskurs während der COVID-19-Pandemie als auch in den Anfängen des politischen Klimadiskurses beobachten. In einem innerwissenschaftlichen Diskurs wird zunächst mit Hilfe von Ergebnissen mehr oder weniger komplexer Mess- und Aggregationsprozesse von Daten oder deren Verarbeitung in mathematischen Modellen (unter Beteiligung verschiedener Disziplinen) eine problematische Konstellation konstatiert, von der bereits einige Symptome sichtbar werden. Die Art der benutzten Daten, mathematischen Modelle und Berechnungen (bspw. Klimamodelle und -projektionen oder Verbreitungs-Statistiken auf der Basis erster verfügbarer Nachweisverfahren von Fällen von Sars-CoV-2 beim Menschen) sind ohne Reduktion in fachdidaktischen oder populär-wissenschaftlichen Darstellungen kaum zugänglich, denn man kann deren mathematischem Gehalt nur selten selbständig auf die Spur kommen. Das ist vor allem bedingt durch die unterschiedlichen disziplinären Verankerungen, die Komplexität der Verfahren und die Verschachtelung der Mathematisierungen auf mehreren Ebenen, wobei auch die technischen Möglichkeiten (bspw. Datengenerierung, Auswertungsalgorithmen) die Modellierung beeinflussen. Über die Produktivität und Zuverlässigkeit (auch konkurrierender) mathematischer Modelle und anderer mathematischer Arbeitsmittel wird in diesem Stadium innerhalb der wissenschaftlichen Gemeinschaft auf Basis etablierter methodologischer Kriterien entschieden. Sie sind in der Regel im öffentlichen Krisendiskurs kaum sichtbar.

Dennoch hat die ggf. kontroverse Interpretation einer Konstellation als problematisch und krisenhaft (oder eben nicht) ihren Ursprung durchaus in der wissenschaftlichen Gemeinschaft. Ein prominentes Beispiel liefert der erste Bericht des *Club of Rome*, „The Limits of Growth", (Meadows et al., 1972). Auch die Metapher der „Klimakatastrophe" in Deutschland entspringt nicht politischen Interessensvertretungen oder den Medien, sondern stammt aus einer Stellungnahme des Arbeitskreises ‚Energie' der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG, 1986) von 1986 (Weingart, Engels & Pansegrau, 2002).

In der COVID-19-Pandemie spielten bei der Definition der Situation in Deutschland von Anfang an öffentliche Auftritte von Wissenschaftlern eine Rolle, was eine frühe Sichtbarkeit von Zahlen mit sich brachte. Anfangs wurden zur Situationsdefinition Zahlen aus verschiedenen Kontexten (z.B. Grippewellen) und anderen Ländern (Italien, China) herangezogen. In diesem Zusammenhang spielte im deutschen öffentlichen Diskurs die Strategie des *kontrastierenden Vergleichs*

eine Rolle (Jablonka & Bergsten, 2021): Dazu wurden einzelne ausgewählte Fallzahlen und Vergleichszahlen als „niedrig“ (und erst später als „hoch“) bewertet und so in Erzählungen aufgenommen, dass Emotionen und bestimmte Imaginationen nur mit *einer* Seite des Vergleichs assoziiert werden. Das funktionierte vor allem durch eine Auswahl entsprechenden Bildmaterials, wie bspw. von technisch gut ausgerüsteten Intensivstationen bei als „niedrig“ markierten Zahlen (im Vergleich zu „hohen“ Zahlen in anderen Kontexten). Der kontrastierende Vergleich lässt sich als ein anpassungsfähiger inhaltsunabhängiger Zahlen-Topos einordnen, da sowohl der Kontext des Vergleichs als auch die ausgewählten Größen entsprechend gewählt werden können.

Projektionen

Nach der Definition der Situation wird das Krisenhafte einer „Lage“ spätestens dann hervorgekehrt, wenn durch mathematikgestützte Projektionen zukünftige Zustände, auch mit irreversiblen Konsequenzen, berechnet werden, die eintreten werden, falls nichts dagegen unternommen wird. Alternative (und ggf. immer wieder erneuerte) mathematikgestützte Projektionen können dann Vergleichsszenarien aufzeigen, die eintreten werden, wenn bestimmte Maßnahmen ergriffen würden. Das lässt sich sowohl im langfristigen Klimadiskurs als auch im kurzlebigen Krisendiskurs während der COVID-19-Pandemie erkennen. Die Ergebnisse solcher Projektionen sind dann im öffentlichen politischen Diskurs sichtbar und ein wesentliches Moment in der Argumentation für einen dringenden Handlungsbedarf. Die zugrundeliegenden mathematischen Werkzeuge bleiben aber ebenso unsichtbar wie die vorausgehenden Mathematisierungen in den verschiedensten beteiligten wissenschaftlichen Disziplinen.

So gab es in der Rezeption des Club-of-Rome-Berichts (Meadows et al., 1972) in nicht-fachlichen Medien außer der Nennung des Zeitraums von 50 bis 100 Jahren, in dem die Effekte eintreten, kaum konkrete Zahlen, aber mehr oder weniger erschreckende Alltagsszenarien an verschiedenen Orten Deutschlands (etwa das berühmte Bild des unter Wasser gesetzten Kölner Doms auf dem Titelbild des DER SPIEGEL). Diese Darstellungen ähneln der im Zusammenhang des öffentlichen Krisendiskurses während der COVID-19-Pandemie identifizierten Strategie der *Assoziation*: Dazu werden Zahlen nicht kontextübergreifend oder innerhalb von Kontexten verglichen, sondern nur einzelne Zahlen oder Szenarien ausgewählt, die so mit Darstellungen konkreter Ereignisse, Objekte oder Verhaltensweisen kombiniert werden, dass Emotionen, Vorstellungskraft und Fantasie wachgerufen werden (Jablonka & Bergsten, 2021).

Häufig wurde in der öffentlichen Rezeption von „The Limits of Growth“ Mathematik bzw. der Computer als Arbeitsmittel thematisiert. Das wird in den Titeln von Medienbeiträgen sichtbar, wie etwa „Mathematik gibt Zukunftsbild“ (VDI-Nachrichten 20.09.1972), „Weltuntergangsvision aus dem Computer“ (Der Spiegel 14.05.1972), „Düsterer Zukunftsbericht aus dem Computer“ (Frankfurter

Rundschau am 17.03.1972). Diese methodenfokussierte Rezeption fiel in Deutschlang kritisch im Hinblick auf die Undurchschaubarkeit oder die Genauigkeit der Projektionen aus, führte aber insgesamt nicht zum Zweifel an den wichtigsten inhaltlichen Aussagen. Oft wurde die große Anzahl an Wissenschaftlerinnen betont, unter denen prinzipielle Einigkeit bestehe (vgl. Hahn, 2006, S. 104 ff.). Mit Bezug auf die Projektionen fallen im Vergleich mit den heute verfügbaren öffentlich zugänglichen (auch interaktiven) Visualisierungsoptionen in der Presseinformation zur oben erwähnten Feststellung der „Klimakatastrophe" der DPG (Heinloth, 1986) die handgezeichneten Graphen des natürlichen Verlaufs und des prognostizierten Effekts der „menschlichen Eingriffe in das Klimageschehen" auf.

Im öffentlichen Diskurs der Coronakrise in Deutschland wurden Projektionen vor allem mit Verweisen auf ‚exponentielles Wachstum' und dem Ziel der ‚Abflachung der Kurve' thematisiert und auch graphisch illustriert, wobei die Exponentialfunktion nur als metaphorisches Modell (ohne Verweis auf konkrete Zahlen oder Simulationen von Szenarien) benutzt wurde. Das kann man zwar als Verwechslung des epistemologischen Status empirischer und theoretischer Aussagen kritisieren (Kollosche & Meyerhöfer, 2021). In dem Diskurs fungierte die Exponentialfunktion (bzw. die ‚Kurve') aber als Konzept, das alle individuellen infizierten Personen in einem Aufruf zur Solidarität (Prinzipientopos) in einer *kollektiven* Gefahr (manchmal mit der Metapher einer „Explosion" der Zahlen) zu einem „Wir" zusammenbringt: „Wir sind in einem exponentiellen Wachstum" (RKI-Chef Lothar Wieler, Pressekonferenz am 18. März 2020) oder: „Und wir müssen alles tun, damit wir nicht wieder in ein exponentielles Wachstum kommen" (Kanzlerin Angela Merkel im ARD-Fernsehinterview am 2. Februar 2021). Während der COVID-19-Pandemie gab es außerdem relativ früh eine Reihe öffentlich zugänglicher interaktiver Visualisierungen und Prognosewerkzeuge, deren Funktionsweise und Datenbasis jedoch im Verborgenen blieb.

Kennzahlen

Im Hinblick auf die Planung und Kontrolle im Rahmen politischer Handlungsprogramme werden bei einer ‚Normalisierung der Krise', die dann als solche nicht immer wieder re-artikuliert werden muss, Kennzahlen oder komplexe Systeme von Indikatoren unter Konsultation von Expertengruppen entwickelt. Diese Zahlen übernehmen nun die Funktion einer Vertrauenstechnologie (siehe erster Abschnitt). Bezogen auf die hier angedeuteten Beispiele ist eine Gemeinsamkeit nur auf dieser abstrakten Ebene sichtbar. Im Laufe der ‚Coronakrise' wurden wechselnde Grenzwerte (verschiedener Maße) und schließlich das ‚kollektive Risiko' auf Basis von Berechnungen aus der Gesundheitsökonomie, in die neben epidemiologischen Kennzahlen Daten über die Gesundheitsressourcen eingingen, mehr oder weniger sinnvollen Warnsystemen zugrunde gelegt (unter anderem in Form einer ‚Corona-Ampel'), um Entscheidungen über die Einleitung oder Aufhebung von Maßnahmen ohne (weitere) Aushandlungsprozesse oder moralische

Erwägungen daran zu orientieren. Nun finden sich in öffentlichen Krisendiskursen aber oft zusammen mit der Präsentation von Kennzahlen und Indikatoren auch Bilder von Menschen in den angesprochenen Situationen, Erfahrungsberichte aus erster Hand oder kurze biographische Erzählungen. Diese Form der Darstellung haben Jablonka und Bergsten (2021) in ihrer Analyse des Krisendiskurses der COVID-19-Pandemie als das *Wiederaufladen* mit Emotionen zur Überwindung der scheinbaren ethischen Neutralität beschrieben.

Anknüpfungspunkte für eine politisch-mathematische Bildung

Ausgehend von diesen unvermeidlich kursorischen Erkundungen des konkreten Gebrauchs von Mathematik in Krisendiskursen und in Anknüpfung an die im ersten Abschnitt dargestellten Gedanken, möchte ich nun den Blick auf daraus resultierende allgemeine Beobachtungen und Einsichten lenken, die mir als Ausgangspunkte für vier Thesen zur mathematischen Bildung dienen.

Wissensasymmetrie und Intransparenz im Spannungsverhältnis von Unabgeschlossenheit und Kontrolle

Es wurde in den skizzierten Beispielen seitens der herangezogenen Expertinnen in öffentlichen Stellungsnahmen und auch in anspruchsvolleren Medien gar nicht versucht, die Zahlen so darzustellen, als stammten sie aus absolut verlässlichen Messungen oder exakten Berechnungen. Dennoch wurde etwa während der ‚Corona-Krise' immer wieder versprochen, dass bald noch ‚greifbarere' oder ‚belastbarere' Zahlen zur Verfügung stehen würden (Jablonka & Bergsten, 2021). Wenn aber für Krisen Unsicherheit angesichts eines drohendenden (noch abwendbaren) Szenarios kennzeichnend ist, erweist sich die Vorstellung von irgendwann ‚fertigen' mathematischen Modellen in Krisendiskursen als besonders unpassend, und zwar aus zwei Gründen: Erstens weil angesichts einer sich ändernden Situation und (zunächst strittigen) Problemdefinition in die Appelle zur Dringlichkeit fortwährend neue (oft massenhafte) Daten und Projektionen eingehen müssen, wobei sich auch die dazu herangezogenen mathematischen Verfahren weiterentwickeln (wie bspw. die in der öffentlichen Rezeption des Club-of-Rome-Berichts thematisierten Computersimulationen). Zweitens, weil sich darüber hinaus aufgrund der (mehr oder weniger kurzfristigen) Rückwirkung bestimmter politischer Maßnahmen auf die Entwicklung der krisenhaften Lage jede Modellierung von Effekten dieser Maßnahmen einer abschließenden Bestimmung entzieht. Daraus lässt sich die folgende These ableiten:

(1) Im Zusammenhang mit mathematischen Modellen im Mathematikunterricht, die – wenngleich der Modellbegriff meist im Dunkeln bleibt – gemeinhin als mit einem festen Kern mathematischer Strukturbeziehungen ausgestattet gedacht werden, sollte man sich verstärkt mit statistischen Berechnungen, Simulationen, komplexen Visualisierungen und Algorithmen beschäftigen. Nur stehen diese Anwendungen dann freilich im Spannungsverhältnis zu solchen, an denen ein mathematik-spezifischer Weltzugang selbst erlebt werden könnte, um zu erfahren,

„wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von Aufklärung durch sie zustande kommen kann“ (Winter, 1995, S. 38).

Die unterschiedliche Funktion von Kennzahlen als Steuerungsmittel und der Zahlen, die aus nach innerwissenschaftlichen Standards der beteiligten Disziplinen erzeugten Messungen und Prognosen zur Charakterisierung der ‚Lage‘ resultieren (siehe erster Abschnitt), wird im öffentlichen politischen Diskurs nicht sichtbar. Das mag auch daran liegen, dass (wie in den Beispielen ersichtlich) die *explizite* Politisierung von Wissenschaft in Krisendiskursen nicht erst außerhalb der wissenschaftlichen Gemeinschaft stattfindet und so die Unterschiede der den Gebrauch von Zahlen bestimmenden Diskurse verschwimmen. Unabhängig von der Erfüllung innerwissenschaftlicher Normen der Reliabilität von Kennzahlen und komplexen Indikatoren, folgt deren Gebrauch (im Unterschied zu den Situationsbeschreibungen und Projektionen) immer einer *politischen* und keiner innerwissenschaftlichen Logik, denn sie werden nicht um der Erkenntnis willen erzeugt, sondern um soziale Prozesse zu kontrollieren und zu optimieren. Es resultiert ein Spannungsverhältnis zwischen dem Bedürfnis, politische Handlungsmaßnahmen als auf gesicherten innerhalb der Wissenschaft von Expertinnen erzeugten Wahrheiten beruhenden, rationalen und alternativlosen Entscheidungen darzustellen, und der prinzipiellen Unabgeschlossenheit und Unsicherheit der aus innerwissenschaftlichen Prognosen und Modellszenarien resultierenden Zahlen. Daraus ergibt sich eine zweite These:

(2) Einem falschen Verständnis mathematischer Modellierung, das epistemische Unsicherheit und prinzipielle Korrigierbarkeit als Unzulänglichkeit wissenschaftlicher Methoden im Hinblick auf die Erfassung von Veränderungen interpretiert, muss vorgebeugt werden. Denn es hat womöglich zur Folge, dass Kritik an konkreten zahlenbasierten Argumentationen als ‚Irrationalität‘ ausgelegt wird. Man muss danach fragen, welchen Anteil die Sozialisation im Mathematikunterricht daran hat, am Glauben an die Abschließbarkeit von mathematischen Modellierungen und Berechnungen trotz epistemischer Unsicherheit festzuhalten.

Andreas Vohns macht uns im Zusammenhang mit Kennzahlen nicht nur auf die Intransparenz der Konstruktionen aufmerksam, sondern auch auf die Konsequenz der Unsichtbarmachung von Perspektivendifferenzen durch die Verdeckung der dahinter liegenden politischen Aushandlungsprozesse (vergl. Vohns, 2013, zur Armutsgefährdungsquote). Da sich in der ‚Klimakrise‘ die Ausrichtung an bestimmten quantifizierbaren Indikatoren als hegemonialer Diskurs etabliert hat, erscheint insgesamt der damit verbundene techno-ökonomische Zugang (Skrzipietz 2009) als alternativlos. In der Mathematikdidaktik macht darauf Barwell (2013) aufmerksam (siehe dazu auch Skovsmose, 2021). Daran schließt sich die folgende These an:

(3) In diesem Zusammenhang muss das Potential kritischer Bildung vor allem an den wirtschaftswissenschaftlichen Fakultäten gesucht werden, wo zu beklagen ist,

dass Modelle von Markt-Gleichgewichten vorherrschen, die für ökologische Veränderungsprozesse blind sind und die in volkswirtschaftliche Curricula genauso wie „zunehmende Ungleichheiten und geo- sowie demokratiepolitische Veränderungen bis hin zu Finanzkrisen nur grob vereinfacht“ Eingang finden, wobei „[i]n der Regel der vorherrschende mathematische Formalismus dazu [führt], komplexe soziale Phänomene als berechenbare Risiken zu verkennen (Lawson, 1997)“ (Prieler, Bärnthaler & Novy, 2022, S. 73; auch Beckenbach, 2017).

Vermeintliche Unmittelbarkeit und Sicherheit durch mathematische Bilder und Blackboxes

Im Vergleich mit den historischen Beispielen zur ‚Klimakrise‘ erscheinen inzwischen Darstellungen in Form von ansprechenden, auch interaktiven Visualisierungen sowie komplexe wissenschaftliche ‚Bilder‘ als fester Bestandteil des öffentlichen Diskurses. Im Zusammenhang der ‚Coronakrise‘ ließ sich beobachten, dass es oft die graphischen Darstellungen und Simulationswerkzeuge sind, die als überdauernde Produkte aus dem wissenschaftlichen Diskurs in Pressekonferenzen und in die Medien Eingang finden. Eine ähnliche Beobachtung brachte Hauge und Barwell (2015) dazu zu untersuchen, wie sich die Interpretation einer graphischen Darstellung von Szenarien der Erderwärmung aus einer Publikation des *Panel on Climate Change* (IPCC) dabei ändert. Zur Reinterpretation in einem Zeitungsartikel im Vergleich mit dem Originalbericht stellten sie fest, dass aus der (prinzipiellen) epistemischen Unsicherheit eine kontrollierbare Unsicherheit wurde.

In der ‚Coronakrise‘ wurden neben Graphiken auch einige Blackboxes angeboten, wie *CovidSIM* (2020) zur modellhaften Simulation von Epidemieszenarien, der ‚Oxford Covid-19 Government Response Tracker‘ (OxCGRT) mit aggregierten Kennzahlen der ‚Rigorosität‘ von politischen Maßnahmen in verschiedenen Ländern (Hale et al., 2021), oder ein interaktives Tool zur Berechnung des individuellen Infektionsrisikos in unterschiedlichen Innenraumumgebungen (Dinklage et al., 2020). Diese mathematikbasierten Werkzeuge sind *Blackboxes*, insofern als nur deren äußeres Verhalten sichtbar ist und keine Einsicht in die eingehenden Annahmen, in die in Daten transformierten Kategorien, deren Herkunft sowie deren mathematische Verknüpfungen und auch nicht in den Mechanismus der Überführung von Werten in Visualisierungen möglich ist. Bei der Verwendung dieser Blackboxes, die rasch sichtbare und (vermeintlich) zuverlässige Ergebnisse liefern, kann das Unsicherheitsgefühl angesichts der Vagheit von Daten und Prognosen kurzfristig verdrängt werden (siehe dazu auch Gellert & Jablonka, 2009). Die vierte These verweist auf ein damit zusammenhängendes Forschungsdesiderat:

(4) Die Aufarbeitung dieser gesellschaftlichen Anwendungen von Mathematik muss auch in der Mathematikdidaktik in Angriff genommen werden. Die Beispiele sind zahlreich. ‚Bilder‘, deren Erzeugung auf komplexen mathematischen Werkzeugen basiert, beruhen im Hinblick auf klimabedingte Krisenszenarios oft

auf Satellitenaufnahmen und Geodaten. Darüber hinaus existieren Projekte, bei denen Daten aus Sozialen Medien auf digitalen, ggf. interaktiven Karten abgebildet werden, und auch automatisch erzeugte Karten, die auf der Basis von KI-Algorithmen neben Satellitendaten und Drohnenaufnahmen auf Crowdsourcing (über mobile Endgeräte) oder auch auf die Auswertung von Zeitungsartikeln zurückgreifen, um ‚Vulnerabilität' zu berechnen (Mulder et al., 2016). Bereits im Hinblick auf klassische ‚wissenschaftliche Bilder' macht Heintz (2007, S. 78) darauf aufmerksam, dass deren suggestive Unmittelbarkeit ihren konstruktiven Charakter verschleiert, der auf einer Vielzahl von Entscheidungen für bestimmte Aufzeichnungs- und Bearbeitungsschritte beruht, „die sich im Prinzip an jedem Punkt in verschiedene Richtungen verzweigen können."

Weiterdenken: Deuten von Situationskomplexen in ihrer mathematisch-politischen Doppelnatur im Kritischen Mathematikunterricht

Die dargestellten Beobachtungen und Überlegungen zeigen insgesamt, dass sich eine „Hinwendung zum geistigen Ordnen und Deuten von Situationskomplexen in ihrer mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur, die prinzipiell für alle Menschen wichtig [ist]" (Winter, 1990, S. 135) im Rahmen des Mathematikunterrichts als schwierig erweist, wenn es um den Gebrauch von mathematischen Werkzeugen unter den Bedingungen der Wissensasymmetrie und Intransparenz als konstitutive Elemente des gesellschaftlichen Gebrauchs von Mathematik geht. Der Wissensasymmetrie kann man zwar durch Recherchen zu methodologischen Hintergrundinformationen und Hinzuziehen von Fachveröffentlichungen aus den beteiligten Disziplinen entgegenwirken, aber selbst sehr gute schulmathematische und statistische Kenntnisse reichen nur in Einzelfällen zum Verständnis aus. Das haben Kollosche und Meyerhöfer (2021) im Zusammenhang der ‚Coronakrise' aufgezeigt, wobei die Intransparenz von Computersimulationen und komplexen Visualisierungen freilich eine grundsätzliche bleibt.

Wie es in der Tradition des Kritischen Mathematikunterrichts bzw. der ‚Critical Mathematics Education' von Anfang an betont wurde (Damerow et al., 1974; Jablonka, 1996, S. 128 ff.; Volk, 1975; Volk, 1987; Skovsmose, 2023), reichen tatsächlich mathematische, statistische oder andere relevante naturwissenschaftlich-technische Kenntnisse aus *prinzipiellen Gründen* niemals zur kritischen Beurteilung aus. Das lässt sich an der Untersuchung der Krisendiskurse veranschaulichen. Es ist deutlich geworden, dass die diversen Anwendungen von Mathematik zu Beginn (im Rahmen der Diagnose einer krisenhaften Lage und der Feststellung möglicher Szenarios ihrer Entwicklung) von den einschlägigen innerwissenschaftlichen Diskursen bestimmt werden, was eine prinzipielle Offenheit und Vielfalt an (durchaus auch interessensgeleiteten und konkurrierenden) Zugängen einschließt. Jedoch wird die Heranziehung solcher Diagnosen und Prognosen als Legitimationsgrundlage für politische Handlungen und offensichtlich der Ge-

brauch von Kennzahlen und komplexen Indikatoren (unabhängig von deren Reliabilität und Validität) immer vom politischen Diskurs bestimmt. Diese Bestimmung tritt allerdings nicht klar zu Tage. So haben Jablonka und Bergsten (2021) in ihrer Analyse des Krisendiskurses in der COVID-19-Pandemie – wenig überraschend – eine Strategie der *Rationalisierung* ausgemacht: Diese Form der Argumentation zur Bewertung der Lage sowie zur Rechtfertigung der politischen Maßnahmen vermeidet Hinweise auf die prägenden politischen Überzeugungen der Akteure zugunsten technischer Beschreibungen. Dadurch wird suggeriert, dass die Plausibilität der politischen Entscheidungen *allein* auf den aus disziplinierten Beobachtungen und Begründungen abgeleiteten Aussagen einer homogenen wissenschaftlichen Gemeinschaft beruht. Dementsprechend ist eine Zielrichtung vieler Vorschläge im Rahmen des Kritischen Mathematikunterrichts seit langem das Aufspüren der dahinterstehenden politischen Interessen, etwa indem nach den Betonungen und Auslassungen bestimmter Aspekte einer Situationsdefinition durch deren Quantifizierungen und mathematische Modellierung gefragt, nach alternativen Mathematisierungen gesucht, die Inflation und Deflation von Zahlen, die sich auf dasselbe Problem beziehen, aufgedeckt und die scheinbare Neutralität von Darstellungen thematisiert und als ‚Ideology of Certainty' (Borba & Skovsmose, 1997) entlarvt wird (für einen Überblick über diese Vorschläge siehe Jablonka & Bergsten, 2021, S. 580).

Die in einem auf Expertisen und Fachgutachten beruhenden politischen Diskurs erwartbare Strategie der Rationalisierung wurde allerdings in dem Diskurs der ‚Coronakrise' immer durch weitere Strategien ergänzt (Jablonka & Bergsten, 2021). Diese bereits im vorausgehenden Abschnitt an Beispielen illustrierten Strategien des *kontrastierenden Vergleichs*, der *Assoziation* und des *Wiederaufladens* haben gemeinsam, dass Zahlen zwar ein prägendes Moment sind, aber dass sie zugleich auch Emotionen und Fantasie wachrufen, indem etwa Verantwortungsgefühl oder Solidarität geweckt, Beruhigung verbreitet oder Angst geschürt werden soll. So wurden beim *kontrastierenden Vergleich* von mehreren Zahlen aus verschiedenen Kontexten oder Zeiträumen entweder die höheren Zahlen mit bedrohlichen Szenarios (bspw. Bilder von Friedhöfen) oder die niedrigeren mit beruhigenden Darstellungen (bspw. Schutzkleidung) verknüpft. Die Strategie der *Assoziation* bestand indessen in der Präsentation nur einzelner Zahlen oder Szenarien ohne Vergleichshorizont in Kombination mit Bildern oder Beschreibungen konkreter Ereignisse, Objekte oder Verhaltensweisen, die mit der Krise oder den Maßnahmen zu ihrer Überwindung assoziiert werden sollten (bspw. Schreckensszenarien, ‚unerwünschte' Verhaltensweisen geselliger Jugendlicher, überfüllte bzw. leere Intensivstationen). Das *Wiederaufladen* zeigte sich als eine Strategie zur Überwindung der scheinbaren moralischen Neutralität der Darstellung des Problems und seiner Kontrolle und Steuerung mit Hilfe von Zahlen, Kennzahlen oder komplexen Indikatoren. Jablonka und Bergsten (2021) interpretieren diese Strategie als einen Versuch, der ‚ethischen Filtrierung' (Skovsmose, 2006), die

moralische Überlegungen oder ethische Dilemmata scheinbar ausräumt, entgegenzuwirken, aber zugleich weiterhin das Verlangen nach effizienten Lösungen zu stillen. Die Thematisierung dieser Strategien, die sich neben der Rationalisierung als prägender Bestandteil des Diskurses erwiesen, ist geeignet, das unvermeidlich Politische im öffentlichen Gebrauch von Zahlen (anzu-)erkennen. Denn um weiter darüber nachzudenken, wie eine Reflexion auf das „mathematische Modellieren als Argumentationswerkzeug“ im öffentlichen politischen Diskurs (siehe erster Abschnitt) Bildungsprozesse anstoßen kann, muss das Deuten von Situationskomplexen in ihrer *mathematisch-politischen* Doppelnatur im Mittelpunkt stehen.

Literatur

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: Critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education*, *15*(1), 1–16.

Beckenbach, F. (2017). Die (Re-)Produktion der modernen Standardökonomie als Problem für eine transformative Umorientierung. In R. Pfriem, U. Schneidewind, J. Barth & S. Graupe (Hrsg.), *Transformative Wirtschaftswissenschaft im Kontext nachhaltiger Entwicklung* (S. 165–214). Metropolis-Verlag.

Boin, A., ’t Hart, P., & Kuipers, S. (2018). The crisis approach. In H. Rodríguez, W. Donner & J. E. Trainor (Eds.), *The handbook of disaster research* (S. 23–38). Springer.

Borba, M., & Skovsmose, O. (1997). The ideology of certainty in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *17*(3), 17–23.

CovidSIM (2020). *Pandemic preparedness planning for Covid-19*. ExploSYS. http://covidsim.eu

Damerow, P., Elwitz, U., Keitel, C., & Zimmer, J. (1974). *Elementarmathematik: Lernen für die Praxis*. Ernst Klett.

Dinklage, F., Ehmann, A., Erdmann, E., Klack, M., Mast, M., Stahnke, J., Tröger, Vallentin, C., & Blickle, P. (2020, November 26). *Why is the risk of coronavirus transmission so high indoors?* ZEIT Online. https://www.zeit.de/wissen/gesundheit/2020-11/coronavirus-aerosols-infection-risk-hotspot-interiors

DPG (1986). *Warnung vor einer drohenden Klimakatastrophe*. Deutsche Physikalische Gesellschaft e.V. https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/stellungnahmen-der-dpg/klima-energie/warnung-vor-drohenden-weltweiten-klimaaenderungen-durch-den-menschen

Gellert, U., & Jablonka, E. (2009). The demathematising effect of technology: calling for critical competence. In P. Ernest, B. Greer & B. Sriraman (Eds.), *Critical issues in mathematics education* (pp. 19–24). Information Age Publishing.

Hahn, F. (2006). *Von Unsinn bis Untergang: Rezeption des Club of Rome und der Grenzen des Wachstums in der Bundesrepublik der frühen 1970er Jahre.* [Dissertation, Universität Freiburg]. Universitätsbibliothek Freiburg. https://freidok.uni-freiburg.de/data/2722

Hale, T., Angrist, N., Goldszmidt, R., et al. (2021). A global panel database of pandemic policies (Oxford COVID-19 Government Response Tracker). *Nature Human Behaviour*, *5*, 529–538. https://doi.org/10.1038/s41562-021-01079-8

Hauge, K. H., & Barwell, R. (2015). Uncertainty in texts about climate change: A critical mathematics education perspective. In S. Mukhopadhyay & B. Greer (Eds.), *Proceedings of the*

Eighth International Mathematics Education and Society Conference (Vol. 2, S. 582–595). Portland State University.

Heinloth, K. (1986). *Zur Warnung des Arbeitskreises Energie der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vor einer drohenden, weltweiten Klimakatastrophe.* Deutsche Physikalische Gesellschaft e.V. https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichungen/publikationen/stellungnahmen-der-dpg/klima-energie/pm-1986.pdf

Heintz, B. (2007). Zahlen, Wissen, Objektivität: Wissenschaftssoziologische Perspektiven. In A. Mennicken & H. Vollmer (Hrsg.), *Zahlenwerk: Kalkulation, Organisation und Gesellschaft* (S. 65–85). VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Jablonka, E. (1996). *Meta-Analyse von Zugängen zur mathematischen Modellbildung und Konsequenzen für den Unterricht* [Dissertation, Technische Universität Berlin]. Transparent-Verl. Preuss.

Jablonka, E., & Bergsten, C. (2021). Numbers don't speak for themselves: Strategies of using numbers in public policy discourse. *Educational Studies in Mathematics*, *108*(3), 579–596. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10059-8

Klein, J. (2017). Merkel-Diskurs vs. Seehofer-Diskurs. Topisches Pro-und Kontra-Argumentieren in der Flüchtlingskontroverse. *Sprachreport*, *33*(3), 36–44.

Klein, J. (2019). Redegattungen/Textsorten der politischen Rhetorik und ihre Charakteristika. Ein Überblick. In G. Kalivoda, H. Kalverkämper & G. Ueding (Hrsg.), *Handbuch politische Rhetorik* (S. 327–350). de Gruyter.

Klein, W. (1980). Argumentation und Argument. *Zeitschrift für Literaturwissenschaft und Linguistik*, *10*(38-39), 9–57.

Kollosche, D., & Meyerhöfer, W. (2021). COVID-19, mathematics education, and the evaluation of expert knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1–2), 401–417.

Kuck, K., & Römer, D. (2012). Krisendiskurse "in der BRD: Tagung des DFG-Projektes ‚Sprachliche Konstruktionen sozial-und wirtschaftspolitischer Krisen in der Bundesrepublik von 1973 bis heute', Trier, 7. bis 9. März 2012. *Zeitschrift für germanistische Linguistik*, *40*(3), 471–480.

Meadows, D. H, Meadows, D. L., Randers, J., & Behrens III, W. (1972). *The limits to growth. A report for the Club of Rome's project on the predicament of mankind*. Universe Books.

Mulder, F., Ferguson, J., Groenewegen, P., Boersma, K., & Wolbers, J. (2016). Questioning big data: Crowdsourcing crisis data towards an inclusive humanitarian response. *Big Data & Society*, *3*(2). https://doi.org/10.1177/2053951716662054

Porter, T. M. (1995). *Trust in numbers: The pursuit of objectivity in science and public life*. Princeton University Press.

Prieler, M., et al. (2022). Komplexität, Ambivalenz und Unsicherheit: Zukunftsfähiges Lehren und Lernen in Zeiten des Umbruchs. In Schröder, L.-M., Hantke, H., Steffestun, T. & Hedtke, R. (Hrsg.), *Krisen aus Krisen lernen. Sozioökonomische Bildung und Wissenschaft im Kontext sozial-ökologischer Transformation* (S. 71–88). Springer.

Renting, V. (2017). *Eine Nation, ein Volk, eine Einheit. Rechtspopulistischer Sprachgebrauch im Wahlkampf: Eine kontrastive Diskursanalyse des Wahlmaterials von der Schweizerischen Volkspartei und Sverigedemokraterna* [Masterarbete, Stockholms Universitet]. Stockholms Universitet. https://su.diva-portal.org/smash/get/diva2:1687840/FULLTEXT01.pdf

Römer, D. (2020). Krisendiskurs. In T. Niehr, J. Kilian & J. Schiewe (Hrsg.), *Handbuch Sprachkritik* (S. 233–240). J.B. Metzler.

Skovsmose, O. (2006). Challenges for mathematics education research. In J. Maasz & W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (S. 33–50). Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educational Studies in Mathematics, 108*(1–2), 369–383. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0

Skovsmose, O. (2023). Initial Formulations of Critical Mathematic Education. In O. Skovsmose, *Critical Mathematics Education* (S. 167–184). Springer International Publishing.

Skrzipietz, F. (2009). Zur nachhaltig ausgerichteten Dekonstruktion des wirtschafts-didaktischen Diskurses über ökonomische Kategoriensysteme. *Journal of Social Science Education 8*(3), 30–49.

Vohns, A. (2013). Relative Armutsgefährdung – nur eine Zahl. *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 49–58.

Vohns, A. (2015). Argumentationen in der Mathematik – Mathematik in Argumentationen: Ein bildsames Spannungsverhältnis? In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter & G. Weiss (Hrsg.), *Fachlich argumentieren lernen: Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (S. 123–137). Waxmann.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 105*, 8–21.

Volk, D. (1975). Plädoyer für einen problemorientierten Mathematikunterricht im emanzipatorischer Absicht In M. Ewers (Hrsg.), *Naturwissenschaftliche Didaktik zwischen Kritik und Konstruktion* (S. 203–234). Belz Verlag.

Volk, D. (1987). Politisches Lernen im Mathematikunterricht: Mathematische Erziehung unter dem SDI-Himmel. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 6*, 224–233.

Weingart, P., Engels, A., & Pansegrau, P. (2002). *Von der Hypothese zur Katastrophe: der anthropogene Klimawandel im Diskurs zwischen Wissenschaft, Politik und Massenmedien.* Leske + Budrich.

Winter, H. (1990). Bürger und Mathematik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 22*(4), 131–147.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61*, 37–46.

Wodak, R., & Köhler, K. (2010). Wer oder was ist „fremd“? Diskurshistorische Analyse fremdenfeindlicher Rhetorik in Österreich. *SWS-Rundschau, 50*(1), 33–55.

Cornelia PLUNGER, Universität Klagenfurt
cornelia.plunger@aau.at

Intensive Auseinandersetzung mit mathematischen Konzepten und ihrer Verwendung im Umfeld von Schüler*innen. Eine Fallstudie zu modell- und kontextorientierten Reflexionsprozessen

Das Reflektieren spielt in der mathematikdidaktischen Literatur eine wichtige Rolle für mathematische Bildung. Dabei wird insbesondere die wünschenswerte Rolle von Individuen in der modernen, demokratischen und aufgeklärten Gesellschaft fokussiert. Bedeutsam scheinen in diesem Zusammenhang modellorientierte Reflexion (mit Fokus auf die Verwendung von mathematischen Modellen in außermathematischen Situationen) und kontextorientierte Reflexion (mit Fokus auf die Bedeutung mathematischer Konzepte in unserer Gesellschaft). Im Beitrag wird der Prozesscharakter dieser Reflexionsarten in den Blick genommen und im Rahmen einer Fallstudie mit zwei Schülerinnen analysiert. Diese haben eine Reihe von Aufgabenstellungen, die zu Reflexionen anregen sollten, bearbeitet und besonders reichhaltige Überlegungen angestellt. Der Beitrag endet mit zweierlei Resümees: einem aus Sicht der Schülerinnen mit ihren Beschreibungen und Beurteilungen zur Studie, einem aus Forscherin-Perspektive. In Letzterem werden das mathematische Wissen und Können, sowie die metakognitive Haltung der beiden mit ihrer überdurchschnittlichen Performance in Verbindung gebracht. Eine Diskussion hinsichtlich des Beitrags solcher Reflexionsprozesse für mathematische Bildung zeigt, dass es Argumente dafür gibt, diese im Mathematikunterricht stärker zu forcieren.

1. Reflexion als Beitrag zu mathematischer Bildung im gesellschaftlichen Kontext

Reflexion ist ein häufig verwendeter Begriff zur Beschreibung eines wünschenswerten Mathematikunterrichts. Bei Roland Fischer (2012) ist Reflexion ein wesentliches Element für mathematische Bildung. Sein Konzept für höhere Allgemeinbildung bezieht sich auf unsere arbeitsteilige Gesellschaft, in der es für eine*n einzelne*n unmöglich ist, auf allen oder vielfältigen Bereichen Expert*in zu sein. Dennoch ist es in vielen Situationen nötig, gerade in Bereichen, in denen persönliche Expertise fehlt, Entscheidungen zu treffen und Urteile zu fällen. Darauf sollte der schulische (Mathematik-)Unterricht vorbereiten, indem auf Grundwissen und Reflexion fokussiert wird. Er befindet:

> Der übliche Ansatz der Fachdidaktiken zur ‚Ausbildung' von Laien besteht […] darin, die Lernenden ein bisschen das tun zu lassen, was Fachexpert*innen tun, und darauf zu hoffen, dass sich der Rest, insbesondere die Reflexionstätigkeit schon einstellt. (Fischer, 2012, S.14)

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 99–113). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Fischer konkretisiert exemplarisch Objekte der Reflexion, also das, worüber anhand einzelner Inhalte nachgedacht werden sollte.

Andreas Vohns (2018) vergleicht das Allgemeinbildungskonzept von Fischer (2012) mit den Zugängen von Heinrich Winter (1995) hinsichtlich der Bürger*innenrolle des Menschen in der Gesellschaft. Er stellt fest, dass das von Fischer adressierte Bildungsproblem, welches sich durch die asymmetrische Verteilung von Verantwortung und Wissen zwischen Lai*innen und Expert*innen ergibt, mit dem von Winter beschriebenen zentralen Aufklärungsproblem einhergehe (Vohns, 2018, S. 209). Letzteres wird durch Winters Forderung konkretisiert, wonach Bürger*innen ein gewisses Maß an Einsicht in die Mathematik anstreben sollten, weil sich diese in allen Wissensbereichen inklusive der Kommunikation ausgebreitet habe. Die Schwierigkeit hier allgemein informiert zu bleiben entstehe durch den zunehmenden Grad an Fachsprache und Spezialisierung (Vohns, 2018, S. 206f). Vohns betont, dass Winters erste Grunderfahrung nicht darauf reduziert werden sollte, die Nützlichkeit der Mathematik anzuerkennen, sondern anhand von Anwendungen, die „*uns alle angehen oder angehen sollten*“ (Winter, 1995, S. 37) zu erfahren, welche Art von Aufklärung durch die Mathematik zustande kommen kann (Vohns, 2018, S. 205). Er führt weiter aus, dass Fischers Ansatz in dieser Sache sich nicht in der Auseinandersetzung mit mathematischen Modellierungen mit der Hoffnung auf Transfer erstrecke, sondern dazu anrege, „nach spezifischem Wissen Ausschau zu halten, das über solche Erfahrungssituationen hinausweist und relevant für die Urteils- und Entscheidungssituationen im Bereich des privaten und öffentlichen Lebens sind“ (ebd., S. 211). Bezogen auf die Bürger*innenrolle des Menschen in der Gesellschaft formuliert Vohns (unter anderen) die These:

> Wo schulmathematische Inhalte in redlicher Weise geeignet erscheinen, außermathematische Phänomene öffentlichen Interesses zu durchdenken, ebenso dort, wo schulmathematische Inhalte faktisch mit solchen Phänomenen außerhalb von Schule verbunden sind (egal wie sinnvoll und gut einem das erscheint), hat Mathematikunterricht materiell aufklärende Aufgaben, denen er sich stellen muss. (ebd., S. 216)

Vohns arbeitet eine Reihe von konkreten Beispielen solcher Verbindungen von schulmathematischen Inhalten mit Phänomenen außerhalb der Schule auf, wie die Modellierung von relativer Armutsgefährdung (Vohns, 2013) oder Einkommenssteuertarife (Vohns, 2017), aber auch jene eines Bremsweges, die Abgabenhöhe für Neuwagen oder den Zusammenhang zwischen regionalem Preisniveau und Durchschnittseinkommenshöhe. Dabei hebt er insbesondere die unterschiedlichen Aspekte hervor, die sich aus dem Kontext (technisch-naturwissenschaftlich oder sozial) und der Verwendung (als normative oder deskriptive Modelle) ergeben (Vohns, 2018, S. 213 f.). Diese Aspekte könnten Elemente sein, die nach Fischer über die einzelnen Erfahrungssituationen hinausweisen.

Zwei Jahre später bezieht sich Vohns mit seinem Plädoyer, mathematische Bildung negativ zu bestimmen, auf Winters Grunderfahrungen und formuliert mit

> Wo Mathematik nicht auch als spezifische Art und Weise erfahren werden kann, Dinge, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft, wahr-zunehmen und zu verstehen, da kann (mit hoher Wahrscheinlichkeit) keine mathematische Bildung (mehr) stattfinden. (Vohns, 2020, S. 22)

eine Minimalforderung an den Mathematikunterricht. Wie in den zuvor beschriebenen Arbeiten konzentriert sich Vohns damit auf Inhalte mathematischer Bildung, versucht, Antworten darauf zu finden, *was* im Mathematikunterricht thematisiert werden sollte. Auf Fischers Ansatz, solche Aspekte mittels Reflexionsorientierung zu thematisieren geht Vohns nicht ein. Gerade Reflexionsprozesse von Schüler*innen werden von Fischer als möglicher Weg angeführt, *wie* solche Inhalte thematisiert werden könnten. Im Umfeld Fischers sind eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten entstanden, in denen Reflexionsprozesse bei Schüler*innen im Klassenverbund angeregt wurden, dabei lag der Fokus auf Inhalten der Reflexion und Organisation im Klassenverbund, tiefergehende, systematischere Beschreibungen von Reflexion sind dabei nicht entstanden.

Ole Skovsmose (1998) formuliert ausgehend von Anforderungen, die sich an Individuen einer (modernen) demokratischen Gesellschaft stellen, vier unterschiedliche Typen von Reflexion, die sich auf mathematisches Tun beziehen. Daraus hervorzuheben sind an dieser Stelle modell- und kontextorientierte Reflexion, die sich beide auf die Verwendung von Mathematik im außermathematischen Kontext („political, social or cultural context“, 1998, S. 199) beziehen. Mit modellorientierter Reflexion sollte auf die Beziehung zwischen dem mathematischen Modell und der mathematischen Situation fokussiert werden, die Art dieser Beziehung wird durch Fragen wie reliabel oder valide das Modell ist, konkretisiert. Kontextorientierte Reflexion fokussiert auf eine allgemeinere Perspektive, in der nach dem Zweck und der politischen bzw. sozialen Funktion der Modellierung gefragt wird (ebd.). Skovsmose hat eine Reihe von Projekten durchgeführt, in denen Schüler*innen im Zuge der Auseinandersetzung mit konkreten Themen zu den von ihm beschriebenen Reflexionen angeregt wurden.

Katja Lengnink (2005) formuliert die Erziehung zu einem mündigen Umgang mit Mathematik als wesentliches Ziel mathematischer Bildung. Dabei arbeitet sie heraus, dass Skovsmoses oben beschriebene Typen der modell- und kontextorientierten Reflexion bezogen auf Fischers Forderung nach entscheidungs- und urteilsfähigen Lai*innen besonders relevant scheinen. Sie gibt eine Reihe von gesellschaftlich relevanten Themen vor, mit konkreten Aufgabenstellungen, die Schüler*innen zu modell- und kontextorientierter Reflexion anregen, dabei betrachtet sie die beiden Reflexionstypen in einer Kategorie.

2. Modell- und kontextorientierte Reflexion: Begriffsfestlegungen

Ausgehend von Fischers, Skovsmoses und Lengninks Arbeiten beschreibt Edith Schneider (2020) vier unterschiedliche Reflexionsarten. Die auf das schulische Lernen von Mathematik bezogene ***Reflexion*** legt sie als „*Nachdenken über Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen oder Bedeutungen, die anhand des Vorliegenden nicht direkt ablesbar oder unmittelbar einsichtig sind*“ (ebd., S. 833) fest. Damit wird betont, dass mittels Reflexion genuin Neues entsteht, dieses Neue ist bezogen auf das reflektierende Individuum relativ, denn je nach persönlichen Vorerfahrungen und Kenntnissen können konkrete Eigenschaften, Zusammenhänge, Beziehungen oder Bedeutungen unmittelbar ablesbar oder einsichtig sein oder auch nicht. Häufig scheinen Aspekte direkt ablesbar oder einsichtig, wenn sie schon bekannt sind. Anders als Lengnink grenzt Schneider modell- und kontextorientierte Reflexion für die Formulierung von Aufgabenstellungen stärker voneinander ab und bezieht modellorientierte Reflexion auf einzelne, auf spezifische Situationen bezogene Modelle: „*Modellorientierte Reflexion* meint das Nachdenken über Beziehungen zwischen mathematischen Konzepten und außer- (oder inner-) mathematischen Situationen“ (ebd.). Diese Reflexionsart schließt mit ein, darüber nachzudenken, inwiefern das angegebene mathematische Modell passend ist, welche Annahmen bzw. Idealisierungen durch das Modell festgelegt werden, oder, welchen Grenzen das Modell unterliegt. Im Kasten 1 wird exemplarisch eine Aufgabe zur Arithmetik angegeben. Hier wird der Aspekt der Passung durch das Ausreizen der Grenzen des Modells, 60 Arbeiter*innen werden in nur 2 Tagen fertig, eingefangen.

Baustelle

Am Einfamilienhaus der Winters bauen 3 Arbeiter(innen). Sie werden voraussichtlich in 40 Arbeitstagen mit dem Rohbau fertig sein.

Der Sohn der Winters rechnet ein bisschen herum und sagt: „Das Bauunternehmen sollte 60 Leute für unser Haus einsetzen, dann wäre der Rohbau in 2 Tagen fertig.“

Was meint ihr dazu?

Kasten 1: Aufgabe zur modellorientierten Reflexion, Idee aus Lergenmüller & Schmidt (2005, S. 38, Aufgabe 14).

In der Festlegung von Schneider bezieht sich der Begriff der kontextorientierten Reflexion dagegen auf ein konkretes mathematisches Konzept, das auf seine Wirkungen in der Gesellschaft geprüft wird: „*Kontextorientierte Reflexion* meint das Nachdenken über Wirkungen mathematischer Konzepte in unserer Welt“ (Schneider, 2020, S. 833). Dabei sollte nach Situationen Ausschau gehalten werden, in denen das Konzept bedeutsam scheint, ggf. Alternativen in den Blick genommen werden, und damit herausgearbeitet werden: Was macht das Konzept? Was bringt es? Was bringt es nicht? Gibt es Nachteile? Ziel ist es, kontextbezogene Einsichten in von der Mathematik zur Verfügung gestellte Werkzeuge für eine Vielzahl von Situationen zu gewinnen. Im Kasten 2 wird eine Aufgabe zur

beschreibenden Statistik angegeben. Die zentrale Frage, welche Vorteile es bringt, ein solches Konzept zu verwenden, wird in anderen Aufgaben pointierter formuliert mit „Was wäre, wenn es dieses Konzept nicht geben würde?“

Grafiken

In der beschreibenden Statistik werden unterschiedliche Typen von Grafiken verwendet, um Daten zu visualisieren – zum Beispiel:

Kreisdiagramme, Stabdiagramme (Balkendiagramme), Liniendiagramme, Kastenschaubilder (Boxplots) und Histogramme, aber auch Streudiagramme usw.

Welche Vorteile bringt es, Daten mit solchen Grafiken darzustellen?

Kasten 2: Aufgabe zur kontextorientierten Reflexion.

Schneider hat im Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“, an dem ich auch beteiligt bin, zu unterschiedlichen Reflexionsarten eine Reihe von Aufgabenstellungen zu einer Vielzahl von Inhalten des Sekundarstufen-Mathematikunterrichts entwickelt und diese in Zusammenarbeit mit interessierten Lehrpersonen eingesetzt. Der Fokus lag dabei auf dem Einsatz solcher Aufgaben in einer gesamten Klasse.

3. Modell- und kontextorientierte Reflexionsprozesse als Elemente für die Gestaltung eines bildsamen Mathematikunterrichts

Der Idee von Fischer folgend und die Ansätze von Skovsmose und Lengnink aufgreifend, scheint mir eine Förderung der oben beschriebenen Reflexionsprozesse im Rahmen des Mathematikunterrichts nötig. Ich sehe dafür Potentiale in zweierlei Hinsicht: Zum einen könnten sie Teil der inhaltlichen Erarbeitung des Unterrichtstoffes sein, bei der mathematische Konzepte an sich betrachtet werden und darüber reflektiert wird, wie und wo diese Konzepte verwendet werden. Zum anderen sollte damit Reflexion als Haltung etabliert werden, die in Situationen wirksam werden kann, in denen andere oder neue mathematische Konzepte verwendet werden und bei denen mit Hilfe von vorhandenem Wissen und Können neu darüber nachgedacht werden muss, wie passend diese Verwendung ist oder welche Bedeutung sie hat. Dieser zweite Aspekt unterstreicht die Bedeutsamkeit der Reflexionsprozesse als Elemente für die Gestaltung eines bildsamen Mathematikunterrichts in einer sich wandelnden Welt, wo es notwendig ist, Neues verständig einzuordnen. Für die von Andreas Vohns häufig in den Blick genommene Bürger*innenrolle haben Lengnink und Skovsmose die inhaltliche Wichtigkeit dieser Reflexionsarten schon herausgearbeitet. Als Art und Weise, sich mit der Mathematik auseinanderzusetzen, scheint vermehrtes Einüben in Reflexion bedeutsam, weil es gerade nicht darum geht, Regeln unhinterfragt anzuwenden – wozu traditioneller Mathematikunterricht durchaus beiträgt, wie David Kollosche (2019, S. 107 f.) zeigt, sondern begründet eigene Standpunkte einzunehmen.

Reflexionsprozesse von Schüler*innen wurden in den zuvor zitierten Arbeiten wenig in den Blick genommen. Zwar wurden Reflexionsprozesse von Lernenden zu Aufgaben zu statistischen Messungen untersucht (vgl. Büscher und Prediger, 2019), dabei wurde aber nicht auf spezifische Reflexionsarten fokussiert. Die im Rahmen meines Dissertationsprojektes durchgeführte Studie zielt auf die Untersuchung modell- und kontextorientierter Reflexionsprozesse auf der Ebene einzelner Schüler*innen ab.

4. Studie: Reflexionsanlässe für Schüler*innen der 8. Schulstufe

Der Beitrag meiner Untersuchung bezieht sich auf zwei Forschungsfragen. Die Frage, *wie Schüler*innen zum (modell- und kontextorientierten) Reflektieren angeregt werden können*, wird auf konzeptioneller Ebene durch die Entwicklung von Aufgaben und einer geeigneten Interviewführung adressiert. Der empirische Zugang über konkrete Interviews und deren Transkripte liefert Erkenntnisse darüber, *welche Aspekte Schüler*innen bei der Bearbeitung von Aufgaben zum (modell- und kontextorientierten) Reflektieren in den Blick nehmen und wie sie einzelne Zusammenhänge, Beziehungen, Wirkungen und Bedeutungen herausarbeiten.* Anhand der Fallanalyse eines der insgesamt zehn interviewten Schüler*innenpaare zeigt der vorliegende Beitrag Antworten auf die zweite Frage.

Für die Untersuchung habe ich Aufgaben zu drei unterschiedlichen Inhaltsbereichen (Arithmetik, beschreibende Statistik, Geometrie) formuliert, darunter die oben angegebenen Aufgaben. Leitende Idee bei der Entwicklung der Aufgabenstellungen war, diese so zu gestalten, dass Sie im Rahmen eines regulären Mathematikunterrichts ähnlich wie traditionelle Aufgaben eingesetzt werden können. Dabei wird vorausgesetzt, dass bestimmte mathematische Inhalte bereits erarbeitet wurden, und dabei nicht auf Auseinandersetzungen mit gesellschaftlich relevanten Kontexten fokussiert wurde. Es wurden unterschiedliche Inhaltsbereiche verwendet, um der Entwicklung rein inhaltsspezifischer Reflexionsstrategien entgegenzuwirken. So sollte ermöglicht werden, gegebenenfalls Prozesse zu finden, die sich auf die Reflexionsarten beziehen.

Die Teilnahme an der Studie (drei Interviewzeitpunkte, pro Zeitpunkt liegt der Fokus auf einem der drei Inhaltsbereiche) erfolgte auf freiwillige Meldung nach Anfrage bei Mathematik-Lehrpersonen verschiedener Gymnasien in Kärnten. Die interessierten Schüler*innen wählten ihre*n Partner*in frei aus den anderen Interessierten im eigenen Klassenverbund. Insgesamt haben elf Paare an der Hauptstudie teilgenommen. Das Interviewsetting gestaltet sich im Wesentlichen durch die Bearbeitung der Aufgabe in Partner*innenarbeit. Das Gespräch zwischen zwei Schüler*innen ermöglicht eine authentischere Situation für die Interviewten und damit einerseits die Möglichkeit natürlicher über das eigene Denken zu sprechen. Andererseits entsteht die Möglichkeit zur gegenseitigen Anregung zu Reflexionen. Vor der Aufgabenbearbeitung gab es ein einführendes Gespräch, bei dem die Schüler*innen auf das Interview vorbereitet wurden (es geht ums Nachdenken

und sich dafür Zeit zu geben, meine Rolle als Interviewerin ist hauptsächlich jene der Zuhörerin, Ablauf des Interviews: es gibt zwei Aufgaben, die nacheinander bearbeitet werden sollen und anschließend ein abschließendes Gespräch). Im Anschluss wurden nacheinander je eine Aufgabe zur modellorientierten und eine Aufgabe zur kontextorientierten Reflexion bearbeitet. Zunächst beschäftigten sich die Schüler*innen in einer kurzen Einzelarbeit mit der Aufgabenstellung und sammelten erste Ideen, den Hauptteil bildete der mündliche Austausch zwischen den Schüler*innen. Neben dem Zuhören nutzte ich meine Rolle als Interviewerin, um nach genaueren Erläuterungen zu fragen oder andere Perspektiven anzuregen, jedoch ohne den Gesprächsfluss zwischen den Schüler*innen zu unterbrechen. Im abschließenden Gespräch bat ich die Partner*innen darum, darauf einzugehen, wie es ihnen in der Aufgabenbearbeitung gegangen sei und inwiefern diese Tätigkeit für sie Mathematik war. Zum letzten Zeitpunkt gab es ein ausführlicheres Abschlussgespräch, bei dem die Schüler*innen zusätzlich um eine Beschreibung und Beurteilung der Aufgaben und Interviews gebeten wurden.

5. Fallanalyse: Gina und Hannah

Gina und Hannah (Namen geändert) wurden im Februar 2020 (Aufgaben zur Arithmetik), Juni 2020 (Aufgaben zur beschreibenden Statistik) und im Mai 2021 (Aufgaben zur Geometrie und abschließendes Gespräch) interviewt. Die lange und unregelmäßige Dauer zwischen den einzelnen Interviewzeitpunkten war nicht geplant und hat sich durch die Corona-Pandemie ergeben. Die beiden Schülerinnen hatten schon Erfahrung mit Aufgaben, die zu Reflexion anregen sollten, siekommen aus einer Klasse, welche im Schuljahr 2019/2020 am Projekt „Reflexionsorientierung im Mathematikunterricht“ (vgl. Abschnitt 2) teilgenommen haben. Darin wurden im Klassenverbund Aufgaben zu den vier von Schneider beschriebenen Reflexionsarten (zusätzlich mathematikorientierte und persönlichkeitsorientierte Reflexion) und zu unterschiedlichen Inhalten bearbeitet. Die Aufgaben, die in den Interviews mit einzelnen Paaren eingesetzt wurden, waren andere als jene, die im Klassenverbund bearbeitet wurden. In der Klasse von Gina und Hannah wurden insgesamt neun Aufgaben bearbeitet, darunter keine Aufgabe zur modellorientierten Reflexion und zwei Aufgaben zur kontextorientierten Reflexion, von denen sich eine auf reelle Zahlen, die andere auf elementare Algebra bezog. Gina wird von ihrer Mathematiklehrperson als herausragende Schülerin beschrieben und zeigt Interesse an einer Interview-Teilnahme. Hannah, mit mittelmäßigen Noten in Mathematik und Deutsch, erklärt sich dazu bereit, mit Gina gemeinsam teilzunehmen, weil sich neben drei weiteren Buben-Paaren keine weiteren Interessent*innen in dieser Klasse finden. Während der Interviews spiegelt sich diese ursprünglich unterschiedliche Motivation nicht wider, beide Schüler*innen bringen sich engagiert in die Bearbeitung der Aufgabenstellungen ein.

Die Interviews (Dauer: ca. 20 Minuten pro Aufgabenstellung) wurden mittels Audioaufnahme dokumentiert und anschließend wortgetreu transkribiert, inklusive

Angabe der Sprechpausen und weiteren Informationen aus der Audioaufnahme in runden Klammern, sowie der Kennzeichnung von gleichzeitig gesprochenem durch Bindestriche. Zur Auswertung der Transkripte orientiere ich mich an der deduktiven Kategorisierung und inhaltlicher Strukturierung nach Mayring (2015, S. 68 ff.). Dabei werden zunächst Interviewpassagen deduktiv kategorisiert, nach Kategorien, die der jeweiligen Reflexionsart zugeordnet werden. Auf der Grundlage dieser Kategorisierungen werden Inhalte herausgefiltert und strukturiert, die auf den geforderten Reflexionsprozess hinweisen. Die Passagen zu den Gesprächen im Anschluss der Aufgabenbearbeitung wurden induktiv kategorisiert (vgl. Mayring, 2015, ebd.).

Modellorientierte Reflexionsprozesse von Gina und Hannah

Transkripte von Bearbeitungen modellorientierter Reflexionsaufgaben werden deduktiv nach „Fokus auf mathematisches Modell“, „Fokus auf Kontext“ und „Aufeinander-Beziehen von mathematischem Modell und Kontext“ kategorisiert. Die inhaltliche Strukturierung zur Aufgabe Baustelle (Kasten 1) zeigt, die beiden rechnen das in der Aufgabenstellung angegebene Ergebnis anhand von Tabellen unter Verwendung der Antiproportionalität nach und nennen anschließend Aspekte aus dem Kontext, die dieses Ergebnis relativieren (trocknen, Wetter, Platzprobleme, …). In einer folgenden Passage (Kasten 3) lotet Gina die Grenzen des Modells weiter aus (Z. 140–142), dabei wird auch eine große Sicherheit im Umgang mit der Antiproportionalität erkennbar (Hannah, Z. 143).

Schließlich gelingt es den beiden das Ergebnis des Modells anhand des Aspekts des Trocknens fundiert zu kritisieren (ab Z. 145). Die Kritik bezieht sich implizit auf die Annahme des Modells, bei dem die Dauer nur von der Anzahl der Arbeiter*innen abhängt. Diese Passage zeigt auch, wie es Gina und Hannah gelingt, das mathematische Modell und den Kontext der Situation aufeinander zu beziehen.

	[…]
137	G: Gibt es sonst noch irgendwas? Keine Ahnung. (lachend) (11) Fällt dir was ein?
138	H: Na. (4) Das "voraussichtliche" irritiert mich ein bisschen. Aber das kann daran liegen, dass es dann, keine Ahnung, regnet oder schneit oder keine Ahnung.
140	G: Ja, man kann das glaube ich nicht so {genau sagen}. Aber das ist schon irgendwie krass. Stell dir vor, wenn jetzt so 60 Leut. Okay. Und dann sagen wir mal, du nimmst nochmal mehr. Dann hättest du ein Haus in einem Tag gebaut.
143	H: Da brauchst du schon 120 Leut. Die haben nicht mal auf dem Grundstück da so Platz, dass die sich nicht irgendwie so {im Weg stehen}.
145	G: Aber wenn man jetzt z.B. Beton macht. Der muss ja auch noch fest werden.
146	H: Ja! Das heißt.
147	G: (.) Das heißt, es funktioniert nicht.

Kasten 3.1: Auszug aus dem Interview mit Gina und Hannah zur Aufgabe *Baustelle*.

148 H: Das mit den 2 Tag ist ja (.). Es kann ja, wenn man sagt, okay die brauchen 40 Tage. Aber jetzt nicht, weil so wenig arbeiten, sondern nur weil es trocknen muss und weil sie, keine Ahnung {was noch}.
151 G: Ja, schon auch weil so wenig arbeiten, oder?
152 H: Ja. Ja, auch. Aber ich glaube, dass das normal ist.
153 G: -Ich glaube, dass das mit 3 Leut-
154 H: -Dann kann das ja net in 2 Tag fertig sein.- Sagen wir mal, sie würden rein theoretisch, sie würden 20 Tage brauchen, wenn sie so, einfach nur weil es so trocknen muss und das alles. Dann geht das ja auch mit 60 Leuten nicht in 2 Tag, nur weil die jetzt zu 60 sind.
[…]

Kasten 3.2: Auszug aus dem Interview mit Gina und Hannah zur Aufgabe *Baustelle*.

Kontextorientierte Reflexionsprozesse von Gina und Hannah

Transkripte von Bearbeitungen kontextorientierter Reflexionsaufgaben werden deduktiv nach „Fokus auf mathematisches Konzept“, „Fokus auf Kontext“, „aufeinander-Beziehen von Konzept und Kontext“, „Anführen von Alternativen“ und „Anführen von Wirkungen“ kategorisiert.

[…]
335 G: Also ich habe eben auch als erstes, dass viele Daten einfacher dargestellt werden, ähm, ich meine (.) und das dritte ist halt so, dass ähm, ich denk, dass der Mensch jetzt lieber, wenn er sich was anschaut hat er trotzdem lieber eine Grafik vor sich, als eine Liste oder eine Tabelle, oder sonst was.
339 H: Ja.
340 G: Und ich sag jetzt mal so: Bei Tabellen ist's ja so, wenn man da zum Beispiel sagt Lieblingssendungen, zum Beispiel.
342 H: Ja.
343 G: Weil jetzt grad das, genau, und da sieht man das ja relativ übersichtlich. Aber wenn ich jetzt
345 H: eine Tabelle habe, dann ist es nicht so. Dann schau ich mir das nicht auch an.
346 G: Ja.
347 H: und ich denke mir, dass man das auch eher so sich anschaut und das versteht, weil ich glaube das Argument war besser verständlich für Leute, die sich mit Tabellen nicht auskennen.
350 G: Hmh
351 H: Hab ich dann gleich durchgestrichen, weil {das ist kein Argument}
352 G: Dann, es ist übersichtlicher
353 H: Ja.
354 G: Man erkennt, so ich sage jetzt mal, die Mehrheiten und das Ganze ein bisschen besser, wie jetzt eben vor allem bei diesen Tabellen, die sind ja eh schon, die sind eh ganz cool, aber
357 H: Es kommt halt darauf an. Wenn richtig viele Werte sind, dann ist halt trotzdem dann ein Diagramm einfach besser.
[…]

Kasten 4: Auszug aus dem Interview mit Gina und Hannah zur Aufgabe Grafiken.

Zur Aufgabe *Grafiken* (Kasten 2) gibt die Passage in Kasten 4 Einblick in die Reflexionsprozesse der beiden. Der Ausschnitt gibt die letzte Phase des Austausches der individuellen Ergebnisse wieder, bei dem eine gegenseitige Anregung zu weiteren Reflexionen sichtbar wird. Zunächst drückt Gina eine affektive Präferenz gegenüber Grafiken aus und nennt dabei auch die Alternativen (Liste, Tabelle) und begründet die Präferenz mit der Übersichtlichkeit („Wirkung“, Z. 336–343). Hannah differenziert hier und weist einerseits auf die Voraussetzung hin, dass die Darstellungen auch verstanden werden müssen (Z. 347–351) und konstatiert später, dass Ginas Argument der Übersichtlichkeit gilt, wenn eine große Menge von Daten dargestellt wird (Z. 357–358). Eine Analyse der drei Interviewtranskripte zu den Bearbeitungen kontextorientierter Reflexionsaufgaben zeigt, dass es Gina und Hannah immer gelingt, Alternativen für das vorliegende Konzept zu thematisieren und anhand dieser herauszuarbeiten, welche Wirkungen mit dem Konzept einhergehen.

6. Resümee von Gina und Hannah

Im abschließenden Gespräch zum zweiten und dritten Interview vergleichen Gina und Hannah ihre Aufgabenbearbeitungen im Zuge des Interviews mit den Tätigkeiten im Mathematikunterricht und sehen keine Gemeinsamkeiten. Dabei bringt Gina ziemlich deutlich zum Ausdruck, dass die Auffassung von Mathematik damit zusammenhängt, wie Mathematik individuell erlebt wird (Kasten 5).

	[…]
706	G: Es ist sicher nicht so Mathematik, wie man es in der Schule, in der Regel lernt, wo man-
708	H: -Genau.
709	G: -halt einfach, keine Ahnung, Formeln und Berechnungen und irgendwelche Sätze oder so lernt. (..) Aber-
710	H: -Aber ich denke schon, dass es etwas mit Mathematik -zu tun hat-.
711	G: -Ja.- (8)
712	CP: Was wolltest du sagen, mit Aber?
713	G: Achso. Aber, ja. Hmh. Das ist, keine Ahnung. Das sage ich einfach so. Ehm, da wäre jetzt glaub ich auch nicht mehr viel gekommen. Vielleicht auch so, dass Mathematik einfach eben NICHT nur Rechnen ist, sondern vielleicht auch sowas, aber (..) ich weiß von, also (..) zumindest ICH das von der Schule noch nicht so kenne. In DER Form.
714	H: Ich auch nicht.
	[…]

Kasten 5: Auszug zur Frage, ob die Aufgabenbearbeitung für die beiden Mathematik ist, 3. Interview.

Bei der Beschreibung der Aufgabenstellungen drücken die beiden aus, dass diese für sie „manchmal verwirrend“ (3. Interview) waren, jedoch eine intensivere Beschäftigung mit der Thematik erlauben (Kasten 6). Bei der Beurteilung der Aufgabenstellungen ist die Haltung der beiden sehr positiv, wie die Auszüge in Kas-

ten 7 zeigen. Hannah drückt eine positive affektive Haltung gegenüber dieser Tätigkeit aus, was Gina mit einem Lachen (Z. 801) kommentiert. Auf meine Frage, wie dieses Lachen zu verstehen ist, geht Gina nicht näher ein, aber Hannah versucht es damit zu erklären, dass sie sich sonst nicht für das Fach interessiert (ab Z. 805).

	[…]
770	H: Ich glaube, man beschäftigt sich mehr mit denen als als, wenn man jetzt nur so ein Buchbeispiel rechnet, wo halt Maße angegeben sind, wo man halt irgendwas ausrechnen muss. Das ist halt, es hat auch schon, es hat auch viel mit Mathematik zu tun und so, aber ich glaube, man beschäftigt sich viel mehr, damit man.
774	G: Man hinterfragt's -vielleicht-
775	H: -Genau.-
776	G: auch mehr. (.) Und so. Eben, da wird ja immer so gefragt, was wäre, wenn es das nicht geben würde. Und im Unterricht zumindest selber, da ist ja eher so, also so, da wird so etwas eigentlich selten zur -Sprache gebracht-.
779	H: -Genau.-
	[…]

Kasten 6: Auszug zur Beschreibung der Aufgaben von Gina und Hannah, 3. Interview.

	[…]
799	H: -Ah, ich denke auch-, ich beschäftige mich auch gerne mit sowas. Ich, mir gefällt das auch besser, als so in, so Beispiele, die halt eher in der Schule -bearbeitet werden-.
801	G: -Hmh.-
	[…]
805	H: Ich bin jetzt nicht so ein Mathematik-Fan, also es ist nicht so mein Lieblingsfach, aber ich finde solche Aufgaben wirklich interessant, weil man sich wirklich mit diesem, mit der Logik dahinter dann beschäftigt. Und wenn's sowas auch mehr in der Schule geben würde, würd's vielleicht mich vielleicht auch das Fach ein bisschen mehr interessieren. Ein bisschen mehr Spaß machen.
	[…]
819	G: Ja, (...) ich glaube, dass es wichtig wäre, wenn, wir haben das ja auch in der vierten, glaube ich, so {gemacht}. Also, wir haben ja solche Aufgaben zum Verständnis von dem, was wir ehm gelernt haben, haben wir ja gemacht. Und ich glaube, dass das schon auch wichtig ist, wenn man das immer so durchgeht und das halt einfach so lernt und (.) jetzt nicht weiß, -was {das} einem so bringt-
824	H: -Genau.-
825	G: direkt. Und das bewirken auch die Aufgaben. (.) Also die da-
826	H: -Man beschäftigt sich einfach mehr damit.
	[…]

Kasten 7: Auszüge zur Beurteilung der Aufgaben von Gina und Hannah, 3. Interview.

Später bringt Gina ihre Position zum Ausdruck (ab Z. 819), wobei nicht ganz klar wird, ob ihr eine Beschäftigung mit solchen Aufgaben wichtig erschiene. Jedenfalls scheint sie im Vergleich mit Hannah eine differenziertere Position einzunehmen, indem sie einerseits darauf verweist, dass solche Aufgaben in der vierten

Klasse behandelt wurden (Anmerkung CP: im Rahmen des oben genannten Projekts) und andererseits festhält, dass sie es für wichtig empfindet, (die Mathematik?) zu lernen, ohne gleich zu wissen, was das bringt. Trotz der expliziten Ausführung meinerseits, dass es in einem solchen Projekt wichtig sei, auch Negatives festzuhalten, war das Resümee der beiden vorwiegend positiv.

7. Resümee aus Forscherin-Perspektive

Zusammenfassung und Diskussion im Hinblick auf angestrebte Reflexionen

Zunächst möchte ich festhalten, dass sich die beiden, wie die meisten anderen Paare, engagiert mit den Aufgabenstellungen auseinandergesetzt haben. Gleichzeitig hat nur ein weiteres Schüler-Paar ähnlich bemerkenswerte, in die Tiefe gehende Überlegungen formuliert. Das grundsätzliche Interesse an diesen Aufgaben spielt hier sicherlich eine wichtige Rolle. Die Tatsache, dass auch im Klassenverbund Reflexionsaufgaben bearbeitet wurden, scheint nach dem Vergleich mit anderen Paaren, die zum Teil auch aus dieser Klasse kommen weniger ausschlaggebend. Wesentlich scheint, dass die beiden über sicheres mathematisches Wissen verfügen, wie z. B. die Bearbeitung der Aufgabe *Baustelle* zeigt. Dies zeigt sich auch bei anderen Paaren mit bemerkenswerten Überlegungen. Während der Interviews mit Gina und Hannah waren kaum Interventionen nötig, um zu weiterem Austausch anzuregen. Zu erkennen ist auch eine ausgeprägte metakognitive Haltung der Schülerinnen. Diese bezieht sich einerseits auf den Bearbeitungsprozess, während dem sie öfters ihre Vorgangsweise explizit gemacht haben (z. B. Kasten 4, Z. 335, Z. 351), sowie die Sammlung (z. B. Kasten 3, Z. 137) oder Bewertung ihrer Ideen unterschieden haben. Daneben bezieht sich ihre Metakognition auch auf ihre eigenen Erkenntnisprozesse, so formuliert Gina während der Bearbeitung der Baustellen-Aufgabe: „krass […] das haben wir {eigentlich} schon so oft in der Schule […] gemacht, so Beispiele dafür und man hat aber nie wirklich darüber nachgedacht, ob jetzt das Ganze jetzt so logisch auch möglich wär.“ (1. Interview). Besonders deutlich zeigt sich diese Haltung auch im Abschlussgespräch zu den Interviews (Kasten 5, 6, 7). Im Hinblick auf Reflexionen ergänzen sich die beiden einander sehr gut, weil Gina, die mathematisch-inhaltlich tendenziell sicherer ist, Aussagen von Hannah grundsätzlich nicht zurückweist, sondern diese annimmt und bei Unklarheiten weitere Erklärungen einfordert. Hannah trägt zum Gelingen der Reflexionen bei, indem sie eine tendenziell differenzierende Sichtweise einnimmt (z. B. bei der Aufgabe Grafiken, Kasten 4). Schließlich profitieren die beiden gegenseitig voneinander und es gelingen haltbare Argumentationen.

In Aufgaben zur modellorientierten Reflexion gelingt es Gina und Hannah öfter als anderen Paaren ihre Kenntnisse und Überlegungen zum mathematischen Modell, sowie ihre Erfahrungen und Vorstellungen zum Kontext aufeinander zu beziehen und dadurch Zusammenhänge und Diskrepanzen zwischen Modell und Situation herauszuarbeiten. In der Aufgabe zur Baustelle geschieht dies zunächst

durch ein extremeres Ausreizen der Grenzen des Modells, während nur implizit auf die Annahmen des Modells eingegangen wird (Kasten 3). In der Aufgabenstellung selbst wird darauf verzichtet, die Idealisierung einzufangen, dass hier alle Arbeiter*innen zu jedem Zeitpunkt gleich viel schaffen. Im Gespräch zwischen Gina und Hannah hat sich kein Anhaltspunkt dafür entwickelt, diesbezüglich zu intervenieren, sie legten ihren Fokus auf das Ergebnis 60 Arbeitende brauchen 2 Tage, was wohl auch durch die konkrete Fragestellung bedingt ist. Allerdings wurde die Idealisierung, dass mit der Anzahl der Arbeitskräfte auch die Geschwindigkeit der gesamten Leistungen proportional steigt, von einem anderen Paar durchaus in den Blick genommen. Grundsätzlich könnte es lohnen, diese Idealisierung in der Aufgabenstellung expliziter zu machen, um zu diesbezüglichen Reflexionen anzuregen.

In Aufgaben zur kontextorientierten Reflexion gelingt es Gina und Hannah zu jedem angeführten mathematischen Konzept Alternativen zu benennen und anhand von diesen Wirkungen herauszuarbeiten, die für Verwendung des Konzepts in außermathematischen Zusammenhängen relevant und vorteilhaft sind. Gleichzeitig gelingt es ihnen da und dort zu differenzieren, wie Hannah im Fall der statistischen Grafiken (Kasten 4).

Zusammenfassung und Diskussion im Hinblick auf den Beitrag der Studie zu mathematischer Bildung

Bezogen auf die Forderung Fischers (2012, S. 13 f.), dass die Auseinandersetzungen mit Mathematik im Rahmen des Unterrichts Reflektieren beinhalten sollte, zeigt die Studie, dass Schüler*innen dazu fähig sind. Gina und Hannah zeigen darüber hinaus, dass vielfältige und tiefgehende Überlegungen möglich sind und, dass ihnen eine solche Tätigkeit durchaus interessant und wichtig scheint.

Die erste Grunderfahrung Winters, die Vohns für seine Charakterisierung mathematischer Bildung aufgreift (Vohns, 2020), betont die Mathematik als Mittel, um die Welt zu betrachten. Die entwickelten Aufgaben versuchen, diese Funktion der Mathematik explizit zu machen. Gina und Hannah nehmen dies an und im Abschlussgespräch zeigt sich, dass sie eine solche Auseinandersetzung mit dieser Funktion aus dem Unterricht nicht wirklich kennen. Der Mathematikunterricht scheint sich (in ihrer Wahrnehmung) auf die Aneignung der mathematischen Gegenstände und Sachverhalte zu beschränken.

Offen bleibt, wie groß das Ausmaß solcher Aufgaben im Schulunterricht sein sollte, z. B. im Vergleich mit Aufgaben, die auf Rechenfertigkeiten oder konzeptionelle Erarbeitung der Mathematik abzielen. Interviews mit anderen Schüler*innen zeigen, dass die konzeptionelle Erarbeitung von mathematischen Konzepten im Zuge solcher Aufgaben erfolgen kann, damit könnte zur inneren Differenzierung beigetragen werden.

Berechtigt ist die Frage, ob Aufgabenstellungen wie *Baustelle* für eine Auseinandersetzung mit Mathematik als Beschreibungsmittel vielleicht zu kurz greifen. Es

handelt sich dabei um eine typische Aufgabe zum Einüben der Antiproportionalität (solche Aufgaben wurden schon im Altertum zu diesem Zweck verwendet). Den Schüler*innen mag es auch ohne diesen Reflexionsanlass gelingen, zwischen dem Kontext des Mathematikunterrichts und einer außermathematischen Situation, wie der Baustelle zu unterscheiden und die Antiproportionalität in außermathematischen Situationen adäquat einzusetzen. Ein Interview mit einem anderen Paar weist darauf hin. Dennoch kann dieser Reflexionsanlass einen Beitrag dazu leisten, wie bei Gina und Hannah bewusst zu machen, dass die Verwendung von Mathematik in Situationen, „die uns alle angehen oder angehen sollten" (Winter, 1995, S. 37), nicht automatisch geeignet ist, nur weil eine Rechnung durchführbar ist. Vohns hat eine Reihe von Vorschlägen ausgearbeitet, die im Kontext reichhaltiger sind (vgl. Abschnitt 1). Eine Verschiebung des Fokus auf für die Bürger*innen-Rolle relevante Kontexte könnte in zukünftigen Untersuchungen adressiert werden.

Die vorliegende Abhandlung zeigt, dass es Argumente dafür gibt, Reflexionsprozesse, wie die vorgestellten, im Mathematikunterricht stärker zu forcieren. Wissenschaftliche Untersuchungen und (vermutlich noch wichtiger:) Entwicklungsprojekte müssen jedoch noch weiter dazu beitragen, diese über die breite Lehrer*innenschaft für die Schüler*innen zugänglicher zu machen.

Literatur

Fischer, R. (2012). Fächerorientierte Allgemeinbildung: Entscheidungskompetenz und Kommunikationsfähigkeit mit Expertinnen. In R. Fischer, U. Greiner & H. Bastel (Hrsg.), *Domänen fächerorientierter Allgemeinbildung* (S. 9–17). Trauner.

Kollosche, D. (2019). The persistence of calculus-oriented mathematics education: Research results and possible explanations. In B. Di Paola & C. Fazio (Eds.), *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 2*(3) (S. 105–108). G.R.I.M., Departimento di Matematica e Informatica, University of Palermo, Italy.

Lengnink, K. (2005). Mathematik reflektieren und beurteilen – Ein diskursiver Prozess zur mathematischen Mündigkeit. In K. Lengnink & F. Siebel (Hrsg.), *Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen* (S. 21–36). Verlag Allgemeine Wissenschaft – HRW.

Lergenmüller, A., & Schmidt, G. (2005). *Mathematik – Neue Wege 7. Arbeitsbuch für Gymnasien*. Unter Mitarbeit von Nicola Haas, Johanna Heitzer, Eberhard Lehmann, Arno Lergenmüller, Kerstin Peuser, Michael Rüsing et al. Schroedel.

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.

Picher, F. (2008). *Sozialreflexion im Mathematikunterricht: Kooperation oder Verweigerung.* Profil.

Schneider, E. (2020). Reflektieren im Mathematikunterricht – Worüber, Womit und Wie? In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S. 833–836). WTM-Verlag. https://doi.org/10.37626/GA9783959871402.0

Schmid-Zartner, R. (2015). *Reflexionsorientierter Mathematikunterricht: Am Beispiel von Messung im sozialen Kontext*. Profil.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *ZDM, 98*(6), 195–203.

Vohns, A. (2020). *Woran scheitert mathematische Bildung? Plädoyer für einen bewussten Standpunktwechsel.* Vortragsmanuskript für Toeplitz Kolloquium am 27.01.2020. https://www.researchgate.net/publication/338819650_Woran_scheitert_mathematische_Bildung_Pladoyer_fur_einen_bewussten_Standpunktwechsel

Vohns, A. (2018). Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft. Historische, philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 203–220) SpringerSpektrum.

Vohns, A. (2017). Einkommensteuertarife mit Schulmathematik erkunden – ein Zugang aus bildungstheoretischer Perspektive. *Der Mathematikunterricht, 63*(3), 3–13.

Vohns, A. (2013). Relative Armutsgefährdung – nur eine Zahl? *Der Mathematikunterricht, 59*(4), 49–58.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.

Daniela STEFLITSCH, Kora DEWEIS-WEIDLINGER, Universität Klagenfurt
daniela.steflitsch@aau.at, koramaria.deweis@aau.at

Critical Mathematics Education in der Wahrnehmung österreichischer Schüler*innen – ein genauerer Blick auf mathematisch inhaltsspezifische Auswirkungen

*Mathematikunterricht soll mehr leisten als Rechenfertigkeiten und das Anwenden von Verfahren auszubilden. Er soll auch Kompetenzen fördern, die für alle Mitglieder der Gesellschaft wichtig sind. Innerhalb der Critical Mathematics Education werden gesellschaftlich relevante Kontexte in den Unterricht inkludiert und mithilfe von Mathematik reflektiert. Der folgende Beitrag fokussiert sich darauf, wie Schüler*innen Unterrichtseinheiten in Critical Mathematics Education erleben und was sie dabei vor allem in mathematischer Hinsicht lernen können. Die Ergebnisse zeigen, dass die Schüler*innen die Thematisierung gesellschaftlicher Kontexte als positiv bewerten, den Fokus mehr auf den Lösungsprozess als auf das Ergebnis legen und unterschiedliche Lösungsansätze als Bereicherung erleben. Die Wahrnehmung der Schüler*innen dazu, was mathematisch in diesen Stunden passierte, fällt allerdings, auch innerhalb einer Klasse, sehr unterschiedlich aus und häufig nehmen sie ausschließlich Rechnen als mathematische Tätigkeit wahr. Ein explizites Reflektieren über die durchgeführten mathematischen Aktivitäten scheint deshalb ein wichtiger Schritt in der Bearbeitung solcher Aufgaben zu sein, um Schüler*innen die ganze Breite der mathematischen Ziele zu verdeutlichen.*

Was Bildung im Allgemeinen und mathematische Bildung im Speziellen leisten soll, wird seit langem und mit unterschiedlichen Blickwinkeln in der Wissenschaft und darüber hinaus diskutiert. Im deutschsprachigen Raum basieren diese Diskussionen oft auf der Debatte um Allgemeinbildung, d. h. Bildung, die über den Erwerb von Wissen für den zukünftigen Beruf oder das tägliche Leben hinausgeht und Kompetenzen und Wissen fördert, die für alle als Mitglied der Gesellschaft wichtig sind. Eine immer wiederkehrende Frage in diesem Zusammenhang ist, was und wie der Mathematikunterricht dazu beitragen kann und sollte.

Andreas Vohns hat sich in seiner Arbeit intensiv mit der Frage auseinandergesetzt, was Mathematikunterricht leisten soll (z. B. Vohns, 2017, 2018) und in einem Vortrag vorgeschlagen, dies aus einer etwas anderen Perspektive zu betrachten (Vohns, 2020): Ihm zufolge ist es sinnvoller (und erreichbarer), sich nicht auf die Frage zu konzentrieren, wie wir den Mathematikunterricht gestalten müssen, damit er gelingt, sondern darauf, wie wir einen Mathematikunterricht verhindern können, „bei dem wesentliche Bildungsgelegenheiten im schulischen Erziehungsprozess fehlen“ (S. 5). Ein Mathematikunterricht, in dem Mathematik nicht auch als eine spezifische Art der Wahrnehmung und des Verstehens von Dingen aus

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 115–130). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Natur, Gesellschaft und Kultur erlebt werden kann, die uns alle angehen oder angehen sollten, wird seiner Ansicht nach dieser Anforderung nicht gerecht. Während er das Scheitern mathematischer Bildung eher als den Regelfall erachtet (ohne dabei Schuldige zu suchen), schreibt er ein Gelingen ungewöhnlich günstigen Umständen und individuellen Leistungen zu. Er schlussfolgert, dass wir uns als Mathematiklehrer*innen und Mathematikdidaktiker*innen darauf konzentrieren sollten, Möglichkeiten zu schaffen, um das unvermeidliche Scheitern der mathematischen Bildung zumindest so weit wie möglich einzudämmen.

Eine Integration von Aspekten einer Critical Mathematics Education (CME) in den alltäglichen Mathematikunterricht könnte das Potenzial dazu haben. Vertreter*innen einer CME argumentieren, dass diese Art des Unterrichts die Schüler*innen in die Lage versetzen sollte, ihr mathematisches Wissen mit den sozialen, wirtschaftlichen oder politischen Strukturen, von denen sie umgeben sind, in Verbindung zu bringen und diese sowie die Verwendung von Mathematik in diesen Kontexten kritisch zu reflektieren (z. B. Skovsmose, 1994).

Die Forschung auf diesem Gebiet hat in den letzten Jahrzehnten stetig zugenommen. Eine Mehrheit der Beiträge ist theoretischer Natur und entwirft eine Vision davon, wie der Mathematikunterricht strukturiert werden könnte, um die oben genannten Ziele zu erreichen. Empirische Studien zeigen, dass die Anwendung dieser Ansätze zu einem stärkeren Engagement der Schüler*innen führen kann, aber auch, dass die theoretischen Visionen in der Praxis oft nicht so einfach umzusetzen sind. Lehrer*innen brachten zum Ausdruck, dass sie Schwierigkeiten hatten, geeignete Aufgaben zu finden, die nötige Zeit für die Umsetzung aufzubringen und vor allem mathematische und soziale Ziele im Unterricht unter einen Hut zu bringen (z. B. Bartell, 2013; Brantlinger, 2013). Nur wenige dieser Studien konzentrieren sich explizit darauf, wie Schüler*innen mit solchen Ansätzen umgehen. Welche Erfahrungen Lehrpersonen bei der Umsetzung machen, kann wichtige Erkenntnisse liefern, wie solche Ansätze in Zukunft häufiger in den alltäglichen Unterricht eingebracht werden können, doch letztendlich sind es die Schüler*innen, denen man dadurch die Möglichkeit bieten möchte ihre (mathematischen) Kompetenzen weiterzuentwickeln. Daher erscheint es ebenso wichtig, die Erfahrungen der Schüler*innen genauer in den Blick zu nehmen.

Dieser Beitrag konzentriert sich darauf, wie Schüler*innen damit umgehen, wenn Aspekte einer CME im Mathematikunterricht angewendet werden. Schüler*innen aus drei unterschiedlichen Klassen bzw. Schulen in Österreich wurden dafür nach der Auseinandersetzung mit sozialkritischen Themen in mehreren Mathematikunterrichtseinheiten zu ihren Erfahrungen befragt. Neben allgemeinen Rückmeldungen von Schüler*innen zu diesen Unterrichtseinheiten konzentriert sich der folgende Beitrag vor allem auf die Beantwortung folgender Forschungsfrage: *Welche Auswirkungen auf mathematisch-inhaltsspezifischer Ebene können in Unterrichtseinheiten in Critical Mathematics Education bei Schüler*innen beobachtet werden*?

Während Auswirkungen in verschiedenen Bereichen (mathematisch, thematisch, sozial) festzustellen waren, konzentrieren wir uns hier hauptsächlich auf die Rückmeldungen dazu, wie und was die Schüler*innen in mathematischer Hinsicht lernen und mitnehmen konnten bzw. wie sie ihre Herangehensweise an die Bearbeitung der Problemstellungen beschreiben.

Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand

Lehrer*innen können sich an allgemeiner erziehungswissenschaftlicher Literatur, aber auch an spezifischer mathematikdidaktischer Literatur oder an Lehrplänen oder sogar Schulbüchern orientieren, wenn sie sich fragen, was ihr eigener Mathematikunterricht leisten soll und welche Kompetenzen ihre Schüler*innen während ihrer Schulzeit darin erwerben sollen. Die Fähigkeit, kritisch über die eigene Umwelt nachzudenken und zu reflektieren, die Hintergründe bestimmter Sachverhalte zu verstehen, relevante Informationen als solche zu identifizieren und die möglichen (eventuell verschleierten) Interessen der beteiligten Akteur*innen zu erkennen, wird in der Literatur schon seit längerem als eines der Ziele von Bildung diskutiert (z. B. Dewey, 1916/1997; Klafki, 1985/2007).

Es scheint, dass diese Forderungen aktueller denn je sind, da kritisches Denken, Kommunikation und Zusammenarbeit sowie Kreativität heute als grundlegende Fähigkeiten bezeichnet werden, die die Lernenden des 21. Jahrhunderts durch Bildung erwerben sollen (*21st century skills*). Ähnliche Formulierungen finden sich im Lehrplan, der für die meisten Lehrer*innen die wohl offensichtlichste Richtschnur darstellt. So heißt es bereits im ersten Teil des österreichischen Lehrplans (Mittelschule und Gymnasium), der die allgemeinen Bildungsziele formuliert, die in allen Schulfächern gefördert werden sollen, im Abschnitt über den gesetzlichen Auftrag der Schulen:

> Die Bereitschaft zum selbständigen Denken und zur kritischen Reflexion ist besonders zu fördern. Die Schülerinnen und Schüler sollen in ihrem Entwicklungsprozess zu einer sozial orientierten und positiven Lebensgestaltung unterstützt werden. (BMBWF, 2022)

Bereits in diesem Abschnitt wird auf die Bedeutung der kritischen Reflexion als Teil der schulischen Bildung hingewiesen und die soziale/gesellschaftliche Verantwortung der oder des Einzelnen betont. Noch deutlicher werden die Forderungen, wenn es darum geht, welche Kenntnisse und Fähigkeiten während der Schulzeit erworben werden sollen:

> Die Schülerinnen und Schüler sollen sich altersgemäß mit Problemen auseinandersetzen, Sachverhalte kritisch hinterfragen, Probleme erkennen und definieren, selbstständig nach Lösungen suchen und das eigene Handeln kritisch reflektieren. (BMBWF, 2022)

Darüber hinaus sollen laut Lehrplan „dynamische Fähigkeiten“ entwickelt werden, die es den Schüler*innen ermöglichen, mit anderen zu kooperieren, Verantwortung zu übernehmen und das gesellschaftliche Leben aktiv mitzugestalten. Der Lehrplan betont außerdem ausdrücklich die Förderung eines Verständnisses für „politische, wirtschaftliche, rechtliche, soziale, ökologische und kulturelle“ Zusammenhänge. Eine ganzheitlichere Betrachtung gesellschaftlicher Problemstellungen erfordert ein Fördern eines zusammenhängenden Denkens über die Fächergrenzen hinaus.

In Anbetracht der wichtigen Rolle, die die Mathematik bei der Beschreibung, Modellierung und dem Finden/Berechnen von Lösungsvorschlägen im Rahmen gesellschaftlicher Herausforderungen spielt, und der besonderen Bedeutung, die der Mathematik bei der Legitimation politischer Entscheidungen zukommt (Barwell, 2020), erscheint es darüber hinaus unabdingbar, diesen Anforderungen gerade auch im Mathematikunterricht Rechnung zu tragen.

Ein Ansatz, der dies zu tun versucht, ist der der Critical Mathematics Education. Im Rahmen der CME werden gesellschaftspolitisch relevante Perspektiven in den Mathematikunterricht einbezogen. Der Schwerpunkt eines solchen Unterrichts liegt nicht nur auf der Vermittlung innermathematischen Wissens und dem (Auswendig-)Lernen mathematischer Regeln und Verfahren (die ebenfalls wichtig sind), sondern auch darauf, gesellschaftlich relevante Kontexte in den Unterricht einzubringen und diese sowie die Verwendung von Mathematik in diesen Kontexten kritisch zu reflektieren. Definitionen von CME variieren bei jenen, die sie praktizieren oder darüber schreiben, weshalb sich die Beiträge oft in ihrem Fokus unterscheiden. Andersson und Barwell (2021) charakterisieren eine CME als einen Mathematikunterricht, “[which is] driven by urgent, complex questions; is interdisciplinary; is politically active and engaged; is democratic; involves critique; and is reflexive and self-aware” (S. 3).

Nur wenige empirische Studien in diesem Bereich befassten sich explizit damit, wie Schüler*innen mit solchen Ansätzen umgehen, welche Auswirkungen zu beobachten sind und was sie daraus mitnehmen können. Erkenntnisse auf dieser Ebene gibt es einerseits von Forschenden, die ihren eigenen Unterricht untersuchten und dabei in ihren Analysen häufig auch inkludierten, wie ihre Schüler*innen auf die Verwendung von Ansätzen der CME reagierten (z. B. Avcı, 2019; Brantlinger, 2013; Gutstein, 2006; Voss & Rickards, 2016). Andererseits arbeiteten andere Mathematikdidaktiker*innen eng mit Lehrer*innen zusammen, die versuchten, diese Ansätze in ihrem Mathematikunterricht anzuwenden, und untersuchten ihre Vorgehensweise und häufig auch Reaktionen der Schüler*innen (z. B. Esmonde, 2014; Kokka, 2020; Wright, 2020). Ganz allgemein berichteten viele von einem erhöhten Engagement der (meisten) Schüler*innen, da diese eine persönliche Verbindung zu den im Unterricht behandelten Themen herstellen konnten (Avcı, 2019; Brantlinger, 2013; Gutstein, 2006; Voss & Rickards, 2016).

Wright (2020) stellte fest, dass dieses verstärkte Engagement vor allem bei Schüler*innen mit niedrigeren Leistungen und bei Schüler*innen, die nicht viel am traditionellen Mathematikunterricht teilgenommen haben, zu beobachten war.

In einigen Fällen nutzten die Schüler*innen die Mathematik jedoch nicht so, wie es sich die Lehrkräfte wünschten, und ein Eingreifen in den Lösungsprozess war notwendig, um den Schüler*innen die kritischen Aspekte hinter dem in den Unterricht eingebrachten Thema zu verdeutlichen (z. B. Brantlinger, 2013; Gutstein, 2006). Esmondes (2014) oder Kokkas (2020) Ergebnisse aus Studien mit sozioökonomisch gut situierten Schüler*innen wiesen darauf hin, dass mathematische Ergebnisse je nach Hintergrundwissen sehr unterschiedlich interpretiert werden können, was zu verschiedenen und manchmal widersprüchlichen Schlussfolgerungen führte. Dies kann zur Folge haben, dass Schüler*innen ihre eigenen Privilegien und Stereotype verstärken, anstatt das wünschenswerte Gegenteil zu erreichen. Kokka (2020) schlussfolgerte, dass es notwendig sei, solche Themen explizit und wiederholt mit den Schüler*innen zu diskutieren, um so in Richtung Gleichheit und Gerechtigkeit hinzuarbeiten. Erfreulicherweise konnten acht von zehn Schüler*innen, die Kokka in ihrer Studie untersuchte, durch die Beschäftigung mit Aufgaben zur sozialen Gerechtigkeit ihr Verständnis für die gesellschaftspolitischen Verhältnisse verbessern. Durch die intensive Auseinandersetzung mit den Aufgabenstellungen begannen diese Lernenden, ihre Perspektive zu verändern und ein Gefühl der persönlichen Handlungsfähigkeit zu entwickeln.

Im Gegensatz dazu stellten einige Schüler*innen den Ansatz der CME offensiv in Frage, da sie nicht erkannten, wie gesellschaftliche Themen in den Mathematikunterricht passen können und wie diese Art des Unterrichts sie auf das Bestehen (standardisierter) Tests vorbereiten soll. Dies verdeutlicht auch die Rückmeldung eines Schülers aus Gutsteins (2006) Klasse: “To pass the Iowas[1], we don’t have to think things, we have to know things” (S. 143). In ähnlicher Weise erlebte Brantlinger (2013) aktiven und passiven Widerstand von einigen Schüler*innen, denen es vor allem darum ging, schnellstmöglich den Geometriekurs positiv zu absolvieren. Einige fanden es nicht angemessen soziale Fragen im Mathematikunterricht zu erörtern und nannten es „goofy“ (S. 1067). Vor allem leistungsstärkere Schüler*innen äußerten die Befürchtung, Zeit mit dem Diskutieren von Dingen zu verlieren, die ihrer Meinung nach nicht in den Mathematikunterricht gehörten, da diese auch nicht Teil von standardisierten Prüfungen sind.

Insgesamt liefern bisherige Studien Ergebnisse auf Schüler*innenebene, die eher allgemein die Reaktionen auf die neuen Unterrichtsansätze beschreiben. Diese zeigen, dass Schüler*innen unterschiedlich darauf reagieren können und es Zeit und Übung benötigt, um eine kritische Auseinandersetzung mit gesellschaftlichen Themen auch im Mathematikunterricht zu fördern. Dieser Beitrag soll detailliertere Ergebnisse liefern, wie Schüler*innen an die Bearbeitung von Aufgabestellungen in CME herangehen und was sie ihrer Meinung nach mathematisch daraus lernen können.

Methodik

Die Daten zur Beantwortung der Forschungsfrage wurden im Rahmen eines größeren Forschungsprojekts erhoben, in dem eine Fortbildung mit neun Mathematiklehrer*innen zum Thema CME stattfand. Die Fortbildung wurde von der Erstautorin konzipiert und zwischen Oktober 2021 und Mai 2022 durchgeführt. In diesem Zeitraum fanden etwa einmal im Monat Treffen mit den Lehrpersonen statt (einschließlich einer Pause aufgrund von Covid-Beschränkungen). Die Fortbildung war vornehmlich als Workshop konzipiert und es wurde gemeinsam am Konzept, an Zielen und an praktischen Umsetzungen für den Mathematikunterricht gearbeitet. Sieben Teilnehmende der Fortbildung waren Mittelschullehrer*innen aus derselben Schule, weshalb die Treffen in dieser städtischen Mittelschule (MS) im Süden Österreichs stattfanden. Außerdem nahm ein Lehrer einer Berufsbildenden Höheren Schule (BHS) und eine Gymnasiallehrerin (= Allgemeinbildende Höhere Schule, AHS) teil, die ausdrückliches Interesse am Thema des Kurses hatten. Keine*r der Teilnehmenden war zuvor mit dem Konzept in Berührung gekommen, und die meisten verfolgten vor dem Kurs einen recht traditionellen Lehransatz.

Schultyp	**Schulstufe**	**Anzahl Schüler*innen** 1. (2.) Interview	**Gesellschaftliche Themen**	**Mathematische Inhalte**
MS	6.	6 (5)	Vermögensverteilung Ö, Steuern	Prozentrechnung, Grundrechnungsarten
AHS	8.	7 (6)	Wasserverbrauch bei Lebensmitteln	Statistik, unterschiedliche Diagrammtypen interpretieren, Einheiten, große Zahlen
BHS	9.	3	Vermögensverteilung Ö, Steuern	Prozentrechnung, Statistik, Graphiken und Diagramme interpretieren und aufstellen, Gleichungen

Tabelle 1

Die Analyse konzentriert sich auf Schüler*innen aus drei verschiedenen Klassen (MS, AHS, BHS), die von drei verschiedenen Lehrpersonen unterrichtet wurden (alle Namen in diesem Beitrag sind Pseudonyme). Die Lehrpersonen wurden gebeten von all jenen Schüler*innen, die freiwillig (und mit dem Einverständnis ihrer Erziehungsberechtigten) an der Studie teilnehmen wollten, leistungsstarke, leistungsschwache und durchschnittliche Schüler*innen auszuwählen und dabei auch zu berücksichtigen, wer davon Mathematik mag oder nicht mag. In der Annahme, dass die Lehrer*innen ihre Schüler*innen gut kennen, wurde diese Auswahlmethode gewählt, um möglichst viele verschiedene Schüler*innenmeinungen zu erfassen. Insgesamt nahmen 16 Schüler*innen an den Interviews teil. Da die Lehrer*innen frei entscheiden konnten, in welchen Klassen sie die ausgearbeiteten Unterrichtsbeispiele umsetzen wollten, unterschieden sich die Schüler*innen in ihrem Alter und somit auch in ihrer Erfahrung mit verschiedenen

mathematischen Themen. In Tabelle 1 kann man sehen welche gesellschaftlichen und mathematischen Themen in den Unterrichtseinheiten schwerpunktmäßig behandelt wurden, sowie die Schule bzw. die Schulstufe der teilnehmenden Schüler*innen.

Die Daten für die Analyse in diesem Beitrag stammen aus zwei halbstrukturierten Einzelinterviews mit den ausgewählten Schülern*innen. Die erste Runde der Interviews mit 16 Schüler*innen fand im Wintersemester 2021 statt, bevor die Lehrkräfte Beispiele aus der Fortbildung in den Unterricht einbrachten. Die Fragen zielten darauf ab zu erfahren, welches Bild Lernende von Mathematik haben, wie sie den Mathematikunterricht erleben, wie sie Mathematik am besten lernen, welche mathematischen Inhalte sie als relevant oder nicht relevant ansehen und wo sie das Gefühl haben, dass Mathematik in ihrem Leben eine Rolle spielt. Die zweite Befragungsrunde war im Mai und Juni 2022 angesetzt, nachdem die Lehrer*innen einige Zeit lang Beispiele der CME in ihren Unterricht integrierten. Einige dieser Unterrichtseinheiten wurden videoaufgezeichnet, und die Erstautorin war in manchen dieser Stunden anwesend, um Unterrichtsbeobachtungen durchzuführen und einen noch besseren Eindruck der Herangehensweisen der Schüler*innen zu erhalten. An den zweiten Interviews nahmen (aus administrativen Gründen) nur mehr 14 Schüler*innen teil. Auch hier wurden ähnliche Fragen wie bei den ersten Interviews gestellt. Darüber hinaus fokussierte sich ein Abschnitt speziell darauf, wie die Schüler*innen die Einheiten mit den CME Beispielen erlebt haben, wie sie an die Bearbeitung dieser herangegangen sind und was sie daraus mitnehmen konnten bzw. was anders zu den „normalen“ Unterrichtsstunden war. Alle Interviews wurden auditiv aufgezeichnet und transkribiert.

Für die Analyse der Daten orientierten wir uns an einer qualitativ-thematischen Analysemethode (Braun & Clarke, 2006). Diese scheint geeignet, wenn es darum geht, „Erfahrungen, Gedanken oder Verhaltensweisen in einem Datensatz zu verstehen“ (Kiger & Varpio, 2020, S.1). Wir wendeten zunächst eine induktive Analyse an, indem wir die Transkripte mehrmals lasen und Daten kodierten, ohne Codes in eine bestimmte Kategorie einzuordnen, die in anderer Literatur auftaucht. Nach der individuellen Kodierung der Daten mit Hilfe von MAXQDA diskutierten wir die Codes und interessante Teile der Interviews und versuchten, übergreifende Themen und Unterthemen zu finden. Der iterative Prozess, bei dem wir die Daten zunächst einzeln betrachteten, dann die Codes und Kategorien miteinander verglichen und die Stellen diskutierten, an denen die Klassifizierungen voneinander abwichen, trug zur Validierung der Ergebnisse bei. Darüber hinaus diskutierten wir die erstellten Kategorien in der Mitte der Analyse mit anderen Kolleg*innen, um ihre Nachvollziehbarkeit zu bewerten und unsere Vorgehensweise zu reflektieren.

Wir erweiterten unseren Ansatz für die Analyse der zweiten Befragungsrunde. Nach der induktiven Betrachtung der Daten und mit den erstellten Codes und Kategorien im Hinterkopf analysierten wir die Transkripte (vor allem den Teil der

Rückmeldungen zu den Einheiten in CME) nochmals deduktiv, um die erstellten Kategorien entlang breiterer Themen, wie denen der akademischen oder einstellungsbezogenen Effekte, zu sortieren. Zusätzlich erstellten wir während der Analyse Memos, um dabei aufkommende Gedanken nicht zu verlieren und die Daten so noch detaillierter analysieren und diskutieren zu können.

Ergebnisse

Die Schüler*innenantworten auf die erste allgemein einleitende Frage, wie sie die Unterrichtseinheiten mit den CME Beispielen erlebten, zeigen, dass angesprochene Aspekte zunächst sehr unterschiedlicher Natur waren. Während sich einige sofort auf den gesellschaftlichen Kontext der Stunden konzentrierten (z. B. Wasserverbrauch, Verteilung des Wohlstands, Steuern) und erklärten, was sie in diesem Zusammenhang gelernt haben und welche Fragen sie in ihren Gruppen diskutiert haben, konzentrierten sich andere auf die mathematischen Inhalte (z. B. Statistik, Prozentsätze, Grundrechenarten). Wieder andere verwiesen auf die veränderte Arbeitsweise bei der Bearbeitung der Aufgaben und erklärten, dass sie gerne in Gruppen arbeiteten und verschiedene Standpunkte und unterschiedliche Meinungen diskutierten. Einige Schüler*innen sprachen in den ersten Rückmeldungen mehr als einen dieser Aspekte an, was zeigt, dass das Einbeziehen solcher Aufgaben in den Unterricht Effekte auf unterschiedlichen Ebenen hervorruft, die häufig ineinander verschwimmen und nicht klar voneinander zu trennen sind.

Sehr ähnlich waren hingegen die Rückmeldungen der Schüler*innen, wenn sie bewerteten, wie ihnen diese Art von Unterricht gefiel. Das allgemeine Feedback war durchweg positiv und viele Schüler*innen begannen auch, die Aufgaben mit einer positiven Bewertung zu reflektieren. Zu den Reaktionen gehörte, dass der Unterricht „Spaß gemacht hat“, „wirklich interessant war“, „spannend war“. Diese Antworten lassen auf ein erhöhtes Engagement der Schüler*innen in diesen Unterrichtseinheiten schließen. Die Gründe dafür scheinen jedoch unterschiedlicher Natur zu sein. Während einige betonten, wie interessant es war, im Mathematikunterricht etwas über Themen aus dem wirklichen Leben zu lernen, hoben andere die Erfahrung der Gruppenarbeit oder die allgemeine Atmosphäre in diesem Unterricht hervor, die ihnen weniger stressig erschien als im ‚normalen‘ Mathematikunterricht.

Die angesprochenen Aspekte in den allgemeinen Rückmeldungen auf die Einstiegsfragen, die schon einen guten ersten Eindruck vermittelten, was von Schüler*innen als bedeutend wahrgenommen wurde, und auch alle weiteren Antworten auf nachfolgende Fragen analysierten wir hinsichtlich identifizierbarer Effekte auf Schüler*innenebene. Diese Analyse lieferte vier übergeordnete Themengruppen:

- Inhaltlich-mathematische Ebene (mathematische Inhalte oder mathematische Tätigkeiten)

- Gesellschaftlich-thematische Ebene (Bewusstsein für und Wissen über gesellschaftlichen Kontext)
- Soziale Aspekte (Arbeiten in Gruppen, Zuhören, Diskutieren, Toleranz)
- Motivationale Aspekte (aktive Teilnahme, Relevanz, Engagement)

Während die meisten Schüler*innen Aspekte auf mehreren Ebenen ansprachen und unterschiedliche Effekte oftmals auch gleichzeitig zum Tragen kamen, möchten wir uns in diesem Beitrag auf Effekte der inhaltlich-mathematischen Ebene fokussieren. Dazu gehören Rückmeldungen darüber, was die Schüler*innen glaubten, mathematisch gelernt zu haben, wie sie Mathematik während der Bearbeitung der Aufgaben einsetzten, was sie als mathematische Tätigkeit wahrnahmen oder wie sich ihr mathematisches Arbeiten im Vergleich zu ihrem regulären Mathematikunterricht unterschied. Diese Aspekte wurden von einigen Schüler*innen schon in den anfänglichen Aussagen angesprochen, bei anderen war ein genaueres Nachfragen notwendig, um mehr über das mathematische Arbeiten in den Einheiten zu erfahren. Die angesprochenen Aspekte bezogen sich dabei auf unterschiedliche Bereiche, die im Folgenden diskutiert werden.

Mathematischer Gehalt

Die Vorstellungen oder Wahrnehmungen der Schüler*innen über den Einsatz von Mathematik in diesen Einheiten waren sehr unterschiedlich, auch innerhalb einer Klasse. Um dies zu verdeutlichen, stammen folgende Zitate von Schüler*innen aus derselben Gymnasial-Klasse, die sich in diesen Einheiten mit dem Thema des Wasserverbrauchs von Lebensmitteln beschäftigten, wobei die mathematischen Ziele hauptsächlich dem Themenbereich der Statistik zuzuordnen waren. Einige Schüler*innen bezogen sich bereits auf den mathematischen Inhalt, wenn sie nach den CME Unterrichtseinheiten im Allgemeinen gefragt wurden, wie Lisas Rückmeldung zeigt:

> I: Kannst du dich noch an die Stunden zum Thema Wasserverbrauch erinnern? Wie waren denn diese Stunden prinzipiell für dich?
> Lisa: Ähm… Also prinzipiell Statistik zum Beispiel mag ich extrem gerne. Das taugt mir total. Und ähm… Ich fand das eigentlich nicht einmal so schlecht, weil da wurde einem erst einmal bewusst, wie viel Wasser da wirklich draufgeht, so. Für all die Dinge… Und das ist eigentlich eh gescheit, weil sowas braucht man, finde ich, fürs Leben durchaus. Also es ist nicht schlecht sowas zu können, also sowas zu analysieren und so.

Dabei wird deutlich, dass ihre Wahrnehmung der Stunden sowohl auf den mathematischen Inhalt (Statistik) als auch auf den gesellschaftlichen Kontext (Wasserverbrauch) abzielt. Sie bringt dabei beide Aspekte in ihrer Rückmeldung zusammen und es scheint, als würde sie es als durchaus relevant erachten, solche Problemstellungen im Mathematikunterricht zu behandeln. Andere gingen in ihren

Anfangsrückmeldungen nicht direkt auf das mathematische Thema ein, sondern bezogen sich eher auf die veränderte (mathematische) Arbeitsweise in diesen Einheiten, wie Peters Antwort zeigt:

> Peter: Ja, das war ganz spannend, aber das habe ich... also... da habe ich… das war mehr so zu überlegen und nicht so viel zu rechnen. Das habe ich sehr spannend gefunden. Weil da habe ich auch was Neues gelernt.

Peter scheint sich bewusst zu sein, dass in diesen Stunden auch andere (mathematische) Tätigkeiten, die nicht direkt das Lösen von Rechnungen beinhalten, wichtiger Bestandteil in der Problembearbeitung waren, und scheint dies durchaus zu schätzen. Bei manchen anderen wurde der mathematische Aspekt erst zum Thema in den Gesprächen, wenn explizit danach gefragt wurde. Aber auch die Antworten auf die Frage, was sie denn in diesen Einheiten mathematisch gelernt haben, unterschieden sich deutlich. Einige, wie auch Katrin, nannten dabei grob das mathematische Thema: „Also... gelernt… ähm... es war ein Einstieg in die Statistik würde ich sagen“. Andere waren allerdings der Meinung, dass sie dabei mathematisch nicht wirklich etwas lernen, sondern nur thematisch etwas mitnehmen konnten. Tom fiel zum mathematischen Inhalt auch auf Nachfrage nicht viel ein:

> Tom: (überlegt länger) Dass man viel Wasser verbraucht… Und (überlegt) Ja.
> I: Mathematisch gesehen?
> Tom: (überlegt) Nichts.
> I: Nichts würdest du sagen?
> Tom: (überlegt länger) Nein.
> I: Habt ihr auch Mathe irgendwie gebraucht, damit ihr die Sachen versteht oder diskutieren könnt?
> Tom: Wir haben nur das Wasser zusammengerechnet und mit dem Rindfleisch verglichen. Mehr haben wir nicht gemacht.

Hier wird sichtbar, dass er sich nicht bewusst zu sein scheint, welche mathematischen Tätigkeiten er in den Unterrichtseinheiten durchgeführt hat, um die Problemstellungen bearbeiten zu können. Erst auf genaueres Nachfragen fasst er kurz zusammen, wo sie, seiner Meinung nach, Mathematik verwendet haben, wertet dies aber im nachfolgenden Satz ab und bezieht sich nur auf sehr grundlegende mathematische Tätigkeiten. Das eigentliche mathematische Thema (Statistik) der Unterrichtseinheiten nennt er dabei nicht.

Die große Bandbreite an Rückmeldungen zu den mathematischen Tätigkeiten war auch bei Schüler*innen der anderen Klassen zu bemerken. Da die Erstautorin mit den Aufgaben, an denen in diesen Unterrichtstunden gearbeitet wurde, vertraut war, konnte über die bearbeiteten Beispiele detaillierter in den Interviews gesprochen werden. Letztendlich nannte jede*r Schüler*in irgendeine Form der mathematischen Aktivität, die er oder sie durchführte, auch wenn dies bei manchen ein

sehr gezieltes Nachfragen erforderte. Ohne detailliertere Nachbesprechung der bearbeiteten Beispiele wären vermutlich einige Schüler*innen bei ihrer anfänglichen Wahrnehmung, dass sie mathematisch nicht viel gearbeitet haben, geblieben.

Mathematische Handlungsdimensionen

Orientiert man sich bei der Analyse der Rückmeldungen auf mathematisch-inhaltlicher Ebene an den Handlungsdimensionen des Kompetenzmodells, in dem auch die österreichischen Mathematikstandards verankert sind, so beziehen sich die Antworten überwiegend auf die Dimension „Rechnen und Operieren". Meist wurden mathematische Tätigkeiten zusammengefasst als „[wir haben] etwas zusammengerechnet", „ausgerechnet", „die Prozente ausgerechnet", „Rechnungen gemacht". Nur sehr wenige Antworten berührten die Dimensionen der mathematischen Interpretation oder Argumentation, was besonders interessant ist, da viele der Aufgaben besonders diese Handlungsbereiche förderten. Die Aufgabe der Gymnasiasten beinhaltete beispielsweise viele verschiedene statistische Informationen in Form von unterschiedlichsten Diagrammen und Darstellungen (Text, Video). Die Schüler*innen mussten diese verschiedenen Daten verstehen, richtig interpretieren und verschiedene Einheiten umrechnen, um die bereitgestellten Informationen für weitere Überlegungen nutzen und vergleichen zu können. Die Antworten auf die Fragestellungen konnten sehr unterschiedlich ausfallen und mussten daher gut (mathematisch) begründet werden. Nur ein Gymnasialschüler (von sechs) bezog dies in die Erläuterung der mathematischen Aktivitäten ein. Andere bezogen sich nur auf die Berechnungen in den Stunden und konnten keinen anderen Inhalt erkennen: „Ja, also Rechnungen auf jeden Fall mit Wasserverbrauch… hmmm… und sonst (überlegt länger) sonst eher wenig... nichts... weiß ich nicht...". Selbst wenn die Schüler*innen in den Interviews genauer zu ihren Begründungen der Ergebnisse gefragt wurden, hoben sie die Mathematik nur selten als Werkzeug dafür hervor, sondern konzentrierten sich dabei eher auf kontextbezogene Argumente. Während sie ihre Ergebnisse in den Unterrichtseinheiten sehr wohl mit Hilfe der Mathematik darstellten (was auch bei der Betrachtung ihrer Ergebnisplakate deutlich wird und durch die Unterrichtsbeobachtung sichtbar wurde), bezogen sie diese mathematischen Aktivitäten nicht in die Erklärungen in den Interviews mit ein. Meist wurde nur dann von einer mathematischen Tätigkeit gesprochen, wenn tatsächlich eine Berechnung durchgeführt wurde. Mathematisches Handeln wurde offensichtlich häufig primär oder gar exklusiv als Rechnen aufgefasst.

Fokus auf Prozess statt Ergebnis

In den Rückmeldungen war ersichtlich, dass das Hauptaugenmerk in diesen Einheiten klar auf dem Lösungsprozess und nicht dem Ergebnis selbst lag. Viele Schüler*innen erklärten in den Rückmeldungen, wie sie zu einer Lösung gekommen waren, erwähnten die Lösung selbst dabei oft aber nicht. Da unterschiedliche Gruppen meist unterschiedliche Lösungen präsentierten, war die Begründung der

Herangehensweise ein essentieller Bestandteil, damit alle nachvollziehen konnten, wie Ergebnisse zustande kamen. Überraschenderweise konnten sich viele Schüler*innen auch an die Begründungen der anderen Gruppen erinnern und Unterschiede zu ihren eigenen erläutern, obwohl die Interviews teilweise über einen Monat nach der Durchführung der Einheiten stattfanden. So hoben manche Schüler*innen genau diesen Aspekt als besonders interessant hervor, wie die Mittelschülerin Viktoria: „Weil jeder hat eine andere Erklärung dafür. Weil manche nehmen zwar das Gleiche, aber haben eine andere Erklärung… und das ist dann immer ganz interessant." Eine andere Mittelschülerin erklärte, dass sie erst durch Erläuterungen der Lösungsüberlegungen anderer Gruppen ihre eigene Lösung noch einmal verbesserte. Ein wichtiger und für die Schüler*innen offenbar auch interessanter Teil der Unterrichtseinheiten war nicht nur die Problembearbeitung in der eigenen Gruppe, sondern auch das Nachvollziehen anderer Herangehensweisen und das anschließende Reflektieren, Vergleichen und eventuelle Adaptieren der eigenen Lösungen.

Veränderte Wahrnehmung der Mathematik und des Mathematikunterrichts

Interessanterweise waren auch die Rückmeldungen zur Frage nach den wahrgenommenen Unterschieden zum „normalen" Mathematikunterricht sehr unterschiedlich, auch wieder innerhalb einer Klasse. Manche Schüler*innen konnten keine Unterschiede erkennen, während andere eine gänzlich andere Art des Unterrichts wahrgenommen hatten. Viele Antworten bezogen sich dabei auch auf soziale Aspekte oder geänderte Rahmenbedingungen (z. B. Tische waren anders platziert). Nur vereinzelt war der Fokus dabei auf mathematischer Ebene, auch wenn aus jeder Klasse zumindest ein*e Schüler*in diesen Aspekt ansprach. Nur sehr wenige verwiesen auf das veränderte Format der Aufgaben, das unterschiedliche (richtige) Ergebnisse und vor allem unterschiedliche Wege zu einem Ergebnis fördert. Die Gymnasiastin Katrin hob aber zum Beispiel die andere Art der Aufgabenstellung hervor: „Es war jetzt nicht so eine Aufgabe, wo gesagt wurde: Bitte rechnets das jetzt aus oder irgendsowas ganz Mathematisches". Andere verwiesen vereinzelt darauf, dass der Mathematik in diesen Einheiten eine etwas andere Aufgabe zukam und sie dort als Tool verwendet wurde, um komplexere Sachverhalte zu verdeutlichen, wie die Aussage von Laura aus der BHS zeigt:

> Ja, weil wir dann noch deutlicher gesehen haben, dass das Ganze halt echt kompliziert aufgeteilt ist und auch unfair aufgeteilt ist und deswegen… ja, es [der Einsatz von Mathematik] hat schon geholfen.

Keine*r der Schüler*innen brachte aber zum Beispiel den Aspekt zur Sprache, dass diese Aufgaben nicht die übliche Binarität von richtig/falsch aufwiesen, dessen Fehlen wir doch als ein Merkmal von CME ansehen würden. Insgesamt wurde in der Analyse zu den Unterschieden auf mathematischer Ebene deutlich, dass die meisten Schüler*innen in irgendeiner Art und Weise die Unterrichtseinheiten doch als anders als üblich wahrnehmen, sie aber häufig nicht wirklich artikulieren

konnten, was genau sich verändert hat. Da viele unterschiedliche Aspekte in diesen Unterrichtseinheiten zusammenspielen, weil gesellschaftliche Themen inkludiert werden, andere soziale Arbeitsformen zum Einsatz kommen und teilweise auch andere mathematische Tätigkeiten im Fokus stehen, ist es dementsprechend schwierig, Änderungen genau zu benennen. Schüler*innen werden sich dann in ihren Aussagen vermutlich auf die Aspekte fokussieren, die ihnen am meisten in Erinnerung sind oder jene, die sie am besten beschreiben können. Die Aussage von Mittelschüler Peter fasst gut zusammen, dass die Schüler*innen die Mathematik in diesen Unterrichtseinheiten als etwas anderes wahrgenommen haben, auch wenn sie die Veränderungen nicht genauer beschreiben können:

> Ja, weil das war so ein bisschen... Es war zwar Mathematik, aber andere Mathematik. (…) Eher, so... ich weiß nicht, wie man da sagt... aber mhm ... so ... (überlegt länger) so ... rednerische Mathematik. So Art *soziale Mathematik.*

Diskussion

Die Rückmeldungen der Schüler*innen zeigen, dass die CME Unterrichtseinheiten ganz unterschiedlich wahrgenommen wurden, auch innerhalb einer Klasse. Gemeinsamkeiten über alle Schulstufen und Schultypen hinweg zeigen sich bei den Bewertungen der Einheiten, die durchwegs als interessant und spannend eingestuft wurden. Im Gegensatz zu dem, was in anderen Studien gezeigt wurde, äußerte niemand das Gefühl, dass solche Themen nicht in den Mathematikunterricht passen oder diese Art des Unterrichts nicht gut auf Prüfungen vorbereiten würde. Vielmehr schienen die Schüler*innen die Integration gesellschaftlicher Themen in den Mathematikunterricht zu begrüßen und als relevant einzustufen, da man „sowas durchaus fürs Leben braucht“ (Lisa, AHS).

Die großen Unterschiede in den Wahrnehmungen, welche mathematischen Tätigkeiten dabei zum Einsatz kamen, könnten auf unterschiedliche Gründe zurückzuführen sein. Einerseits könnte schon die Fragestellung im Interview dazu geführt haben, dass die Antworten auf unterschiedliche Aspekte abzielten. Die Frage „Was denkst du hast du in diesen Stunden mathematisch gelernt/für dich mitgenommen?“ kann so interpretiert werden, dass nur Bereiche genannt werden, die sie in den Unterrichtseinheiten neu gelernt haben. Wer also z. B. in der Gymnasialklasse davor schon sicher im Umgang mit der Auswertung statistischer Diagramme war, könnte diese Tätigkeiten als nicht erwähnenswert empfunden haben, da es ja nicht unter die Kategorie „Neues gelernt“ fallen würde. Schüler*innen, die die Fragestellung breiter interpretierten und alle mathematischen Tätigkeiten, die sie in diesen Einheiten ihrer Meinung nach durgeführt haben, nannten, hatten klarerweise deutlich detailliertere und gehaltvollere Rückmeldungen.

Andererseits beeinflusst die Vorstellung, was überhaupt als mathematische Tätigkeit angesehen wird, die Rückmeldungen bedeutend. Wie auch die Analyse nach

Handlungsbereichen zeigt, nannten Schüler*innen Großteils nur operative Tätigkeiten, wenn es darum ging, was mathematisch in den Einheiten passierte. Da die Aufgabenstellungen allerdings (fast) keine direkten Anweisungen zu Berechnungen beinhalteten und andere Kompetenzen wie Interpretieren und Argumentieren und Begründen oft Hauptbestandteile im Lösungsprozess waren, spielte Rechnen und Operieren nur eine sekundäre Rolle. Wenn Schüler*innen diese anderen Handlungsbereiche allerdings nicht als mathematische Tätigkeiten ansehen, weil diese eventuell auch im ‚normalen' Mathematikunterricht weniger wertgeschätzt werden, kann die Antwort schnell sehr knapp ausfallen oder Schüler*innen überhaupt den Eindruck haben, sie hätten mathematisch gar nichts geleistet.

Um die Lernenden klarer erkennen zu lassen, welche unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten durchgeführt werden, braucht es gerade am Beginn des Einsatzes von Aufgaben in CME offensichtlich den Schritt, die unterschiedlichen mathematischen Tätigkeiten bewusst im Unterricht zu thematisieren und zu reflektieren. Dass Schüler*innen oft erst genauere Anhaltspunkte für ihre Überlegungen brauchen, damit ihnen bewusst wird, was sie Unterschiedliches geleistet haben, haben auch die Antworten in den Interviews gezeigt. Manchen ist erst klar geworden, welche Schritte zur Lösungsfindung notwendig waren, als konkret danach gefragt und die Aufgabenstellung noch einmal gemeinsam reflektiert wurde. Deshalb kann es sich lohnen, in solchen Unterrichtseinheiten noch einmal explizit zu überlegen: Was hat geholfen die Aufgabenstellung zu verstehen? Wie ist man zu einer Lösung gekommen? Welche Schritte waren im Lösungsprozess notwendig? Was waren die mathematischen Lernziele der Stunde?

Dies bietet die Möglichkeit für Schüler*innen, aber auch für Lehrpersonen, das eigene Bild von Mathematik und davon, was als mathematische Tätigkeiten im Unterricht wertgeschätzt wird, zu reflektieren und zu erweitern. Das könnte in weiterer Folge dazu beitragen, dass die Schüler*innen noch eher eine Verbindung zwischen gesellschaftlichen Themen und Mathematik erkennen können. Die bisherigen Rückmeldungen deuten darauf hin, dass die Schüler*innen das Erfahren solcher Zusammenhänge im Unterricht als etwas Besonderes erachten und durchaus schätzen, wie Peters Aussage, stellvertretend für viele, zeigen soll:

> I: War jetzt irgendwas Besonderes an den [Critical Mathematics Education-]Stunden?
> Peter: Ähm… Ja, auf jeden Fall mit so... ähm… Situationen, die man im echten Leben hat. Das macht man nicht so oft. Das haben wir nicht so oft in Mathe und das… das ist es eigentlich. Also, dass man sich was anschaut, was in Echt auch so ist. Das haben wir nicht so oft gemacht."

Damit zeigt sich auch, dass CME durchaus das Potenzial aufweist „Mathematik auch als spezifische Art und Weise [zu] erfahren, Dinge, die uns alle angehen oder

angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur wahrzunehmen und zu verstehen“ (Vohns, 2020, S. 23) und damit auch einen möglichen Beitrag gegen ein Scheitern mathematischer Bildung leisten kann.

[1] Standardisierter Test, der in vielen Schuldistrikten in den USA verwendet wird

[2] H1: Darstellen und Modellbilden, H2: Rechnen und Operieren, H3: Interpretieren, H4: Argumentieren und Begründen

Literatur

Andersson, A., & Barwell, R. (2021). Applying critical mathematics education: An introduction. In A. Andersson & R. Barwell (Hrsg.), *New directions in mathematics & science education: volume 35. Applying critical mathematics education* (S. 1–23). Brill Sense.

Avci, B. (2019). *Critical mathematics education: Can democratic mathematics education survive under neoliberal regime?* Brill Sense.

Bartell, T. G. (2013). Learning to teach mathematics for social justice: Negotiating social justice and mathematical goals. *Journal for Research in Mathematics Education*, *44*(1), 129–163.

Barwell, R. (2020). Mathematics and politics? Climate change in the mathematics classroom. In G. Ineson & H. Povey (Hrsg.), *Debates in Mathematics Education* (S. 197–209). Routledge.

Brantlinger, A. (2013). Between politics and equations. *American Educational Research Journal*, *50*(5), 1050–1080.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101.

Bundesministers für Unterricht und Kunst, Verordnung vom 14. November 1984 über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen, BGBl. Nr. 88/1985 (i.d.F.v. 21. Dezember 2022).

Dewey, J. (1916/1997). *Democracy and education: An introduction to the philosophy of education*. Free Press. (Erstveröffentlichung 1916)

Esmonde, I. (2014). “Nobody’s rich and nobody’s poor … It sounds good, but it’s actually not”: Affluent students learning mathematics and social justice. *Journal of the Learning Sciences*, *23*(3), 348–391.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. *Critical Social Thought Ser*. Taylor & Francis Group.

Kiger, M. E., & Varpio, L. (2020). Thematic analysis of qualitative data: AMEE Guide No. 131. *Medical teacher*, *42*(8), 846–854.

Klafki, W. (1985/2007). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik: Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik*. Beltz Verlagsgruppe. (Erstveröffentlichung 1985)

Kokka, K. (2020). Social justice pedagogy for whom? Developing privileged students’ critical mathematics consciousness. *The Urban Review*, *52*(4), 778–803.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. *Springer eBook Collection: Bd. 15*. Springer.

Vohns, A. (2017). Bildung, mathematical literacy and civic education: The (strange?) case of contemporary Austria and Germany. In A. Chronaki (Hrsg.), *Mathematics education and life at times of crisis* (S. 968–978). University of Thessaly Press.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 43*(105), 8–21.

Vohns, A. (2020, 27. Januar). *Woran scheitert mathematische Bildung? Plädoyer für einen bewussten Standpunktwechsel*. Toeplitz Kolloquium zur „Didaktik und Geschichte der Mathematik“, HCM Universität Bonn.

Voss, R., & Rickards, T. (2016). Promoting students’ self-directed learning ability through teaching mathematics for social justice. *Journal of Education and Practice, 7*(26), 77–82.

Wright, P. (2020). Transforming mathematics classroom practice through participatory action research. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 155–177.

3.
Civic Education und normative Modellierung

Michael LIEBENDÖRFER, Universität Paderborn; Lara GILDEHAUS, Universität Paderborn & Bastian VAJEN, Leibniz Universität Hannover

liebendoerfer@khdm.de; gildehaus@khdm.de; b.vajen@ipw.uni-hannover.de

Mathematik ist politisch – Ansätze interdisziplinären Lernens zum Thema Klimawandel im Mathematik- und Politikunterricht

Mathematik und Politik sind eng verbunden, auch wenn in einer oberflächlichen Betrachtung oft das Gegenteil der Fall scheint. Insbesondere werden mit mathematischen Modellierungen oft versteckte Wertungen oder scheinbar alternativlose Darstellungen verbunden, die für eine politische Urteilsbildung zuerst durch eine Reflexion der eingesetzten Mathematik zugänglich gemacht werden müssen. Wir stellen zunächst als theoretische Fundierung einen normativen Modellierungskreislauf vor, der bekannte Kreisläufe erweitert, sodass die politische Urteilsbildung miterfasst werden kann. Darauf aufbauend werden Vorschläge für den Einsatz normativer Modellierung in der Schule und in der Lehramtsausbildung an der Hochschule skizziert, die im Kontext des Klimawandels platziert sind. Ergänzend werden Einblicke in ihre empirische Erprobung gegeben. Dabei zeigt sich, dass normatives Modellieren Schülerinnen und Schüler, aber auch Lehrkräfte vor neue Herausforderungen stellt, mit Mathematik umzugehen, z. B. in politisch wertenden Diskussionen. Die im Unterricht auftretenden Irritationen erscheinen in der Nachbetrachtung geradezu notwendig, um zentrale Aspekte des Zusammenhangs von Mathematik und Politik verstehen zu können.

Es ist ein Verdienst von Andreas Vohns, die gleichermaßen tiefliegende wie fundamentale Rolle der Mathematik für Politik und für die Allgemeinbildung von Bürger:innen einer demokratischen Gesellschaft betont und wissenschaftlich ausgearbeitet zu haben. Offensichtlich bauen politische Prozesse jedenfalls dann auf Mathematik auf, wenn sie mit Hilfe von Zahlen Probleme beschreiben oder Lösungen skizzieren. So aufgefasste Mathematik mag zwar eine Rolle für die Politik spielen, aber nur die eines Werkzeugs, aus dessen Verwendung sich kein politischer Handlungs- oder Beurteilungsspielraum ergibt. Die jeweilige Mathematisierung erscheint oft als alternativlos und objektiv. Dabei ist häufig das Gegenteil der Fall. Modellierungen sind „prinzipiell hinterfragbar, sie stellen keine absoluten Autoritäten dar, sie sind nicht alternativlos“ (Lengnink et al., 2013, S. 4).

Allerdings finden sich das Hinterfragen von Modellierungen, die Erarbeitung von Alternativen und ihre vergleichende Bewertung nur selten in der Literatur zum Modellieren. Vohns (2017a) betonte: „Die Entwicklung von ‘good practice’-Beispielen zur Förderung modell- und kontextorientierter Reflexionen mit direktem Bezug zur politischen Bildung steckt noch in den Kinderschuhen. Dies gilt insbesondere für die empirische Forschung, die das tatsächliche Engagement von Schülern bei Fragen untersucht, die auf kontextorientierte Reflexion und den Transfer

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 133–148). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

von Reflexionswissen auf ähnliche Problemkontexte abzielen“ (Vohns, 2017a, S. 11, Übersetzung durch den Erstautor). Zudem fehlen auch auf theoretischer Ebene Konzepte dazu, wie diese Arbeitsschritte vorstrukturiert werden können.

Wir stellen hier sowohl die theoretische Fundierung eines *normativen Modellierungskreislaufs* vor, als auch Vorschläge und praktische Erfahrungen für den Einsatz in der Schule und in der Lehramtsausbildung an der Hochschule. In diesem Kapitel beschreiben wir basierend auf Arbeiten von Andreas Vohns, wie mathematisches Wissen als Teil der Allgemeinbildung mit Politik verbunden ist. Weiter skizzieren wir einen normativen Modellierungskreislauf, der mathematikdidaktische und politikdidaktische Theorien verbindet, und konkrete Lernumgebungen für die Schule und die Hochschule. Wir geben dann kurze Einblicke in den ersten Einsatz dieser Lernumgebungen und reflektieren ihn. Abschließend diskutieren wir Hürden und nächste Schritte auf dem Weg zu einer engeren Verzahnung von Mathematik und Politik im Sinne von Allgemeinbildung für Bürger:innen.

Die Verbindung von mathematischer und politischer Bildung

Politische Bildung agiert in einem Spannungsfeld zwischen der Aufrechterhaltung des demokratischen Systems und der Entwicklung individueller Autonomie (Massing, 2021, S. 11). Das Konzept der Mündigkeit nimmt in diesem Kontext eine verbindende Funktion ein, in deren Rahmen mündige, zur politischen Selbstbestimmung befähigte Bürger:innen zur Legitimität demokratischer Herrschaft beitragen (Lange, 2005, S. 262). Für Bildungsprozesse, die politische Mündigkeit unterstützen, nehmen daher sowohl die Befähigung zur Bildung eines eigenen Urteils und einer entsprechenden politischen Beteiligung als auch das Nachvollziehen konträrer Positionen und deren Akzeptanz eine wichtige Rolle ein (Henkenborg, 2012, S. 32 ff.). Politische Bildung fußt dementsprechend auf der Prämisse, dass objektiv richtige Lösungsansätze für gesellschaftliche Herausforderungen nicht existieren, sondern vom Standpunkt und normativen Schwerpunktsetzungen abhängig sind und erst in dialogischen Aushandlungsprozessen entstehen. Mathematik kann dabei als Werkzeug dienen, Herausforderungen zu beschreiben und zu verstehen, sowie Lösungen zu finden und zu vergleichen.

Ihre Verbindung zur politischen Bildung findet die Mathematik allerdings nicht (nur) in der Politikdidaktik, sondern auch in der Mathematikdidaktik. Vohns (2018b) wies auf die Tragweite der weithin als normatives Fundament anerkannten Grunderfahrungen nach Winter (1995, S. 37) hin und betonte dabei den genauen Wortlaut: Die erste Grunderfahrung fordere nicht einfach, dass Mathematik, die uns nützlich ist, verstanden werden soll, sondern Erscheinungen, „die uns alle angehen oder angehen sollten“. Die Mathematik solle helfen, „sie in einer spezifischen Art und Weise wahrzunehmen“. Dass uns Erscheinungen etwas angehen „sollten“, ist anknüpfend an die Grundkonzeption der politischen Bildung ein entscheidender Aspekt, der gleichsam die Entwicklung individueller und kollektiver Interessen sowie deren Ausprägung anhand gesellschaftlicher Probleme

und Konflikte beinhaltet. Es geht hier um mehr als um individuelle Nützlichkeit. Konkret kann man etwa im Kontext des Klimawandels verlangen, dass sich mündige Bürger:innen sowohl mit seiner Entstehung und seinen Folgen als auch den zu seiner Bekämpfung möglichen Entscheidungen zumindest grundlegend befassen. Hierbei sollten auch die Regeln des gesellschaftlichen Zusammenlebens infrage gestellt, neu entworfen und demokratisch legitimiert werden sowie über eigene Handlungen auch im Alltag wirken können.

Der Klimawandel sollte uns als gesellschaftliche Herausforderungen alle angehen und die Mathematik sollte uns helfen, ihn in einer spezifischen Art wahrzunehmen. Ihre Rolle ist nicht nur, beteiligte Größen zu quantifizieren oder Zusammenhänge zu beschreiben, denn solche Beschreibungen sind fast nie alternativlos.

> Da unsere Gesellschaft aber bereits weite Bereiche des Daseins mathematisiert darstellt bzw. wahrnimmt, heißt staatsbürgerliche Erziehung, diese Mathematisierungen nicht nur einfach „wahrzunehmen und zu verstehen“. Es geht auch darum, diese Mathematisierungen zu befragen. Das beinhaltet nicht nur die Frage, ob eine Mathematisierung sachadäquat erfolgt ist, sondern wie eine Mathematisierung unseren Blick auf den Gegenstand konstituiert. (Lengnink et al., 2013, S. 3)

Im Kontext des Klimawandels wird zum Beispiel CO_2 als Treibhausgas betrachtet und quantifiziert. Weitere Treibhausgase wie Lachgas und Methan werden der Einfachheit halber häufig entweder nicht berücksichtigt oder in CO_2-Äquivalente umgerechnet. Im ersten Fall werden Ursachen des Klimawandels ausgeblendet, im zweiten Fall werden kurz- und langfristige Wirkungen spezifisch gewichtet (Methan wirkt kurz, aber stark, vgl. Umweltbundesamt, 2022). Beide Varianten blenden weitere Aspekte aus, etwa, in welcher atmosphärischen Höhe die Gase ausgestoßen werden (Emissionen durch Flugzeuge sind besonders schädlich, vgl. Umweltbundesamt, 2022). Andere Quantifizierungen des Treibhausgas-Ausstoßes wären durchaus möglich. Die scheinbar neutrale, jedenfalls sachliche Darstellung des Problems beinhaltet Fokussierungen und Gewichtungen, die in der weiteren Debatte oft unhinterfragt bleiben. So bestimmt eine spezifische Mathematisierung für viele Beteiligte, was im eigentlichen Wortsinn „denkbar“ ist.

An Mündigkeit orientierte Bildung muss also mehr umfassen als mathematische Begriffe und Rechentechniken. Die Rechnungen selbst werden Laien ohnehin den Expert:innen überlassen, schon allein, weil diese einen Vorsprung an Information haben (Vohns, 2018b). Aber in dieser asymmetrischen Situation sollen keinesfalls die Expert:innen alleine entscheiden. Stattdessen sollen sich „politisch mündige Bürger(innen) [...] ein reflektiertes Urteil über Sachverhalte bilden, die auf fachlichem Expert(inn)enhandeln beruhen, welches sie selbst im weit überwiegenden Teil aller Fälle nicht im Einzelnen nachvollziehen oder selbst ausführen könnten“ (Vohns, 2018b, S. 209 f.). Das erfordert spezifische Fähigkeiten. Vohns

(2018b) betont die Gliederung notwendigen Wissens in drei Bereiche nach Fischer: „erstens *Grundkenntnisse* (Konzepte, Begriffe, Darstellungsformen) und -*fertigkeiten*, zweitens mehr oder weniger kreatives *Operieren* damit im Bereich der Anwendung (Problemlösen) oder zur Generierung neuen Wissens (Forschen), und drittens *Reflexion* (Was ist die Bedeutung der Begriffe und Methoden, was leisten sie, wo sind ihre Grenzen?)“ (Fischer, 2001, S. 154). Bürger:innen werden sich vor allem mit dem ersten und dritten Bereich auseinandersetzen, der zweite Bereich wird überwiegend Expert:innen überlassen bleiben.

Beim dritten Bereich präzisierte Vohns, dass es nicht nur um das exemplarische Erleben einzelner Handlungssituationen gehen kann: Mithilfe solcher Situationen müsse es darum gehen, „nach *spezifischem Wissen* Ausschau zu halten, das über solche Erfahrungssituationen hinausweist und relevant für die Urteils- und Entscheidungssituationen im Bereich des privaten und öffentlichen Lebens erscheint“ (Vohns, 2018b, S. 211). Zu solchem Wissen könnte anfangs schon zählen, dass Modelle nicht alternativlos sind. Auch könnte dazu zählen, dass Alternativen oft bei Vereinfachungen wie der Auswahl relevanter Aspekte (oft über die Einführung von Variablen) oder der Beschreibung von Beziehungen (oft abgebildet als funktionale Zusammenhänge) mit Hilfe mathematischer Mittel erkennbar werden.

Wissen allein ist hier allerdings zu wenig, denn es geht um Handlungsbereitschaft. Dementsprechend fordern Lengnink et al. (2013) insbesondere, dass Schüler:innen die Möglichkeit bekommen sollen,

- „eine Haltung zu entwickeln, dass mathematische Modellierungen – auch von ihnen selbst – prinzipiell durchschaubar sind,
- die Adäquatheit von gewählten mathematischen Modellen für die zu beschreibenden realen Phänomene zu befragen“ (Lengnink et al., 2013, S. 6).

Normatives Modellieren als Verbindung zur politischen Bildung

Mathematisches Modellieren ist in der Schule fest verankert (Bildungsstandards, 2015) und im Lehramtsstudium explizit oder über die angewandte Mathematik verortet. Relativ offen ist aber die Art der betrachteten Modellierungen. Wir fokussieren den Fall, dass Modelle dazu gebraucht werden, Werturteile zu finden. Wir sprechen dann von *normativem Modellieren*. (Damit klammern wir den spannenden Fall aus, dass Werturteile auch bei anderem Modellieren bewusst oder unbewusst entstehen.) Normatives Modellieren kann auf explizit urteilenden Modellen basieren. Etwa beschreibt ein Steuermodell das Urteil, welche Steuerlast als angemessen angesehen wird (vgl. Vohns 2017b). Ähnlich drücken Armutsindikatoren (Vohns 2017a) eine Wertung aus. Auch deskriptive Modelle können für die Urteilsbildung genutzt werden, etwa der Body-Mass-Index. Er wird dann normativ gebraucht, wenn Werte auf diesem Index als (nicht) erstrebenswert angesehen werden (Niss, 2015). Als „normativ“ beschreiben wir daher nicht ein Modell,

sondern eine Modellierung. Wir wollen damit betonen, dass häufig nicht das Modell selbst, sondern sein Gebrauch werturteilsbildend ist (vgl. Niss, 2015).

Im Unterricht und in den entsprechenden Lehrveranstaltungen an Hochschulen wird nur selten das dargestellte Potential der Modellierungen angesprochen, Politisches im Prozess sichtbar zu machen (Pohlkamp, 2022; Vajen et al., 2021). Die üblicherweise verwendeten Modellierungen sind nicht normativ, sondern deskriptiv. Gängige Aufgabenbeispiele beziehen sich allenfalls auf maximal zwei unterschiedliche reale Modelle, die überwiegend deskriptiv sind und welche dann in ihrer Zweckmäßigkeit verglichen werden (Besser et al., 2020).

Das mag auch damit zu tun haben, dass normatives Modellieren den Lehrkräften über das gewöhnliche Modellieren hinaus anspruchsvolle Aufgaben überträgt. Hier kann die Mathematikdidaktik von einer interdisziplinären Öffnung zur Politikdidaktik profitieren. Es liegt (auch) in deren Feld, wenn Lehrkräfte Prozesse der Urteilsbildung anregen und moderieren sollen. Für die Entwicklung und überhaupt Definition einer kritischen Haltung oder abwägenden Werturteilsbildung liegen dort wertvolle Perspektiven und Erkenntnisse vor.

Modellierungskreisläufe

Schon das gewöhnliche Modellieren im Unterricht profitiert erheblich von Modellierungskreisläufen als Prozessmodellen (z. B. Blum & Leiß, 2005). Sie dienen als Hilfsmittel für Lehrende oder auch Lernende im Prozess der Modellierung sowie als Diagnoseinstrument und Grundlage für empirische Studien (Greefrath et al., 2013; Kaiser et al., 2015). Allerdings fehlt die Erfassung der Teilprozesse für normatives Modellieren, die sich auf die Bewertung von Modellen beziehen.

Zwar findet sich die Reflexion unterschiedlicher Annahmen und ihrer Bedeutung für das Ergebnis z. B. bei Blum und Leiß (2005) in Teilen wieder, insbesondere im Schritt des Validierens. Dieser bezieht jedoch eine mögliche politische Dimension nicht explizit ein. Manchmal kann das Validieren für normative Modellierungen sogar unpassend oder kontraproduktiv sein, wenn dadurch die Vorstellung genau einer richtigen, also alternativlosen Lösung gefördert wird. Beim normativen Modellieren spielt außerdem die vergleichende Betrachtung verschiedener Modelle für dieselbe Realsituation eine wichtige Rolle, die in üblichen Modellierungskreisläufen nicht abgebildet ist. Niss vermutet dementsprechend, „dass die Teilschritte des Modellierungskreislaufs möglicherweise nicht geeignet sind, die Vorgänge bei der Bewertung von Modellen [...] vollständig zu erfassen. Stattdessen wird die Meta-Validierung entscheidend.“ (Niss, 2015, S. 76, Übersetzung durch den Erst-Autor). Diese Meta-Validierung, die den Blick über das einzelne Modell hinaus richtet, wollen wir praxisnah strukturieren.

Ein normativer Modellierungskreislauf

Für einen Modellierungskreislauf, der auch normativen Modellierungen gerecht werden soll, schlagen wir weitere Schritte vor: eine politische Analyse der Situation (zusätzlich zur mathematischen Analyse), die Diskussion der politischen Möglichkeiten und eine kritische Urteilsbildung. Aus politikdidaktischer Perspektive wird die Urteilsfähigkeit nicht als alleinstehende Kompetenz betrachtet, sondern ist in den fachdidaktischen „Dreiklang" der politischen Analyse-, Urteils-, und Handlungskompetenz eingebunden (Henkenborg 2012, 32 ff.). Entsprechend ist die analytische Durchdringung gesellschaftlich und politisch relevanter Sachverhalte und Strukturen notwendig für ein fundiertes Urteil, welches die Basis des politischen Handelns demokratischer Bürger:innen bildet. Gerade vor dem Hintergrund gesellschaftlicher Mathematisierungsprozesse (Skovsmose, 2020, S. 606) erhalten mathematische Modelle und deren politisch-gesellschaftliche Verwendung auch für die politische Bildung eine hohe Relevanz, weshalb sie im Rahmen des normativen Modellierungskreislaufes als sachzugehöriger Aspekt Teil des Urteilsprozesses werden. Gleichzeitig sollten, an die beiden politikdidaktischen Dimensionen Sachurteil und Werturteil anknüpfend, mathematische Ergebnisse nicht allein als scheinbar sachlich richtige Kriterien in die sachliche Urteilsbegründung einfließen, sondern mit relevanten Wertmaßstäben in Verbindung gebracht und die Präskriptivität der Ergebnisse kritisch reflektiert werden. Dies bedeutet auch, das positivistische Moment einer Beschreibung des Ist-Zustandes zu überwinden und nach den Gründen für aktuelle Strukturen, nach ihrer normativen Bewertung und nach den grundsätzlichen Möglichkeiten ihrer Veränderung zu fragen (Nonnenmacher, 2015, S. 463 f.).

Konkretisiert und integriert man diese Ansätze in den Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005), kann ein erweiterter, normativer Modellierungskreislauf wie folgt beschrieben und reflektiert werden (vgl. Abbildung 1): Verstehen/Konstruieren (1.) beinhaltet zunächst keine bewussten Schritte, sondern deutet darauf hin, dass wir bei der normativen Modellierung möglicherweise unterschiedliche Vorstellungen von der Realität miteinander in Einklang bringen müssen. Die Vereinfachung hin zu einem realen Modell (2.) klärt, welche Teile des Situationsmodells überhaupt einbezogen werden, welche Annahmen getroffen werden und wie bestimmte Zusammenhänge vereinfacht werden. Sie bestimmt wesentlich das Ergebnis. Daher sollten hier Annahmen explizit gemacht und reflektiert werden, um gegebenenfalls Alternativen zu berücksichtigen, ihre Konsequenzen für das Modell abzuschätzen und diese jeweils hinsichtlich politischer Interessen zu reflektieren. Die Mathematisierung (3.) ist an sich ein technischer Schritt, sofern das reale Modell genau genug spezifiziert ist. In der Praxis wird das reale Modell jedoch auch oft in diesem Schritt noch konkreter spezifiziert, so dass auch hier Vereinfachungen und Annahmen, ähnlich wie in (2.), zu erwarten sind, die entsprechend berücksichtigt werden sollten. Beim nächsten Schritt des mathematischen Arbeitens (4.) gibt es kaum eine politische Dimension. Zwar sind

auch hier Handlungsalternativen vorhanden (z. B. algebraische oder numerische Lösung), doch sind die Unterschiede kaum relevant. Auch die Interpretation (5.) sollte eher ein technischer Schritt sein, da es zunächst nur um die Übersetzung von beispielsweise mathematischen Variablen oder Funktionen in die Realität geht. Allerdings könnten in diesem Schritt Verallgemeinerungen vorgenommen werden, z. B. in Bezug auf Modellannahmen oder Einschränkungen der Variablenbereiche, die zu reflektieren sind. Im Anschluss erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse. Dabei unterscheiden wir Einzelschritte: Mögliche Maßnahmen können nie das direkte Resultat einer mathematischen Berechnung sein, sie müssen diskutiert werden. In Schritt 7 beschreiben wir daher das Erstellen einer „Landkarte der Möglichkeiten“ als das Skizzieren und Diskutieren verschiedener Szenarien, wobei die unterschiedlichen Implikationen in Bezug auf die Interessen der Beteiligten durch die Reflexion und Kritik der Modellierung zur Kenntnis zu nehmen sind. Auf dieser Grundlage kann eine kritische Urteilsbildung (8.) erfolgen, welche unter der Abwägung von Interessen zu einem bewertenden Schluss kommt. Schließlich kann weiterführend diskutiert werden, dass unsere Entscheidung Auswirkungen auf die Welt haben könnte, wie wir sie in diesem Moment annehmen (bezogen auf unser Situationsmodell; 9.) und wie sie ist (Realität; 10.).

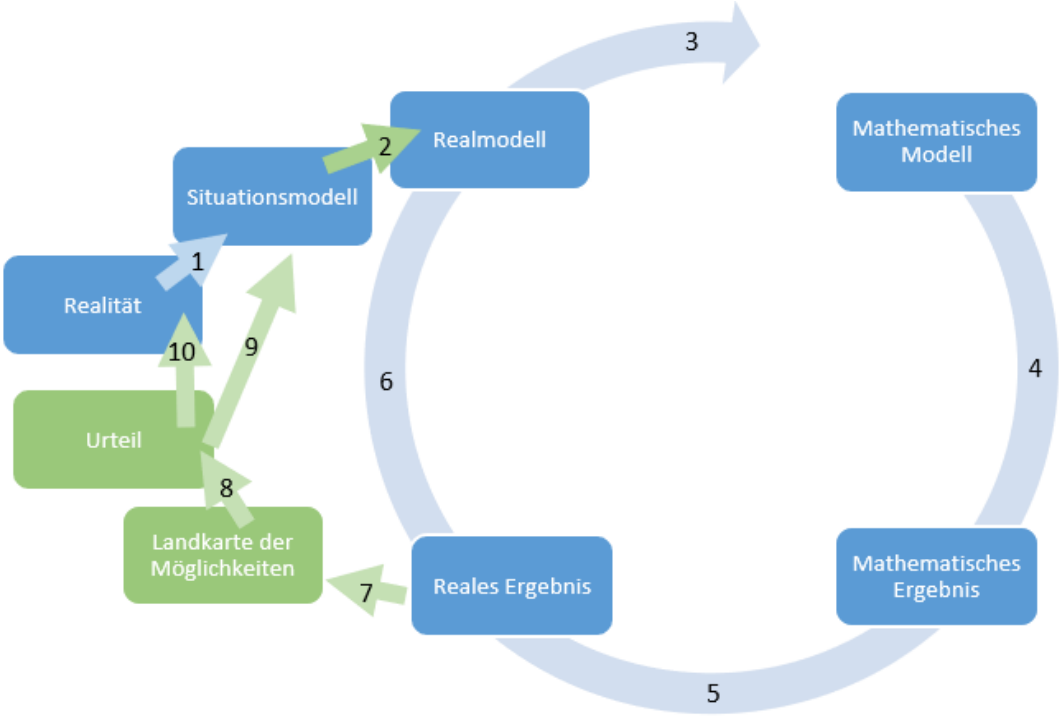


Abbildung 1: Normativer Modellierungskreislauf

Lernumgebungen zum normativen Modellieren

Wir reißen drei Praxisvorschläge an, die im Schulunterricht im Umfang von ein bis drei Doppelstunden (90 min) erprobt wurden. Um das Reflexionswissen (Fischer, 2001) fokussieren zu können, sollten die Lernumgebungen nur geringe ma-

thematische Kenntnisse verlangen. Ein starker Lebensweltbezug sollte die Schüler:innen dabei unterstützen, Modelle und ihre Bedeutung kritisch zu reflektieren. Wir haben hier den Klimawandel gewählt, der alle etwas angehen sollte.

Unsere Darstellung ist sehr knapp, es geht uns hier nur um die Verdeutlichung, wie die normativen Aspekte einer Modellierung im Unterricht aussehen können. Eine vollständige Darstellung der entwickelten Lernumgebung inklusive der Arbeitsmaterialien für die Sekundarstufe I findet sich in Gildehaus et al. (in Begutachtung) und auf der Homepage des zugehörigen Projektes (www.civimatics.eu).

Bei unseren Erprobungen stand die Machbarkeit im Fokus, sodass es kaum Begleitforschung gab. Wir haben Interviews mit den Lehrkräften sowie einigen Schüler:innen durchgeführt. Zudem wurden die Bearbeitungen der Schüler:innen und Studierenden betrachtet und in einer 10. Klasse Prä- und Postkonzepte von den Schüler:innen zur Rolle von Mathematik für die Politik erhoben.

Schulische Lernumgebung im Kontext CO_2-Ausstoß von Lebensmitteln

CO_2-Emissionen von unterschiedlichen Lebensmitteln sind für Schüler:innen alltagsnah und greifbar. Ausgehend von immer wieder auftretenden Diskussionen um eine Fleischsteuer oder vegetarisches Essen auch in Schulkantinen lässt sich gut die Frage motivieren, wie man mathematisch ausdrücken kann, wie klimaschädlich ein bestimmtes Lebensmittel ist.

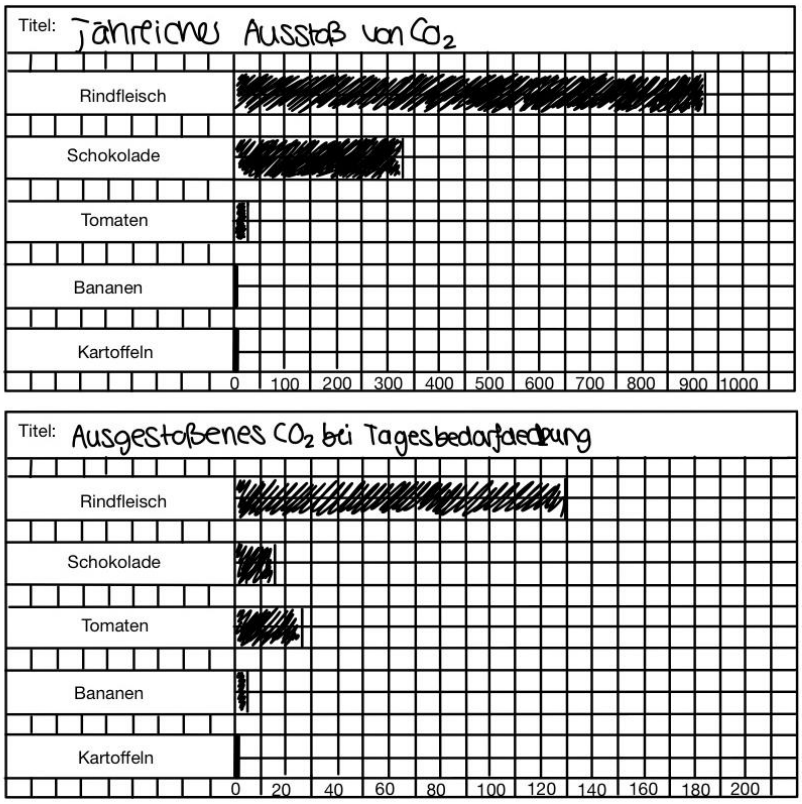


Abbildung 2: Schüler:innenbearbeitung zum CO_2-Ausstoß bezogen auf den Jahresverbrauch eines Lebensmittels (oben) und 2000 Kilokalorien (unten).

Die Zusammenführung verschiedener Klimagase und Emissionsquellen (Produktion, Transport, Landnutzung) haben wir von Expert:innen übernommen (Ritchie & Roser, 2022). Der Fokus der Lernumgebung liegt auf dem Bezug zur Menge der Lebensmittel und der Frage, wie man diese ausdrückt. Naheliegend ist das Gewicht eines Lebensmittels, denn viele Lebensmittel werden nach Gewicht gehandelt. Man könnte allerdings auch auf den Primärzweck von Ernährung als Kalorienaufnahme abstellen und die Menge eines Lebensmittels über seinen Brennwert quantifizieren. Beide Ansätze müssen sich die Kritik gefallen lassen, dass am Ende Lebensmittel im Fokus stehen könnten, die zwar umweltschädlich sind, aber letztlich unbedeutend, weil sie kaum konsumiert werden. Das motiviert die Bemessung von Lebensmitteln anhand des jährlichen pro-Kopf-Konsums. In unserer Lernumgebung, die eine Doppelstunde umfasst, sollen dementsprechend die Schüler:innen drei verschiedene Modelle betrachten, die die Menge ausgewählter Lebensmittel auf das Gewicht (1 kg), den täglichen Brennwertbedarf von Erwachsenen (2000 Kilokalorien) oder den pro-Kopf-Jahresverbrauch beziehen. Dabei resultieren unterschiedliche Reihungen der Lebensmittel, vgl. Abbildung 2.

Die anschließende Diskussion verlangt zunächst die Reflektion der Erstellung des Realmodells und führt anschließend zur Werturteilsbildung auf Basis einer Landkarte der Möglichkeiten. Dieser letzte Schritt kann viele Aspekte umfassen, wenn innerhalb der Lerngruppe beispielsweise weitere Argumente diskutiert und modelliert werden, etwa Tierwohl, gesunde Ernährung oder politische Maßnahmen wie eine Fleischsteuer (siehe beispielhaft Abbildung 3). Auch kann reflektiert werden, welche Modellierung bestimmte Interessensgruppen bevorzugen würden.

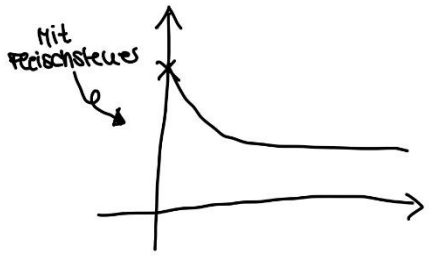


Abbildung 3: Schüler:innenbearbeitung zur hypothetischen Wirkung einer Fleischsteuer.

Diese Lernumgebung wurde in drei Klassen der Stufen 7, 9 und 10 an Gymnasien in drei verschiedenen Bundesländern erprobt. Die Lehrkräfte, aber nicht die Schüler:innen hatten den normativen Modellierungskreislauf zur Unterstützung an die Hand bekommen. Teils waren weitere Aspekte wie die Fleischsteuer durch Materialien oder Lehrkräfte benannt worden.

Das Gesamtfazit von den Lehrkräften und Schüler:innen nach der Erprobung fiel durchweg positiv aus. Die Thematik wurde von den Schüler:innen als sehr lebensweltnah wahrgenommen und die Lehrkräfte beschrieben eine aktive Partizipation der Schüler:innen. Von den Schüler:innen wurden vor allem die gezielte Diskussion konkreter, selbst berechneter Ergebnisse als positiv hervorgehoben, weil sie diese als nachvollziehbarer und fundierter empfanden. Insgesamt gelang es in den

Abschlussdiskussionen gut, sowohl mathematische als auch politische Perspektiven mit einzubeziehen. Die Lehrkräfte beschrieben dabei ein verändertes Partizipationsmuster innerhalb der Lerngruppen, bei dem sonst eher stillere Schüler:innen im Mathematikunterricht sich wesentlich reger beteiligten. Lediglich in der 7. Klasse zeigten sich Schwierigkeiten, eine zielführende Diskussion im Plenum zu moderieren, da es den Schüler:innen schwer fiel, Argumentationsebenen zu trennen, was in dieser Klassenstufe nachvollziehbar erscheint.

Die in der Klasse 10 vor der Unterrichtsstunde zum normativen Modellieren erhobenen Präkonzepte über die Verbindungen von Politik und Mathematik, bei der vor allem deskriptive Modelle wie die Berechnung des Staatshaushalts oder Darstellung von Wahlergebnissen dominierten, wiesen im Rahmen einer Postbefragung eine stärkere Differenzierung auf. So wurden von den Schüler:innen unter anderem die Beratung bei der Erstellung von Modellen und Statistiken und die politische Entscheidungsfindung genannt und die Relevanz von Annahmen zur mathematischen Modellierung als ein Einflussfaktor explizit hervorgehoben.

Allerdings äußerten einige Schüler:innen auch Verwunderung gegenüber der „ungewohnten Mathematikstunde“, in der deutlich weniger geübt und viel mehr als sonst diskutiert wurde. Für die Lehrkräfte war insbesondere diese offene Diskussion eine Herausforderung. Sie beschrieben Unsicherheiten im Umgang mit möglichen Meinungsäußerungen und fehlenden Grenzen für die Diskussion. Auch das Dokumentieren der Diskussionsergebnisse beschrieben sie als ungewohnt.

Schulische Lernumgebung im Kontext Elektromobilität

Eine weitere praktische Umsetzung fokussiert das Thema Elektromobilität und wurde im Politikunterricht der 11. Klasse an einer Gesamtschule erprobt. Ziel der drei Doppelstunden einnehmenden Unterrichtsreihe war es, die Analyse- und Urteilsfähigkeit von Schüler:innen hinsichtlich der Verwendung von mathematischen Ergebnissen zur Begründung politischer Entscheidungen zu schulen. Die Unterrichtsreihe orientierte sich am normativen Modellierungskreislauf und startete, um den Lernprozess lebensweltnäher zu strukturieren, im Rahmen der ersten Doppelstunde mit der „Landkarte der Möglichkeiten“ (7.). Die Schüler:innen sollten die Subvention der Elektromobilität hinsichtlich ihrer Zweckmäßigkeit bezüglich der Einsparung von Treibhausgasen beurteilen. Sie wurden hierzu in Gruppen eingeteilt und erhielten neben Information über die Kriterien der Bewertung von Fahrzeugen hinsichtlich ihrer Klimaschädlichkeit jeweils zwei unterschiedliche Studien. Die eine Studie (Buchal et al., 2019) bescheinigte modernen Dieselfahrzeugen einen geringeren Treibhausgasausstoß als Elektrofahrzeugen, die andere (Hoesktra & Steinbuch, 2020) kam zum gegenteiligen Ergebnis. Die abschließenden Stellungnahmen im Plenum kamen so zu unterschiedlichen Urteilen hinsichtlich der Subventionierung der Elektromobilität, was als Ausgangspunkt für die nächste Doppelstunde genutzt wurde. Hier wurden ausgehend von den unter-

schiedlichen Ergebnissen der Modellierungsprozess und die Ergebnisse der Studien nachvollzogen (3.-5.). Zunächst sollten die Schüler:innen die Studien auf mathematische Fehler prüfen (4.), die jedoch nicht vorlagen, und die der Mathematisierung zu Grunde liegenden Annahmen vergleichen. Nachdem letztere als zentraler Unterschied ausgemacht wurden, erhielten die Schüler:innen weitere Informationen zu den entsprechenden Themengebieten wie den Herstellungsprozessen von Autos und Kraftstoffen sowie der für die Messung des Verbrauchs eingesetzten Prüfzyklen. Erneut prüften die Schüler:innen in neu eingeteilten Gruppen die Studien, diesmal jedoch mit besonderem Blick auf den Mathematisierungsprozess (2., 3.). Die Ergebnisse wurden dann im Rahmen eines Gruppenpuzzles zusammengetragen und der Modellierungsprozess (3.-6.) in seiner Gänze erneut nachvollzogen und beurteilt. Anschließend gaben die Schülerinnen auf Basis ihrer Ergebnisse sowohl eine Einschätzung hinsichtlich der Angemessenheit des Modells (2., 3.) als auch bezüglich der politischen Entscheidung einer Förderung der Elektromobilität (7., 8.) ab, die bei letzteren sowohl Bezug auf die Ergebnisse der Studien als auch relevante Wertmaßstäbe nahm. Wichtig war es auch herauszustellen, dass die Annahmen der beiden Studien nicht grundsätzlich falsch waren und vom jeweiligen Standpunkt aus unterschiedlich bewertet werden können. Beispielsweise gingen die Studien von unterschiedlichen Prognosen zum zukünftigen Strommix aus. Einschätzungen hinsichtlich der Plausibilität der einen oder anderen Annahme sind nicht kontextunabhängig möglich; eine Einschätzung wäre im Herbst 2022 unter Einwirkung des Ukraine-Kriegs wohl anders als im Jahr zuvor ausgefallen.

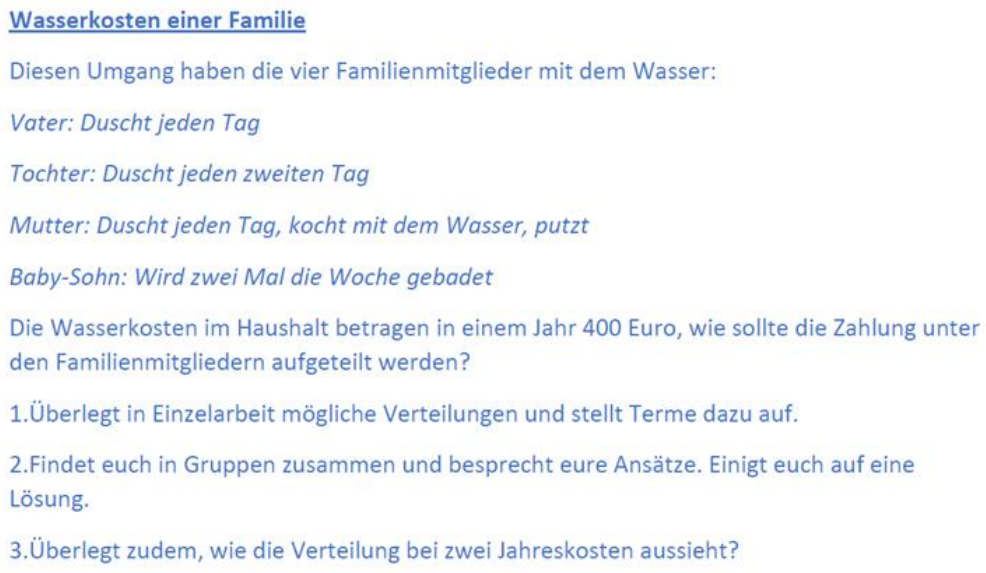
Bei der Erprobung war es für die Schüler:innen ungewohnt, im Politikunterricht rechnen zu müssen. Viele fanden dies jedoch eher motivierend, da die Gründe für die unterschiedlichen Ergebnisse erschlossen werden wollten und die mathematischen Rechenschritte eher auf Kenntnisse der Mittelstufe zurückgegriffen. Einige Schüler:innen zeigten sich hiervon jedoch abgeschreckt und konnten entsprechend durch die Aufgaben nicht aktiviert werden. Die häufig durchgeführten Ergebnissicherungen, sei es in der Gruppe, im Plenum oder zwischen den Gruppen, waren daher vor allem im Anschluss an die mathematische Prüfung zwar notwendig, um alle Schüler:innen auf denselben Kenntnisstand zu bringen, für stärkere Schüler:innen jedoch eher unnötig repetitiv. Grundsätzlich wurden jedoch der Gegenstand der Reihe und die Verbindung von Mathematik und Politikunterricht als motivierend eingestuft, da „es ein Thema war, das uns betrifft (...) nicht wie mit der Hypotenuse zum Beispiel“. Als Lerneffekt berichteten die Schüler:innen, dass Ihnen der Effekt von Zahlen als „Argumentationshilfen für Politik“ stärker bewusst geworden sei, diese jedoch einer stetigen Prüfung und Reflexion bedürfen, da „Berechnungen für politisches Handeln wichtig sein können“, die „Realität aber anders verlaufen kann“. Dennoch beinhaltete die Unterrichtsreihe auch eine gewisse Gratwanderung, die erst durch die Erprobung transparent wurde. Durch die Prüfung der Studien und der mit ihnen verbundenen Annahmen, wurde die

Autorität wissenschaftlicher Studien in Teilen in Frage gestellt, was als grundsätzliche Wissenschaftsskepsis geäußert werden kann. Diese Infragestellung bleibt dann produktiv, wenn Schüler:innen sie als Anlass einer genaueren Prüfung nehmen, beispielsweise der im Rahmen der mathematischen Modellierung getätigten Annahmen. Sie wird jedoch problematisch, wenn sich ein Bild der Beliebigkeit wissenschaftlicher Ergebnisse oder eine Überforderung mit entsprechenden Studien verfestigt. Gerade einige Schüler:innen, die sich nicht durchgängig am Arbeitsprozess beteiligten oder bei einigen Schritten Verständnisschwierigkeiten aufwiesen, schienen eher zu entsprechenden Einschätzungen zu kommen.

Normatives Modellieren in der Lehramtsausbildung an der Hochschule

Die Materialien wurden abgewandelt auch in der Lehramtsausbildung Mathematik für das Haupt-, Real- und Gesamtschullehramt sowie das Grundschullehramt eingesetzt. Die Erprobung im ersten Kontext erfolgte zum Ende des ersten Semesters. Nach einer kurzen Einführung in das Modellieren haben die Studierenden eigenständig normative Modellierungen durchgeführt, entweder zu einem eigens gewählten Thema oder zum CO_2-Ausstoß von Lebensmitteln oder Elektromobilität. Der normative Modellierungskreislauf lag den Studierenden dabei unterstützend vor und regte insbesondere zum Reflektieren an. Zu jeder entwickelten Fragestellung wurden von den Studierenden unterschiedliche Modellierungen vorgenommen, hinter deren Annahmen und Ergebnissen unterschiedliche Interessen stehen sollten und die letztlich unterschiedliche Maßnahmen stützten.

Die Erprobung im zweiten Kontext beinhaltete ebenfalls eine kurze in diesem Fall schriftliche Einführung in das normative Modellieren. Dazu wurde die Verteilung von Müllgebühren auf ein Mehrfamilienhaus als Beispiel dargestellt (Marxer et al., 2011). Darauf aufbauend entwickelten die angehenden Grundschullehrkräfte eine eigene normative Modellierungsaufgabe für den Einsatz im Unterricht.


Wasserkosten einer Familie

Diesen Umgang haben die vier Familienmitglieder mit dem Wasser:

Vater: Duscht jeden Tag

Tochter: Duscht jeden zweiten Tag

Mutter: Duscht jeden Tag, kocht mit dem Wasser, putzt

Baby-Sohn: Wird zwei Mal die Woche gebadet

Die Wasserkosten im Haushalt betragen in einem Jahr 400 Euro, wie sollte die Zahlung unter den Familienmitgliedern aufgeteilt werden?

1.Überlegt in Einzelarbeit mögliche Verteilungen und stellt Terme dazu auf.

2.Findet euch in Gruppen zusammen und besprecht eure Ansätze. Einigt euch auf eine Lösung.

3.Überlegt zudem, wie die Verteilung bei zwei Jahreskosten aussieht?

Abbildung 4: Studierendenbearbeitung zum Entwurf einer normativen Modellierungsaufgabe

Die Lehramtsstudierenden haben in beiden Settings engagiert modelliert. Obwohl die erste Erarbeitung in den Übungen, also mit möglicher Unterstützung durch Tutor:innen durchgeführt wurden, fiel es allen Studierenden schwer, substantielle Mathematik in den Modellen zu nutzen. Keine Bearbeitung ging über das Rechnen mit proportionalen Zusammenhängen hinaus. Bei den von angehenden Grundschullehrkräften erstellten Aufgaben zeigten sich Schwierigkeiten mit der Offenheit normativer Modellierungsaufgaben. Obgleich unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten und die damit einhergehende Offenheit im Unterrichtsverlauf explizit gefordert wurden, formulierten die Studierenden oft eingekleidete Aufgaben, die einen eindeutigen Lösungsvorschlag zum Ziel hatten. Sie waren oft so unauthentisch, dass eine kritische Urteilsbildung damit nicht gefördert werden kann, wie sich beispielsweise im Vorschlag in Abbildung 4 zeigt. Etwa stellt sich dort sofort die Frage, warum eine Familie Wasserkosten aufteilen soll. Zudem führen normative Modellierungen eher in Kontexte, die eine weitere politische Diskussion verlangen. Etwa will man die auftauchenden Rollenstereotypen kaum undiskutiert lassen. Studierende zeigten sich in beiden Kontexten zwar in der Lage, normative Modellierungen anhand von Vorlagen durch Analogiebildung zu imitieren, konnten aber nur anhand des normativen Modellierungskreislaufs und einer eher kurzen Einführung kaum sinnvolle eigene Aufgaben entwickeln.

Diskussion

Mathematik und Politik hängen eng zusammen. Unser Beitrag skizziert den Versuch, diese Verbindung durch normatives Modellieren konzeptionell und exemplarisch in Unterricht und Lehrkraftausbildung sichtbar zu machen. Auf der theoretischen Ebene lassen sich beide Disziplinen gut verbinden. Auch lassen sich lebensnahe Kontexte für Lehreinheiten finden. Die ersten empirischen Einblicke verweisen aber auf Herausforderungen in der Praxis.

Die beschriebenen Partizipationsmuster deuten darauf hin, dass das interdisziplinäre Setting implizite Normen des Mathematikunterrichts aufbrechen kann und damit Partizipationsmöglichkeiten für ansonsten kaum Beteiligte schaffen kann. Andererseits zeigte sich im Politikunterricht, dass der mathematische Anspruch der Lernumgebungen auch Schüler:innen an der Teilnahme hindern kann.

Obgleich die Lernumgebungen sehr positiv angenommen und evaluiert wurden, zeigte sich auch, dass ein Hinterfragen und Reflektieren bestehender Modellierungen das Vertrauen in bekannte Maße und Modelle bis hin zur allgemeinen Wissenschaftsskepsis verringern kann. Diese Skepsis gehört im Kern zum Bildungsziel. Allerdings sollen gerade politische Bildungsprozesse die Schüler:innen in die Lage versetzen, komplexe gesellschaftliche Probleme und Konflikte differenziert wahrzunehmen und auf Basis eigenständiger Sach- und Werturteile politische Handlungsfähigkeit zu entwickeln. Sie kommen dabei um eine interdisziplinäre Perspektive und problemaufschließende Fragestellungen nicht herum (Nonnenmacher, 2014, S. 462). Eine pauschale Ablehnung von Wissenschaft

wird diesem Ziel nicht gerecht. Normatives Modellieren muss daher den Umgang mit Heterogenität besonders berücksichtigen. Wir können hier keine einfache Lösung anbieten, wollen aber diesen Punkt für die zukünftige Forschung betonen.

Zudem konnten die von uns gewählten Beispiele Nahrungsmittelkonsum und Elektromobilität zwar die Verschränkung von Mathematik und Politik verdeutlichen, boten jedoch überwiegend eine individualisierte und lokalisierte Perspektive auf das Thema. Anderen Aspekten wie der Notwendigkeit kollektiver Lösungen, sich verstärkende Ungleichheiten oder systemische Problemfelder konnten wir angesichts der ohnehin schon komplexen normativen Modellierungen in der Stundenkonzeption kaum Raum geben. Insbesondere könnte mit den Fragestellungen im Unterricht eine Vorstellung aufgebaut werden, der Klimawandel sei vor allem ein individuell lösbares Problem. Insofern war es hilfreich, lebensfernere, weil kollektive Ansätze wie eine Fleischsteuer zumindest knapp zu thematisieren, auch wenn hier keine konkreten Modelle ausgearbeitet werden konnten.

Außerdem sollte man die Rolle der beteiligten Fachkulturen beachten. Wie jeder interdisziplinäre Unterricht verlangt das normative Modellieren, dass Wissen und typische Vorgehensweisen der beteiligten Fächer integriert werden. Politiklehrkräfte benötigen einen Zugang zur Mathematik, Mathematiklehrkräfte benötigen Kompetenzen für den Umgang mit Diskussionen und nicht eindeutigen Lösungen ihrer Arbeitsaufträge. Es erscheint zudem bemerkenswert, wie unsicher und auch wenig im Austausch befindlich sich die hier interviewten Lehrkräfte gegenüber den jeweils anderen Fächern äußerten.

Den eingangs aufgefächerten Ansprüchen an die Mathematik hinsichtlich ihrer Rolle für die Allgemeinbildung von Bürger:innen einer Demokratie wird die Umsetzung so derzeit noch nicht gerecht. Die vorgestellten Ansätze können nur als Auftakt für eine intensivere Verbindung von Mathematikdidaktik und Politikdidaktik verstanden werden.

Literatur

Besser, M., Kleickmann, T., & Vergin, J. (2020). Fachdidaktische Bewertung von Unterrichtsqualität am Beispiel mathematischen Modellierens. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020* (S.121–124). WTM.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren, 128*, 18–21.

Buchal, C., Karl, H.-D., & Sinn, H.-W. (2019). Kohlemotoren, Windmotoren und Dieselmotoren: Was zeigt die CO2-Bilanz? *ifo Schnelldienst, 72*(8), 40–54.

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer-Buck, K.-H. Schäfer & D. Zöllner (Hrsg.), *Situation: Ursprung der Bildung* (S. 151–161). Universitätsverlag.

Gildehaus, L., Liebendörfer, M., Hüsing, S., Gottschalk, R., & Strauß, F. (in Begutachtung). Normatives Modellieren im Kontext des Klimawandels: Interdisziplinäre Perspektiven. In M. Besser, M. Hagena, J. Krawitz & N. Tropper (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren in der Praxis: Lernumgebungen für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht in den Sekundarstufen.* Springer.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches Modellieren: Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In R. Borromeo Ferri, G. Greefrath & G. Kaiser (Hrsg.), *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule* (S. 11–38). Springer.

Henkenborg, P. (2012). Politische Urteilsfähigkeit als politische Kompetenz in der Demokratie: der Dreiklang von Analysieren, Urteilen Handeln. *Zeitschrift für Didaktik der Gesellschaftswissenschaften, 3*(2), 28–50.

Hoekstra, A., & Steinbuch, M. (2020). *Vergleich der lebenslangen Treibhausgasemissionen Elektroautos mit den Emissionen von Fahrzeugen mit Benzin- oder Dieselmotoren*. Eindhoven University of Technology.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Greefrath, G. (2015). Anwendungen und Modellieren. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 357–383). Springer.

Lange, D. (2005). Was ist und wie entsteht Demokratiebewusstsein? Vorüberlegungen zu einer politischen Lerntheorie. In G. Himmelmann & D. Lange (Hrsg.), *Demokratiekompetenz: Beiträge aus Politikwissenschaft, Pädagogik und politischer Bildung*. Verlag für Sozialwissenschaften.

Lengnink, K., Meyerhöfer, W., & Vohns, A. (2013). Mathematische Bildung als staatsbürgerliche Erziehung? *Der Mathematikunterricht, 59(*4), 2–7.

Marxer, M., Prediger, S., & Schnell, S. (2011). Wie verteilen wir die Müllgebühren? Bildungswirksame Erfahrungen beim Entwickeln und Diskutieren normativer Modellierungen. *Praxis der Mathematik, 52*, 19–25.

Massing, P. (2021). *Politische Bildung in der Bundesrepublik Deutschland: Grundlagen – Kontroversen – Perspektiven.* Wochenschau Verlag.

Niss, M. (2015). Prescriptive modelling: Challenges and opportunities. In G. A. Stillman, W. Blum & M. Salett Biembengut (Hrsg.), *Mathematical modelling in education research and practice* (S. 67–80). Springer.

Nonnenmacher, F. (2010). Analyse, Kritik und Engagement: Möglichkeiten und Grenzen des schulischen Politikunterrichts. In B. Lösch & A. Thimmel (Hrsg.), *Kritische politische Bildung: Ein Handbuch* (S. 459–470). Wochenschau Verlag.

Pohlkamp, S. (2022). *Normative Modellierung im Mathematikunterricht: Bildungspotenzial, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen*. WTM.

Ritchie, H., & Roser, M. (2022). *Environmental impacts of food production*. Our World in Data. https://ourworldindata.org/environmental-impacts-of-food

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2015). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz von 18.10.2012*. Wolters Kluwer.

Skovsmose, O. (2020). Mathematization as social process. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 605–608). Springer.

Umweltbundesamt (2022, 13. April). *Flugreisen.* https://www.umweltbundesamt.de/umwelttipps-fuer-den-alltag/mobilitaet/flugreisen

Umweltbundesamt (2022, 14. November). *Die Treibhausgase*. https://www.umweltbundesamt.de/themen/klima-energie/klimaschutz-energiepolitik-in-deutschland/treibhausgas-emissionen/die-treibhausgase

Vajen, B., Gildehaus, L., Liebendörfer, M., & Wolf, C. (2021). Mathematisierung als Herausforderung für die politische Bildung. In S. Kenner & T. Oeftering (Hrsg.), *Standortbestimmung Politische Bildung: Gesellschaftspolitische Herausforderungen, Zivilgesellschaft und das vermeintliche Neutralitätsgebot* (S. 188–235). Wochenschau Verlag.

Vohns, A. (2017a). Bildung, mathematical literacy and civic education: The (strange?) case of contemporary Austria and Germany. In A. Chronaki (Hrsg.), *Mathematics education and life at times of crisis* (S. 968–978). University of Thessaly Press.

Vohns, A. (2017b). Einkommensteuertarife mit Schulmathematik erkunden: Ein Zugang aus bildungstheoretischer Perspektive. *Der Mathematikunterricht*, *63*(3), 25–35.

Vohns, A. (2018a). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *105*, 8–21.

Vohns, A. (2018b). Rechnen oder Rechnen lassen? Mathematik(unterricht) als Bürgerrecht und Bürgerpflicht. In G. Nickel, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink & M. Rathgeb (Hrsg.), *Mathematik und Gesellschaft: Historische, philosophische und didaktische Perspektiven* (S. 203–219). Springer.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, *61*(4), 37–45.

Stefan POHLKAMP, RWTH Aachen University
stefan.pohlkamp@rwth-aachen.de

Zur mathematischen Perspektive in öffentlichen Debatten – Normative Modellierung und Andreas Vohns' Beispiele aus der Sozialpolitik

Ob zu Hartz IV im Speziellen (2010), bei Armut im Allgemeinen (2013) oder zu dem relevanten Thema Steuern (2017), Andreas Vohns hat regelmäßig nicht nur aufgezeigt, wie mathematische Argumentationen und Bewertungen aktuelle gesellschaftliche Debatten bereichern, sondern auch, dass diese einen unerlässlichen Bestandteil ideal verstandener mathematischer Bildung ausmachen. Ausgehend von Vohns' Analysen werden in dem vorliegenden Beitrag vier Thesen zum aufklärerischen Potenzial mathematischer (normativer) Modellierung formuliert. Seine Texte werden darüber hinaus zum Anlass genommen, die Entwicklung eines öffentlichen Debattenbeitrags mit mathematischem Bildungswert zu charakterisieren. Das Ziel dieses Fokus auf den mathematischen Beitrag zu sozialpolitischen Fragestellungen ist einerseits, die Rolle von Mathematik – in der (Sozial-)Politik, Disziplinen jenseits von MINT und der Gesellschaft generell – zu konkretisieren, und andererseits, unmittelbare Lernanlässe für den Mathematikunterricht aufzuzeigen.

Die Rolle von Mathematik in der Öffentlichkeit

Zunächst wird auf das enge Verhältnis von mathematischer Bildung und dem wahrgenommenen Wirken von Mathematik in der Öffentlichkeit eingegangen, bevor dieses an Beispielen konkretisiert wird. So geht Winter der Problematik der gesellschaftlichen Rezeption mathematischer Bildung schon bei den Überlegungen zu den Grunderfahrungen nach:

> Sobald es in öffentlichen Diskussionen um Themen mit wesentlich quantitativen Aspekten geht, [...] kommt regelmäßig bald der Wunsch auf, doch bitte niemanden mit Zahlen oder gar Formeln zu ermüden und zu langweilen und die Details den Experten zu überlassen. (1995, S. 45)

Denn mathematische Bildung kann nicht unabhängig von der öffentlichen Wahrnehmung von Mathematik gedacht werden. Während Winter dabei ein Desinteresse konstatiert, wird für Niss die Bedeutung von Mathematik unterschätzt: Als Relevanzproblem bezeichnet er, dass Mathematik objektiv immer wichtiger wird, aber Mathematik subjektiv im gesellschaftlichen, wirtschaftlichen und technischen Leben weniger präsent ist (vgl. Niss, 1994, S. 371). So wurde früher an der Kasse viel selbst gerechnet und heute erfordert die Digitalisierung des Bezahlvorgangs mehr Mathematik, verbirgt sie aber gleichzeitig. Beide Wahrnehmungen

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 149–164). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

von Mathematik stellen gleichermaßen ein Thema als auch eine Hürde für mathematische Bildung dar.

Für Vohns (2018) ist die öffentliche Auseinandersetzung dabei keine Begleiterscheinung, sondern der unabdingbare Kern mathematischer Bildung. Zwar entspricht Bildung sowohl als Selbstzweck im Sinne des humboldtschen Ideals als auch zur Berufs- und Lebensvorbereitung einer individuellen Befähigung, sie kann aber nicht ohne ihre gesellschaftliche, im Sinne von über das Individuum hinausgehende Dimension gedacht werden. Neben dem emanzipatorischen Potenzial der mathematischen Weltannäherung selbst, das in der Forderung „‚Mathematik verstehen' als ‚Menschenrecht' (Wagenschein) und ‚Bürgerpflicht' (Winter)" (ebd., S. 19) mündet, dient die Mathematik auch zur Kontrolle von Expert:innen nach Fischer, deren Wirken und Handeln der allgemeinen Öffentlichkeit so verständlicher kommuniziert werden kann (vgl. ebd., S. 14 f.).

Diese positive, von der Aufklärung geprägte Sicht, Bildung führe stets und uneingeschränkt zu einer Besserung des Individuums und der Gesellschaft muss korrigiert werden. So ist die Mathematik selbst Teil eines glorifizierenden Mythos:

> Mathematik ist, wie am Aufstieg des naturwissenschaftlich-mathematischen Forschungsparadigmas in der Wissensproduktion vorgeführt, Garant von Wahrheit, Vernunft und Wissenschaftlichkeit. Mathematik ist, wie schließlich an der staatlichen Erfassung des Menschen und ihrer Zurichtung zu sozialdisziplinierten Subjekten deutlich geworden, Maß des Menschen. (Ullmann, 2008, S. 162)

Diese Überhöhung der Mathematik führt zu ambivalenten Gefühlen bei den Nutzer:innen und vor allem Lernenden von Mathematik:

> Allmächtig, weil er [der Anwender von Mathematik] vermittels der regelhaften Sprache, der Sprache der universellen Macht die Welt ebendiesen Regeln und damit seinem Kompetenzbereich unterwirft; ohnmächtig, weil er sich wiederum selbst der diktatorischen, keine Ausnahme zulassenden Regelhaftigkeit unterwerfen muss. (ebd., S. 119)

So führen zum Beispiel der – *tertium non datur* – eindeutige Nachweis, dass die eigenen mathematischen Bemühungen falsch sind, und/oder eine Korrektur, bei der richtige Lösungswege wegen einer Überbewertung formaler Fertigkeiten kaum Punkte bekommen, zu Mathematikfrust und einer empfundenen Hilfslosigkeit (vgl. Heitzer & Weigand, 2015, S. 5). Dass diese für die Persönlichkeitsentwicklung anti-emanzipatorischen Wirkungen von Mathematik(unterricht) nicht alle Menschen gleich treffen, sondern bestehende gesellschaftliche Macht- bzw. Unterdrückungsverhältnisse verstärken können, zeigt eine Erfahrung aus dem kanadischen *residential school system*, dessen Folgen als Genozid gelten. Eine Überlebende berichtet, dass natürlich Englisch zur Verdrängung indigener Sprachen ein wichtiges Fach war, aber „mathematics is the way they really got

us“ (Doolittle, 2018, 32:50–32:53). Deshalb muss eine Mathematikdidaktik, insbesondere wenn sie sich als „Beschäftigung mit dem Verhältnis zwischen der Mathematik einerseits und dem Menschen, der Gesellschaft andererseits“ (Fischer & Malle, 1985, S. 8) versteht, die Grenzen von Mathematik und Grenzen sowie Entgleisungen mathematischer Bildung in Hinblick auf ihr gesellschaftliches Wirken reflektieren und dabei Verantwortung übernehmen.

Anhand weniger drastischer Beispiele, aber in Bezug auf verbreitetere Unterrichtssituationen hat Kollosche (2015) herausgearbeitet, wie im Mathematikunterricht dem Emanzipationsanspruch zum Trotz Disziplinierungstechniken und Selektionspraktiken angewendet werden, die Mündigkeit und gleiche Teilhabe für alle verhindern (vgl. S. 114, 117 f.). Für das resultierende Dilemma, wie man nämlich Mathematik weiterhin in einer für die Gesellschaft fortschrittlichen und produktiven Art und Weise anwenden und lehren kann, obwohl man die Grenzen, Risiken und den Missbrauch von Mathematik kennt, formuliert Vohns folgenden Ausweg:

> Mathematik emergiert aber nun einmal gesellschaftlich, sie wird angewandt und mit ihr entstehen gesellschaftliche Probleme, denen Mathematisierungen inhärent sind[,] und gegenüber diesen kann man sich nicht emanzipieren, ohne ihren mathematischen Gehalt selbst einer Analyse zu unterziehen. (2015, S. 60)

So wichtig eine theoretische Beschreibung und einhergehende Dekonstruktion der Ideologisierung von Mathematik(unterricht) in Anlehnung an Ullmann und Kollosche auch sind, ein unterrichtspraktischer Zugang zum gesellschaftlichen Wert von Mathematik erfolgt über „die schlichten Situationen, in denen wir unser Handeln selbst bestimmen wollen“ (Volk, 1993, S. 143). Dieser konstruktive Ansatz, aktuelle gesellschaftliche Debatten im Sinne von mathematischer Bildung urbar zu machen und gleichzeitig eine fundierte mathematische Perspektive in der Öffentlichkeit zu verbreiten, ist entscheidend von Vohns geprägt worden und soll im Folgenden näher charakterisiert werden.

Genese eines bildungsrelevanten mathematikhaltigen Debattenbeitrags

In Vohns’ Werk finden sich die oben bereits aufgeführten Beispiele als konkrete Untersuchungen, bei denen aus einem mathematikdidaktischen Standpunkt heraus die mathematischen Aspekte (sozial)politischer Themen erläutert sowie bildungstheoretische Schlussfolgerungen gezogen werden. Vohns adressiert dabei sowohl (implizit) die Öffentlichkeit mit dem Angebot einer mathematischen Argumentationshilfe als auch (explizit) die mathematikdidaktische Wissenschaftsgemeinschaft über die Aufbereitung realistischer Problemstellungen und zugehöriger Lernumgebungen. Aus seinen Texten lässt sich ein methodisches Vorgehen ableiten, das sich für entsprechende Fragestellungen als produktiv erwiesen hat:

- Eine *stoffdidaktische Analyse* muss der „mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur“ (Winter, 1989, S. 46) des Themas gerecht werden. Das heißt, bei einer ernsthaften Auseinandersetzung darf weder die Mathematik kontextlos präsentiert werden, noch dürfen die mathematischen Hintergründe hinter den gesellschaftlichen Aspekten – oft im Sinne einer vermeintlich besseren Zugänglichkeit – ignoriert oder verschwiegen werden. Genau die Wechselwirkung zwischen beiden Seiten, wie etwa welche mathematischen Zusammenhänge welche sachkundlichen Implikationen haben oder welche sozialen Realitäten auf welche Weise mithilfe von Mathematik quantifiziert und gewichtet werden, adressiert eine Leerstelle in bisherigen Debatten.
- Eine solche Aufbereitung kann als alleiniges Ziel nicht nur eine utilitaristisch verstandene Aufklärung verfolgen, sondern muss auch *methodologischen Erkenntnisgewinn* bereithalten (vgl. Pohlkamp, 2021, S. 176 f.). Das heißt, es reicht als Lernziel nicht aus, wenn Schüler:innen bzw. Bürger:innen konkret verstehen, wie eine sozialpolitische Maßnahme genau wirkt – oder wie sie zu beantragen ist –, sondern es sollte sogar im Vordergrund stehen, zu verstehen und zu reflektieren, welchen Beitrag Mathematik bei diesem Problem leistet und wie dieser auch bei anderen Fragestellungen behilflich sein kann. Es wird also nicht nur innerhalb des Sachkontextes mithilfe von Mathematik etwas über die bestimmte Situation, sondern immer auch darüber hinaus etwas über die Mathematik und ihr Wirken gelernt.
- Die *Exemplarität* bezieht sich dabei nicht nur auf die Auswahl eines Themas, an dem sich bildungsrelevant das übergeordnete mathematische Phänomen veranschaulichen lässt, sondern auch auf die Tiefe der mathematisch-sachkundlichen Durchdringung. Es geht nicht darum, umfassend und detailreich die Komplexität darzustellen, noch darum, die berufliche Ausbildung der entsprechenden Expert:innen vorwegzunehmen. Diese exemplarische Argumentation und die damit verbundene Absicht sollten transparent kommuniziert werden.
- Ein Gütekriterium für einen Debattenbeitrag zu einem gesellschaftlichen Anliegen aus mathematischer Perspektive ist der *Bildungswert*. In der Regel wird dieser explizit thematisiert, indem entsprechende (fachdidaktische) Literatur hermeneutisch rezipiert wird und mithilfe der gewonnenen Erkenntnisse und Fachbegriffe die Analyse und Darstellung der mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur um eine bildungstheoretische Reflexionsebene ergänzt wird. Vohns hat dabei vor allem Fischer und Winter weitergedacht – neben den bereits genannten Ansätzen von Fischers Kommunikation zwischen Lai:innen und Expert:innen und Winters Grunderfahrungen z. B. auch dessen allgemeine Lernziele (vgl. Vohns, 2017, S. 7). Dieser Textteil ist von großem Wert für den mathematikdidaktischen Diskurs; adressiert der Debattenbeitrag vor allem eine politisch interessierte Öffentlichkeit jenseits dieser Disziplin, muss auf diese Ausführungen (größtenteils) verzichtet werden.

Als Thema *par excellence* für einen solchen Debattenbeitrag nennen Winter und Vohns jeweils die Modellierung (an dieser Stelle werden Modellierung und Modellbildung synonym behandelt, für eine mögliche Nuancierung vgl. Pohlkamp, 2021, S. 38):

> Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von *Aufklärung* durch sie zustande kommt. (Winter, 1995, S. 38, Herv. i. Orig.)

In dem Zitat werden zentrale Aspekte des obigen Vorgehens bereits angedeutet. Die Schwerpunktsetzung und Elementarisierung im Spannungsfeld zwischen einer möglichst breiten Verständlichkeit und einer aufrichtigen Darstellung der komplexen Wirklichkeit bleibt eine Herausforderung und führt auch zu einer Angreifbarkeit. So ist das eigene Modellieren an Beispielen aus einer modellierungsdidaktischen Sicht zum Kompetenzerwerb unerlässlich, aber die Exemplarität geht für Vohns sogar so weit,

> dass es, was den allgemeinbildenden Gehalt solcher Beispiele anbelangt, oft weniger oder nur zum Teil auf „mathematische Modellierungskompetenz“ ankommt, sondern auch auf das, was über mathematische Modellierung erfahren und an reflexivem Metawissen erworben werden kann. (2017, S. 13)

Zusammenfassend lässt sich an dieser Stelle eine erste These zu den Anforderungen an eine konstruktive mathematische Perspektive auf gesellschaftliche Probleme formulieren:

1. Eine mathematische Aufklärung zu öffentlichen Anliegen sollte von exemplarischen Themen her gedacht werden, die auch – im Sinne der mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur – mathematisch analysiert werden müssen. Die ausgewählten Themen müssen geeignet sein, übergeordnete Funktionen von Mathematik in der Gesellschaft aufzuzeigen.

Normative Modellierung anhand eines sozialpolitischen Beispiels

Das Thema Armut ist besonders geeignet, die bisherigen theoretischen Ausführungen zur Rolle von Mathematik in der Öffentlichkeit zu illustrieren und gleichzeitig die normative Modellierung als Paradebeispiel eines mathematischen (Macht)Mittels jenseits von naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen zu diskutieren. Vorab werden jedoch Vohns’ (2010) Ausführungen zum „Hartz IV“-Urteil des Bundesverfassungsgerichtes hinsichtlich der Rolle von Mathematik rezipiert.

Das aus der Menschenwürde ableitbare Existenzminimum, das mit dem „Hartz IV“-Satz quantifiziert wird, zeigt die „Notwendigkeit der bürokratisch-disziplinierenden Funktion mathematischer Verfahren“ (ebd., S. 8): So unterschiedlich

menschliche Leben und Bedarfe sind, ist es nicht denkbar, dass millionenfach in Deutschland individuelle Beträge der Grundsicherung bestimmt werden. Eine generalisierende Mathematisierung in diesem Bereich sorgt für Arbeitserleichterung. Mit der Abstraktion aller einzelnen Lebenssituationen auf eine Zahl, die eigentlich nur aussagt, mit wie viel Geld dieses Leben am Existenzminimum bestritten werden muss, ist auch eine Transparenz gegeben. Damit geht aber nicht zwangsläufig eine Vergleichbarkeit einher – weil schon die Ausgangsverhältnisse nicht vergleichbar waren –, vielmehr wird der Schein einer Vergleichbarkeit geweckt. Analog garantiert die Mathematisierung keine Objektivität, sondern mittels Objektivierung wird versucht, vom Schicksal des Subjekts Abstand zu nehmen:

> Dadurch, dass Regelausgaben als „abstrakte Rechengrößen" konzipiert werden, erhofft man sich eine Objektivierung, ja Distanzierung. […] Disziplinierung und Objektivierung durch Mathematisierung funktioniert in sozialen Kontexten durch Pauschalisierungen, durch das Absehen vom Einzelfall, durch das Hineinsehen des Regelfalls. (ebd., S. 10)

Dieses warnende Aufzeigen der Grenzen einer Mathematisierung soll nicht deren kulturelle Leistung schmälern: Wegen eines quantifizierten Existenzminimums sind Menschen nicht auf Einzelentscheidungen nach Gutdünken angewiesen, was dennoch leider nicht bedeutet, dass jede Zufälligkeit ausgeschlossen ist. Vohns veranschaulicht diese Willkür an der Geschwindigkeitsbegrenzung (vgl. 2010, S. 5 f.): Das angebrachte vorsichtige Fahren vor einer Schule wird auf die messbare Geschwindigkeit von 30 km/h reduziert. Aber warum genau diese Zahl, warum nicht 28 km/h oder – wenn der Wert durch 5 teilbar sein soll – 25 km/h? Wäre die Begrenzungen 25 km/h, 50 km/h, 100 km/h – und ganz provokant 125 km/h auf Autobahnen – nicht sogar regelmäßiger als 30 km/h, 50 km/h und 100 km/h?

Bei der Geschwindigkeitsgrenze legt der Gesetzgeber eine Zahl selbst fest, während bei der Höhe von Hartz IV die Zahl auf einer Rechnung beruht. Dabei kommen in der Regel folgende zwei vereinfacht dargestellte Modelle in Betracht (vgl. ebd., S. 6 f.): Während beim Warenkorbmodell die Preise für die notwendigen Güter letztendlich addiert werden, werden für das Statistikmodell die tatsächlichen Ausgaben der ärmsten Haushalte herangezogen. Deutlich bleibt die Willkürlichkeit, etwa welche Güter sind notwendig oder wer behauptet, die ärmsten Haushalte besäßen genug für ein menschenwürdiges Leben. Zwischen den verschiedenen mathematischen Modellen existiert die politische Entscheidungsfreiheit, die auch umfasst, Mathematisierungen abzulehnen und doch Einzelentscheidungen zu treffen, wofür aber auch mathematische Einsichten erforderlich sind.

> Im Bewusstsein, dass es keinen durch objektive Realität begründeten Zwang zu einer bestimmten Form der Mathematisierung von Menschenwürde gibt, hat es [das Bundesverfassungsgericht] dem Gesetzgeber bewusst offen gelassen, welches Rechenmodell er anzuwenden hat

> […]. Es hat insbesondere nicht überprüft, ob die Statistiker(innen) (bzw. die Gesetzgeber) bei Hartz IV „richtig gerechnet“ haben. (ebd., S. 10)

Als verfassungswidrig beanstandet das Gericht jedoch, dass der Gesetzgeber ein mathematisches Modell wählt und dann Abweichungen vornimmt, ohne diese ausreichend zu begründen oder transparent darzustellen. Wenn man Mathematik zum Lösungsansatz heranzieht, muss man diesen konsequent verfolgen und kann keine Rosinenpickerei betreiben, indem einige Folgen des Modells ohne (!) Angabe von Gründen abgeändert werden (vgl. ebd., S. 8). Abgeleitet geht es bei einem aufgeklärten Umgang mit Mathematik im öffentlichen Raum nicht um die Details und das Nachrechnen der Modelle, sondern ob der Einsatz von Mathematik gerechtfertigt wird, für andere nachvollziehbar ist und in sich schlüssig umgesetzt wird. Auch wenn es innerhalb der mathematischen Logik nur richtig und falsch gibt, ist der Einsatz von Mathematik im gesellschaftlichen Leben nie *per se* neutral oder gar immer wahr, sondern wird von Menschen genutzt, die Interessen verfolgen.

> Mathematik selbst ist logisch wahr, ihre Anwendung und Interpretation öffnet aber der Berücksichtigung von Interessen und damit der Subjektivität Tür und Tor. (Maaß, 2006, S. 55)

Das Verfolgen von Interessen kann auch legitim sein, vielleicht war die Änderung des Modellergebnisses eine Reaktion auf den Wunsch, einen angemessenen Abstand zwischen „Hartz IV“-Satz und Einkommen durch eigene Arbeit zu gewährleisten, wobei dann als Alternative natürlich auch eine Erhöhung des Lohns in Frage gekommen wäre. An dieser exemplarischen Suche nach einem möglichen Motiv zum mathematisch-sachkundlichen Modell des „Hartz IV“–Betrages wird deutlich, dass entsprechende Modellierungsentscheidungen im Kontext von Interessen und unter Abwägen von Alternativen zu bewerten sind, was zu folgender These führt:

2. Bei der Anwendung von Mathematik in gesellschaftlichen Kontexten muss nach den Verantwortlichen für diese Mathematisierung und deren Interessen gefragt werden. Im Vordergrund steht dabei das Aufzeigen von Alternativen. Vermeintlich innermathematische Entscheidungen haben Auswirkungen auf den Sachkontext, die bedacht werden müssen.

Dieser Exkurs zu Hartz IV passt nicht nur zum Sachkontext Armut, sondern antizipiert auch Modalitäten der normativen Modellierung, die im Folgenden in ihrer gesellschaftlichen Funktion charakterisiert wird. Zum Einstieg werden nicht wie oben die Festlegung einer Zahl oder die Abwägung zwischen zwei Rechenmodellen, sondern die mathematischen Alternativen innerhalb eines Modells zur relativen Armutsgefährdung sowie deren sozial(politisch)en Auswirkungen beleuchtet.

Im Gegensatz zum konkreten Mangel an Nahrung, Grundversorgung und Unterkunft ist mit relativer Armut gemeint, dass das eigene Einkommen im Vergleich

zu den anderen Einkommen in der Gesellschaft nicht mehr zu einer soziokulturellen Teilhabe befähigt. Um diese Lebenssituation zu mathematisieren, ist in einer ersten Annäherung bestimmt worden, dass eine Person – wobei i. d. R. die Ebene der Haushalte betrachtet wird –, die weniger als 60 % des „typischen“[1] Einkommens zur Verfügung hat, als von relativer Armut bedroht gelten soll. Bei der Bestimmung von relativer Armut war es bis 2000 in Deutschland üblich, das arithmetische Mittel als Wert für das typische Einkommen heranzuziehen, während man sich 2001 in der EU auf den Median als Referenzwert geeinigt hat. (vgl. Vohns, 2013, S. 50–52)

Zu dem lebensweltlichen Phänomen der relativen Armutsgefährdung ist also eine Mathematisierung und ein Modell gefunden worden. Dennoch kann man an dieser Stelle noch nicht die Details und die Berechnung den Expert:innen überlassen, sondern es braucht mathematisches Grundwissen, um die Wahl zwischen zwei statistischen Maßen, dem arithmetischen Mittel und dem Median, zu bewerten, weil die Auswirkungen auf die gesellschaftliche Debatte von hoher Relevanz und Reichweite sind, wie der Streit zwischen dem *Youtuber* Rezo und der CDU 2019 gezeigt hat.

Auf Rezos Vorwurf, die Politik würde sozioökonomische Ungleichheiten verstärken, antwortete die CDU, die Quote der relativen Armutsgefährdung sei ein ungeeigneter Messwert, denn wenn der superreiche Amazon-Gründer Bezos nach Deutschland ziehe, würde dies unmittelbar zu einem Anstieg der relativen Armutsgefährdung führen (vgl. Butterwegge, 2020, S. 210 f.). Dieses Argument wäre richtig, wenn die relative Armut noch mit dem arithmetischen Mittel bestimmt würde. Dieses statistische Maß ist anfälliger für Datenausreißer, sodass das Durchschnittseinkommen in Deutschland vermutlich – wobei man eigentlich genauer zwischen Vermögen und Einkommen unterscheiden muss – signifikant steigen würden, wenn ein Superreicher dazu käme, damit würden auch mehr Personen unter den erhöhten Referenzwert fallen und als arm gelten. Der Median als der Wert in der Mitte der geordneten Daten ist jedoch deutlich robuster, sodass sich bei der Messung der relativen Armutsgefährdung kein signifikanter Unterschied durch Bezos Zuzug zeigen würde.

Diese exemplarische Auseinandersetzung über Mathematik in der Gesellschaft zeigt nicht nur, dass der politische Schlagabtausch eine höhere Qualität aufweisen würde, wenn man Vohns’ Darstellung zum Thema in der politischen Öffentlichkeit mehr zur Kenntnis genommen hätte, sondern auch, welchen Einfluss man beim Einsatz der vermeintlich neutralen Mathematik ausüben kann. Dieses Beispiel der relativen Armutsgefährdung soll des Weiteren nun genutzt werden, um normative Modellierung zu charakterisieren.

Mit normativer Modellierung[2] ist genau das Phänomen gemeint, dass Mathematik genutzt wird, um Realität zu gestalten. Ohne Mathematisierung von Armut über das Einkommen kann gar nicht bestimmt werden, wer armutsgefährdet ist. Es ist

eben keine ohne Mathematik erfassbare Eigenschaft der Realität, wie etwa die Augenfarbe eines Menschen. Dementsprechend lässt sich die normative Modellierung von der deskriptiven Modellierung abgrenzen. Bei Letzterer liegt immer zunächst eine lebensweltliche Situation vor, die in einem zweiten Schritt mithilfe von Mathematik abgebildet wird. Bei der deskriptiven Modellierung wird Realität mithilfe von Mathematik angenähert oder auch abstrahiert, um zu beschreiben, zu erklären oder auch um Vorhersagen zu treffen. Bei der deskriptiven Modellierung ist der Abgleich des mathematischen Ergebnisses mit der Realität ein Gütekriterium, etwa ob die berechneten Fallgeschwindigkeiten auch den Messwerten entsprechen. Originaltreue bietet aber keine Möglichkeit, um Ergebnisse normativer Modellierung zu bewerten, so ist zum Beispiel die relative Armutsgefährdung keine Eigenschaft, die sich überprüfen lässt oder auch subjektiv von den Betroffenen so empfunden werden muss. Aus der charakterisierenden Funktion von normativer Modellierung als Gestaltung der Realität mit mathematischen Mitteln lassen sich folgende Eigenschaften ableiten: Normative Modellierung ist

- aushandlungs- und einigungsbedürftig: Bei der Armutsgefährdung hat es historisch sowohl das Modell mit arithmetischen Mittel als auch mit Median gegeben, bis man sich EU-weit auf einen Standard geeinigt hat. Genauso musste festgelegt werden, dass man als Schwelle für die Armutsgefährdung 60 % – und nicht 58 % oder 55 % – des Medianeinkommens berechnet. Gegebenenfalls gibt es bei einigen normativen Modellierungen keine Diskussion in der Öffentlichkeit oder unter politischen Entscheidungsträger:innen, an deren Anschluss dann eine Entscheidung getroffen wird. Allerdings werden im Prozess der Modellierung Annahmen und Festlegungen getroffen, die ohne gesellschaftliche Aushandlung dann den modellierenden Expert:innen überlassen werden, die diese unter Umständen sogar unbewusst bestimmen.
- uneindeutig: Fragestellungen, in denen normative Modellierungen sinnvoll eingesetzt werden können, sind oft sehr offen; im vorliegenden Fall etwa, was soziokulturelle Teilhabe bedeutet und wie sie gemessen wird. Eine Reduktion auf einen Einkommenswert ist nicht zwangsläufig noch alternativlos. Ebenso könnten verschiedene Größen gewichtet miteinander verrechnet werden, zum Beispiel das Einkommen und die durchschnittliche Anzahl an Besuchen kultureller Veranstaltungen (man kann auch vereinsamt ohne soziale Kontakte und kulturellen Anschluss in einer Villa sitzen). Selbst wenn man sich wie bei der relativen Armutsgefährdung auf eine Größe beschränkt, zeigen die oben genannten notwendigen Aushandlungs- und Einigungspunkte, dass auch dann immer noch eine Auswahl zwischen legitimen Möglichkeiten besteht, die zur Uneindeutigkeit der Modellierung und damit des Ergebnisses beitragen.
- subjektiv und interessengeleitet: Schon wegen der Auswirkungen im gesellschaftlichen Kontext – bei Armutsfragen etwa welcher Person staatliche Unterstützung in welcher Höhe zukommt – ist die normative Modellierung nicht

> neutral. Werden die Reichen immer reicher, während sich bei den anderen Einkommen nichts verändert, ist der Median wegen seiner Robustheit das statistische Mittel der Wahl, um die größer werdende Schere zwischen Arm und Reich zu verbergen, weil dann im Gegensatz zum arithmetischen Mittel die Schwelle der relativen Armut gleich bleibt. Es ist die „Perversität" der Armut, dass wenn das Existenzminimum angehoben wird, weil man insgesamt mehr Menschen jeweils mehr Hilfe zukommen lassen will, die Anzahl der Bedürftigen in der Statistik steigt, was dann als Scheitern und Anstieg der Armut gewertet wird, obwohl es den Betroffenen besser geht (vgl. Cremer, 2016, S. 62 f.). Dies zeigt erneut die definitorische Kraft von normativer Modellierung, dass sich je nach Mathematisierung bzw. nach Ergebnis eines uneindeutigen Modells die statistische Anzahl an Armen bzw. von relativer Armut Gefährdeten verändern kann.

Die gesellschaftliche Macht, die sich aus einem solchen Einsatz von Mathematik in (sozial)politischen Kontexten ergibt, nennt Skovsmose die These von der „*formatting power of mathematics*: Social phenomena are structured and eventually constituted by mathematics" (1998, S. 197). Dass das Werkzeug der normativen Modellierung so mächtig ist, liegt aber nicht nur *per definitionem* daran, dass damit gesellschaftliche Realitäten geprägt werden, sondern auch daran, dass die deskriptive Funktion von mathematischer Modellierung in der öffentlichen Vorstellung und auch in Lehrplänen dominiert. Wenn Mathematik für ein neutrales, die Wahrheit garantierendes Mittel gehalten wird, das Realität nur beschreibt, dann wird die Notwendigkeit übersehen, den Einsatz von Mathematik kritisch zu diskutieren und zu bewerten. Wenn in der öffentlichen Debatte Mathematik oder ein mathematisches Modell zur Begründung herangezogen wird, ist das keine Legitimation des Anliegens an sich, sondern sollte dieses Argument gerade hinterfragt werden und mit Alternativen verglichen werden.

> [Eine normative Modellierung für eine deskriptive halten] wäre aber ein Zeichen von Unmündigkeit. (Winter, 1994, S. 12)

> Umgekehrt lieben Produzenten normativer Modelle es, so zu tun, als ob ihre Modelle wohlbestimmt und einzigartig seien. (Freudenthal, 1978, S. 132)

Dabei ist die strikte Gegenüberstellung von normativer und deskriptiver Modellierung in gewissem Maße auch künstlich und gefährlich in dem Sinne, als dass, auch wenn Realität mittels Mathematik beschrieben wird, Modellierungsentscheidungen wie Annahmen, Vereinfachungen und Festlegungen getroffen werden müssen, die subjektiv anders entschieden werden können und dann zu verschiedenen Ergebnissen führen. Die Frage, ob Realität durch Mathematik abgebildet oder gestaltet bzw. erst geschaffen wird, ist dennoch für eine Differenzierung hilfreich. Aufgrund der Omnipräsenz deskriptiver Modellierung steckt hinter der

Sensibilisierung für normative Modellierung die didaktische Intention, zuerst anhand von ausgewählten gesellschaftlichen Problemen wie der Armut die oben genannten Eigenschaften wie etwa Uneindeutigkeit zu thematisieren, weil sie bei normativen Modellierungen besonders offensichtlich sind, und schließlich auch deskriptive Modellierungen entsprechend kritisch zu hinterfragen.

Zur Förderung von Mündigkeit müssen Schüler:innen und Bürger:innen die Fragen stellen, wo Mathematik zu welchem Zweck eingesetzt wird, welche Teile des Modells unveränderlich sind und welche Alternativen zu vorgenommenen Modellannahmen bestehen. Ganz in diesem Sinne ist das Beispiel, dass man nicht die naturwissenschaftlichen Gesetze hinter der Klimakrise bekämpfen (oder leugnen) kann, aber sehr wohl das soziale, wirtschaftliche System reformieren kann, das für diese Klimakrise verantwortlich ist. Allgemein formuliert:

3. Normative Modellierung ist ein entscheidendes Konzept, um Mathematik hinter sozial- und wirtschaftspolitischen Themen zu verstehen. Sie verweist auf den menschlichen Einfluss bei mathematischer Modellierung und widerlegt die Alternativlosigkeit von Modellen. Die Einsicht, was veränderbar ist und was nicht, ist höchst bildungsrelevant.

Ausweitung auf finanzwirtschaftliche Themen

Die Wirtschaftswissenschaften sind eine weitere Disziplin, in der Mathematik mit einer breiten gesellschaftlichen Wirkung genutzt wird. Im 19. Jahrhundert wurde die Verwendung der Mathematik als Hilfswissenschaft in Analogie zur Physik sogar zur Legitimierung des eigenen Fachs etabliert (vgl. Israel, 2005, S. 153, 158). Dabei geht es nicht nur um den inhaltlichen und fachlichen Wissensgewinn, der über den Rückgriff auf Mathematik erreicht wird, sondern auch um die Art und Weise, wie mit Mathematik der Anschein von Wahrheit geweckt und Widerspruch im Vorhinein verhindert werden soll.

> Durch die vielen formellen und visuellen Referenzen an die Mathematik wird hier der Eindruck erweckt, „richtige, treffsichere und begründete Entscheidungen“ ausrechnen zu können. […] Mathematik wird damit auch zum Mittel der Kritikimmunisierung. (Koubek, 2005, S. 187, 189)

Diese kritische Reflektion, welche Wirkung mit dem argumentativen Verwenden von Mathematik erzielt werden soll, sollte durchaus auf andere Disziplinen sowie den Einsatz von Mathematik in der öffentlichen Debatte übertragen werden.

Ein Beispiel aus dem Mathematikunterricht für die unreflektierte Übernahme wirtschafts- bzw. finanzwirtschaftlicher Modelle ist die Zinsrechnung. Die Zinsrechnung scheint deskriptiv die Realität der Bankwirtschaft wiederzugeben, dabei ist sie normativ geschaffen worden. Es sind erst mathematische Überlegungen und Rechnungen durchgeführt worden, die dann in der Realität umgesetzt worden sind und Wirklichkeit in der Form geschaffen haben, als dass die ersten Zinsen

gezahlt werden konnten. Im Mathematikunterricht sollte Platz dafür geschaffen werden, zu reflektieren, dass Zinsen kein Naturgesetz, sondern menschengemacht sind. Dass Zinsen in der Menschheitsgeschichte noch nicht einmal sehr lange selbstverständlich sind bzw. immer kritisch kommentiert worden sind, zeigt der fächerübergreifende Hinweis, dass viele Religionen ein Zinsverbot kennen und empfehlen (vgl. Krawietz, 2005, S. 1867–1870).

Vohns (2017) hat sich selbst des Themas der Einkommensteuer angenommen, um die Normativität bei einem finanzwirtschaftlichen, aber öffentlich diskutierten Thema aufzuzeigen. Die Suche nach einem gerechten, auf dem Einkommen basierenden Beitrag zum Gemeinwesen motiviert die Modellierung, an deren Ende ein Steuergesetz steht, das Bürger:innen reale Zahlungen vorschreibt. Der Vergleich zwischen dem österreichischen Steuertarif, der nur aus linearen Funktionsabschnitten besteht, und dem deutschen, der über quadratische Funktionsabschnitte verfügt, zeigt den Gestaltungsspielraum, über den mathematisch Modellierende und/oder politische Entscheidungsträger:innen bei dem Entwurf eines Steuergesetzes verfügen, wenn die Art des funktionellen Zusammenhangs zwischen Einkommen und Steuer prinzipiell frei gewählt werden kann. (vgl. ebd., S. 9–12)

Die Einkommensteuer bietet sich an, damit Schüler:innen im Mathematikunterricht die Freiheiten und Möglichkeiten einer normativen Modellierung aus Sicht der Produzent:innen erleben. Ganz offen könnte man sie eigene Modelle vorschlagen lassen, die in diesem Fall vor allem auf Funktionen beruhen. In einem Vergleich der Modelle unter Berücksichtigung sachkontextlicher Auswirkungen und in Hinblick auf die Maßgabe der Gerechtigkeit als Bewertungskriterium könnte der Modellierungskreislauf (bzw. wegen des zunehmenden Erkenntnisgewinns besser: die Modellierungsspirale) reflektiert werden bzw. durch Verbesserungen und weitere Überprüfungen mehrmals durchlaufen werden. In der Unterrichtspraxis lässt sich dies beispielsweise didaktisch reduzieren und veranschaulichen, wenn man etwa den biblischen Zehnten vorzugibt und mit einem digitalen Schieberegler einen Grundsteuerfreibetrag einführt, damit dann Grenz- und Durchschnittssteuersatz graphisch analysiert und im Sachkontext interpretiert werden können (vgl. Pohlkamp & Heitzer, 2020, S. 291 f.). Mit der dynamischen Variation lassen sich nicht nur die genannten Fachbegriffe mathematisch-sachkundlich einführen, sondern lässt sich auch das eine Steuermodell, der Zehnte nebst einem Grundsteuerfreibetrag, über die parametrisierte Höhe des Grundsteuerfreibetrags beliebig variieren. Aus der Perspektive der Gerechtigkeit entdecken und diskutieren Schüler:innen dann, ob es gerecht ist, dass mit der Einführung eines Grundsteuerfreibetrags auch die Superreichen (im Durchschnitt) keine 10 % Steuern mehr zahlen. An diesem Beispiel werden das Gestaltungspotenzial von normativer Modellierung und die daraus resultierende Reflexionsmöglichkeit von Modellen konkret erlebbar:

4. Das Bildungspotenzial normativer Modellierung besteht vor allem darin, dass Metawissen zur normativen Modellierung ein Analysewerkzeug zur Reflexion und Bewertung von erstellten Modellen darstellt. Allerdings erlaubt ein exemplarisches Erstellen von Modellen – durch (mehrmaliges) Durchlaufen der gesamten Modellierungsspirale oder aber auch durch Variation einzelner Entscheidungen – einen Einblick in die *formatting power of mathematics*.

Fazit

> Mathematische Modelle sind [...] toll, Machtphänomene auszublenden [...]. [Sie sind] eine der großen Ausblendungsmechanismen, die wir haben, weil [...] ja alles wertneutral [ist]. (Graupe zit. n. Jung, 2022, 55:10–55:18)

Dieses Zitat aus einem populärjournalistischen Podcast zeigt, dass eines der Grundanliegen hinter den oben stehenden Überlegungen, um die sich Vohns verdient gemacht hat, längst in der Öffentlichkeit Anklang findet. Die negativ ausfallende Deutung, die sich auf die Funktion von Mathematik beschränkt, Herrschaftsverhältnisse zu reproduzieren und zu verbergen, muss auch in der Öffentlichkeit um das produktive, aufklärerische Potenzial von Mathematik in (sozial)politischen Debatten ergänzt werden, das in diesem Beitrag in Rezeption von Vohns exemplarisch an Hartz IV, Armut und Steuern am Beispiel der normativen Modellierung aufgezeigt worden ist. Daraus lassen sich folgende Quintessenzen zur Ausschärfung einer konstruktiven mathematischen Bildung ableiten:

1. Eine mathematische Aufklärung zu öffentlichen Anliegen sollte von exemplarischen Themen her gedacht werden, die auch – im Sinne der mathematisch-sachkundlichen Doppelnatur – mathematisch analysiert werden müssen. Die ausgewählten Themen müssen geeignet sein, übergeordnete Funktionen von Mathematik in der Gesellschaft aufzuzeigen.
2. Bei der Anwendung von Mathematik in gesellschaftlichen Kontexten muss nach den Verantwortlichen für diese Mathematisierung und deren Interessen gefragt werden. Im Vordergrund steht dabei das Aufzeigen von Alternativen. Vermeintlich innermathematische Entscheidungen haben Auswirkungen auf den Sachkontext, die bedacht werden müssen.
3. Normative Modellierung ist ein entscheidendes Konzept, um Mathematik hinter sozial- und wirtschaftspolitischen Themen zu verstehen. Sie verweist auf den menschlichen Einfluss bei mathematischer Modellierung und widerlegt die Alternativlosigkeit von Modellen. Die Einsicht, was veränderbar ist und was nicht, ist höchst bildungsrelevant.
4. Das Bildungspotenzial normativer Modellierung besteht vor allem darin, dass Metawissen zur normativen Modellierung ein Analysewerkzeug zur

> Reflexion und Bewertung von erstellten Modellen darstellt. Allerdings erlaubt ein exemplarisches Erstellen von Modellen – durch (mehrmaliges) Durchlaufen der gesamten Modellierungsspirale oder aber auch durch Variation einzelner Entscheidungen – einen Einblick in die *formatting power of mathematics*.

Auf einer methodischen Ebene bleibt als Vermächtnis das von Vohns geprägte Genre des bildungsrelevanten mathematikhaltigen Debattenbeitrags, dessen Charakterisierung in diesem Beitrag versucht worden ist und den man sich viel häufiger aus mathematikdidaktischer Feder wünscht.

Die in den Thesen präzisierte, angestrebte mathematische Bildung ist dabei ein Ideal, das als Leitstern eine Orientierung für mathematikdidaktische Analysen und Interventionen bietet, wohlwissend, dass wir dieses Ideal nie vollständig umsetzen werden.

> *Die Bedingung der Möglichkeit von „mathematischer Bildung" bzw. „mathematischer Allgemeinbildung" oder ggf. „mathematical literacy" ernsthaft zu bedenken heißt, sich mit deren Charakter als regulativen Ideen (Führer) zu arrangieren.* […] Aber wir können uns vielleicht bemühen, unser Möglichstes zu tun, den Lernenden im Sinne Wenigers und Klafkis ein wohl überlegtes „Angebot" zu machen, ihnen eine – mit Winter gesagt –, Erfahrung davon zu ermöglichen, was Mathematik sein kann, was sie für die Menschen und die Gesellschaft bedeuten kann, warum es sich lohnen kann, sich auf sie einzulassen und wo es besser sein kann, sich ihrer Anwendung zu verweigern. (Vohns, 2018, S. 19, Herv. i. Orig.)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Personen bedanken, die in ihren Reviews konstruktive Rückmeldungen gegeben haben, damit dieser Beitrag an Klarheit gewinnen konnte.

[1] Zur mathematischen Bestimmung des Worts „typisch" existieren bereits im Kontext der *statistical literacy* unterrichtspraktische Vorschläge (vgl. z. B. Büscher, 2019, S. 20).

[2] Die folgende Charakterisierung normativer Modellierung beruht auf grundsätzlicheren Überlegungen (vgl. Pohlkamp, 2021, S. 38 ff.), die hier verkürzt dargestellt und speziell auf den Sachkontext der Armut angewendet werden.

Literatur

Büscher, C. (2019). Was ist schon "typisch"? Boxplots und statistische Maße verstehen. *Mathematik lehren*, 2013, 18–21.

Butterwegge, C. (2020). *Die zerrissene Republik. Wirtschaftliche, soziale und politische Ungleichheit in Deutschland*. bpb.

Cremer, G. (2016). *Armut in Deutschland. Wer ist arm? Was läuft schief? Wie können wir handeln?* bpb.

Doolittle, E. (2018). *What is Indigenious Mathematics?* [Video]. https://www.uwinnipeg.ca/indigenous/weweni/weweni-2018/what-is-indigenous-mathematics.html.

Fischer, R., & Malle, G. (1985). *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Bibliographisches Institut.

Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. Oldenbourg.

Heitzer, J., & Weigand, H.-G. (2015). Schönheit erleben. Die ästhetische Seite der Mathematik. *Mathematik lehren*, 193, 2–8.

Israel, G. (2005). Die Mathematik des >homo oeconomicus<. In J. Brüning & E. Knobloch (Hrsg.), *Die mathematischen Wurzeln der Kultur. Mathematische Innovationen und ihre kulturellen Folgen* (S. 153–172). Wilhelm Fink.

Jung, T. (Moderator) (2022, 2. Juni). Hochschulgründerin, Ökonomin & Philosophin Silja Graupe. *Jung & Naiv* [Video-Podcast]. https://www.jungundnaiv.de/2022/06/02/hochschulgruenderin-oekonomin-philosophin-silja-graupe-fogle-576/.

Kollosche, D. (2015). Mathematik und Bildung aus kritischer Sicht. *Mathematica didacta*, 38, 111–131.

Koubek, J. (2005). Normative Mathematik in der Betriebswirtschaftslehre. In J. Brüning & E. Knobloch (Hrsg.), *Die mathematischen Wurzeln der Kultur. Mathematische Innovationen und ihre kulturellen Folgen* (S. 173–193). Wilhelm Fink.

Krawietz, B. (2005). Zins. In H. D. Betz, D. S. Browning, B. Janowski & E. Jüngel (Hrsg.), *Religion in Geschichte und Gegenwart. Handwörterbuch für Theologie und Religionswissenschaft. Band 8 T–Z* (S. 1863–1871), 4., völlig neu bearb. Aufl., Mohr Siebeck.

Maaß, J. (2006). Manipulation durch Mathematik. In G. Sperl & M. Steiner (Hrsg.), *Hirnverkehr. Wissenschaft treibt Wirtschaft. Auch die Zivilisation?* (S. 49–55). Leykam.

Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträßer & B. Winkelmann (Hrsg.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (S. 367–378). Kluwer.

Pohlkamp, S. (2021). *Normative Modellierung im Mathematikunterricht. Bildungspotenzial, exemplarische Sachkontexte und Lernumgebungen*. RWTH Aachen University. https://doi.org/ 10.18154/ RWTH-2021-08443.

Pohlkamp, S., & Heitzer, J. (2020). Citizen Empowerment in Mathematics Curriculum: Design of Exemplary Digital Learning Environments. In A. Donevska-Todorova et al. (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)* (S. 287–294), https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02932218.

Skovsmose, O. (1998). Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 30 (6), 195–203.

Ullmann, P. (2008). *Mathematik – Moderne – Ideologie. Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik*. UVK.

Vohns, A. (2010). Die Mathematisierung der Menschenwürde. Ein mathematikdidaktischer Kommentar zum „Hartz IV"-Urteil des Bundesverfassungsgerichts. *Mitteilungen der GDM*, 89, 4–12.

Vohns, A. (2013). Relative Armutsgefährdung – nur eine Zahl?. *Der Mathematikunterricht*, 59 (4), 49–58.

Vohns, A. (2015). David Kollosche: Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts. *Mitteilungen der GDM*, 99, 57–60.

Vohns, A. (2017). Einkommensteuertarife mit Schulmathematik erkunden – Ein Zugang aus bildungstheoretischer Perspektive. *Der Mathematikunterricht*, 63 (3), 3–13.

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der GDM*, 105, 8–21.

Volk, D. (1993). Anwendungsorientierung oder Handlungsbezug? Der Mathematikunterricht als Werkstatt der Aufklärung. In W. Blum (Hrsg.), *Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht* (S. 133–146). Franzbecker.

Winter, H. (1989). Lernen für das Leben? Die Lebensversicherung. *Der Mathematikunterricht*, 35 (6), 46–66.

Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. *Grundschule*, *26*(3), 10–13.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM*, 61, 37–46.

Wolfram MEYERHÖFER, Schulzentrum am Stern, Potsdam; FU Berlin
wolfram.meyerhoefer@szas.de

Die Corona-Krise als Krise der mathematischen Bildung

Die Kernfrage der Corona-Krise war: „Ist dieser Virus so gefährlich, dass man Menschen in ihren Grundrechten einschränken darf, um den Virus einzudämmen?" Befürworter und Gegner der Corona-Maßnahmen bedien(t)en sich mathematischer Argumente. Im Text werden zwei Thesen verfolgt: 1. In den verwendeten mathematischen Modellierungen wurden viele implizite Modellierungsannahmen nicht wahrgenommen bzw. hinterfragt. 2. Im Kontext von Corona wurde mit Messungen ohne Eichung gearbeitet, dadurch ergaben sich viele inadäquate Situationswahrnehmungen. Diese Problemfelder werden im Text dem Mathematikunterricht zugeschrieben. Dieser erzeuge „Mathematismus", eine Art naiven Glauben an die adäquate Darstellung von Welt-Phänomenen durch Zahlen.

Wenn Andreas Vohns über mathematische Bildung gesprochen oder geschrieben hat, dann bestach das immer durch die Vielfalt der Ideen und Gegenideen, durch den Versuch, Gegensätzliches zusammenzudenken und scheinbar Gleiches in seinen Differenzen zu erkennen. Man kann auch sagen, er schleppte schwer am Rucksack des Bildungsdiskurses – und er versuchte, das Scharfe im Unscharfen und das Produktive im Unproduktiven zum Weiterdenken zu nutzen.

Nichtsdestotrotz ziehen sich zwei bildungskonzeptionelle Ansätze durch sein gesamtes Werk. Das sind zum einen die Ideenfelder von Heinrich Winter, wobei er oftmals paradigmatisch die drei Grunderfahrungen aus „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung" zitierte. Und das ist zum anderen die Ideenwelt von Roland Fischer, an dessen Ansatz der Kommunikationsfähigkeit des Laien mit dem mathematischen Experten er sich kritisch abgearbeitet hat. Eine Klammer für seine Auseinandersetzungen bilden sicherlich Vohns (2007) und Vohns (2018).

In diesem Essay möchte ich Vohns ein wenig folgen. Ich werde den Begriff des „Mathematismus" einführen; mit diesem Begriff versuche ich, in einem ersten Zugriff eine bestimmte Grundtendenz von Mathematikunterricht zu greifen. Als *Rahmen* kann man sich dabei folgende Fragen denken:

1. Werden in den beschriebenen Phänomenen von Mathematikunterricht und von Mathematik-Rezeption „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art" (Winter, 1995, S 38) wahrgenommen und verstanden? Wenn Mathematikunterricht sich mit der Realität befasst, dann wird diese Realität eigentlich immer in einer spezifischen Art wahrgenommen und vielleicht auch verstanden. Es wird sich eher zeigen, dass die Spezifik dieser Wahrnehmung sehr unterschiedlich ist und inwiefern der mathematische Blick keineswegs objektiv ist.

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 165–180). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

2. Werden in den beschriebenen Phänomenen von Mathematikunterricht und von Mathematik-Rezeption „mathematische Gegenstände und Sachverhalte, …, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen“ (ebd.) gelernt und begriffen? Hier liegt mein Fokus nicht so sehr auf dem Charakter dieser Welt eigener Art, sondern mehr darauf, inwiefern der Mathematikunterricht darüber reflektiert, dass die Übertragung von Realien in diese Welt Verluste und Bereicherungen zwingend mit sich bringt.

3. Wenn man mit Roland Fischer dem Mathematikunterricht die Funktion zuschreibt, eine Fähigkeit aller Schüler/innen zu Kommunikation mit mathematischen Experten auszubilden, was soll dann eigentlich der Charakter dieser Kommunikation sein? Andreas Vohns hat viel über die Gefahr nachgedacht, dass hier eine affirmative Mathematik-Gläubigkeit entsteht. Für ihn war immer die Frage, auf welche Weise diese kommunikative Bildung dem Anspruch des mündigen Staatsbürgers zutragen kann (Vohns, 2015).

Mathematikunterricht, Mathematismus und die Corona-Krise

Im Kontext der gesellschaftlichen Beurteilung der Gefährlichkeit von Sars-Cov-2 und der politischen Maßnahmen rund um Corona wurden mathematische Modellierungen zu einem zentralen Sujet der öffentlichen ebenso wie nichtöffentlicher Debatten. Diese Modellierungen dienten – wenn man es fokussiert formuliert – zur Einschätzung der Gefährlichkeit des Virus. Die Kernfrage war: Ist dieser Virus so gefährlich, dass man Menschen in ihren Grundrechten einschränken darf, um den Virus einzudämmen? In die Zukunft gefragt: Wollen wir auch künftig entlang mathematischer Modelle entscheiden, dass Grundrechte eingeschränkt werden? Wenn ja: Welche Modelle sollen dazu genutzt werden, und in welcher Weise sollen die so gewonnenen Deutungen in Einschränkungen von Grundrechten und anderen Freiheiten übersetzt werden?

Die *Thesen dieses Textes* sind: 1. In vielen Argumentationen, die mit mathematischen Modellierungen arbeiten, werden viele implizite Modellierungsannahmen nicht wahrgenommen bzw. hinterfragt. Die Unterschiedlichkeit von Deutungen derselben Situation ergibt sich aber aus diesem Implizierten. 2. Im Kontext von Corona wurde mit Messungen ohne Eichung gearbeitet, dadurch ergaben sich viele inadäquate Situationswahrnehmungen.

Anders gesagt: Unterschiedliche Deutungen ergeben sich daraus, dass Menschen in den gleichen Zahlen sehr unterschiedliche Abbildungen von Realität sehen. Entlang der gesellschaftlichen Polarität des Themas kann man das zuspitzen: Die scheinbar unsinnigen bzw. vermeintlich nicht verstehbaren Deutungen der jeweiligen Gegenseite entstehen auch daraus, dass die impliziten Modellierungsannahmen der jeweiligen Positionen nicht Gegenstand des Diskurses werden.

Woher kommt nun dieser gewissermaßen blinde, ideologieanfällige und sachlich nicht adäquate Umgang mit Modellierungen? Die 3. These dieses Textes ist, dass

Mathematikunterricht dieses Defizit hervorruft. Er erzeugt keinen tiefgründigen, sachadäquaten und kritischen Umgang mit mathematischen Modellierungen, sondern er erzeugt Zahlengläubigkeit. Ich spreche dabei von „Mathematismus“. Diesen Begriff habe ich in Meyerhöfer (2015) eingeführt und in Meyerhöfer (2016) vertieft. Er beschreibt den (oft impliziten) Glauben,

- dass die Mathematik ewige Wahrheiten produziert,
- dass man mit mathematischen Techniken immer ein richtiges Resultat erhält,
- dass man über einen Gegenstand eine gültige Aussage produzieren kann, wenn man ihn mathematisch modelliert,
- dass man mit Mathematik eine Art „richtigen“, einen objektiveren, gültigeren, adäquateren Blick auf die Welt als mit anderen Modi der Weltdeutung erzeugen könne. (Meyerhöfer, 2016, S. 81)

Ausflüsse des Mathematismus findet man z.B. in Messskalen für Intelligenz, für Ängstlichkeit, für das Bruttosozialprodukt oder für religiöse Kompetenz, ebenso aber in den Konstrukten von PISA oder VERA, in den Matchingkonstruktionen von Partnerschaftsbörsen oder in zahlenhaften Urteilen über den Geschmack von Schokocreme. Der zentrale soziale Ort für die Konstruktion des Glaubens an die Sachadäquatheit solcher Modellierungen ist der Mathematikunterricht.

In diesem Text untersuche ich zunächst, inwieweit der im Mathematikunterricht übliche bzw. in den Konzeptionen von Modellierungen angestrebte Umgang mit Modellierungsannahmen bereits systematisch Mathematismus anlegt. Im Anschluss wird die These verfolgt, dass auch die Corona-Maßnahmen als Ausschwitzungen oder Ausblutungen von Mathematismus zu verstehen sind.

In meinem Vortrag habe ich mich dabei auf den Halbbildungsbegriff von Adorno bezogen (vgl. Adorno, 1971a; ergänzend auch 1971b). Es zeigt sich, dass Mathematikunterricht in der Tat als eine Art Klassiker der Erzeugung von Halbbildung gelesen werden kann. Im Sinne der Kompaktheit des Textes wird dieser Argumentationsstrang im vorliegenden Text aber nicht weiter verfolgt.

Erzeugung von Zahlengläubigkeit Teil 1: Eins und eins ist immer zwei

Der Anfang aller Zahlengläubigkeit scheint mir die Behauptung zu sein, dass eins und eins immer zwei sei. Diese Behauptung wird alltagssprachlich häufig verwendet, um zahlenhafte Argumente als unzweifelhaft zu behaupten, auch in der Corona-Debatte hörte man diesen Allgemeinplatz immer wieder. Dieser Glaubenssatz wird spätestens mit dem Schulbeginn an Kinder herangetragen. Im Mathematikunterricht wird dort die Aussage „eins und eins ist immer zwei“ gleichgesetzt mit der Aussage „Eins plus Eins ist immer Zwei“ bzw. $1 + 1 = 2$.

Um diese Aussage zu irritieren, schlage ich Kindern vor, dass 1+1=1 ist: Wenn an einer Fensterscheibe zwei Regentropfen sind, die zusammenfließen, dann entsteht aus einem und noch einem Tropfen ein gemeinsamer neuer Tropfen, also ist 1+1=1. Im Zuge der Diskussion dieser Behauptung ergibt sich oft folgendes Argument: „Naja, bevor sie zusammengeflossen sind, da sind es doch ein Tropfen und noch ein Tropfen, das sind doch 2 Tropfen, also ist 1+1=2." Nun lässt sich gut herausarbeiten, dass sich nicht entscheiden lässt, ob mit diesen Bildern 1+1=1 oder 1+1=2 gilt. Es gibt keine objektive Wahrheitsinstanz.

Noch schlimmer wird es, wenn ein großer Fisch einen kleinen Fisch frisst. Zum einen weiß man da nicht, ob der kleine Fisch im Ganzen gefressen wurde, also noch als Einsheit existiert. Wenn aber der kleine Fisch im Ganzen im Bauch des großen ist, ist er dann noch existent oder nicht? Von der Antwort hängt ab, ob 1+1=1 oder 1+1=2 gilt. Wenn der kleine Fisch im Ganzen im Bauch des großen ist, lässt sich wiederum darüber diskutieren, zu welchem Zeitpunkt er nicht mehr existiert, zu welchem Zeitpunkt also aus 1+1= 2 eher 1+1=1 geworden ist.

Man könnte nun versucht sein, diese Verwirrung dadurch zu lösen, dass man ein mathematisches Konstrukt schafft, in dem Eins plus Eins gleich Zwei ist oder in dem beide Lösungen möglich sind. Nun kann aber ein Kind sagen: „Mama und Papa haben mich gemacht, also ist aus Eins und Eins Drei geworden." Dies ist keine absurde Sichtweise, sondern diese Mathematik hat nur einen etwas anderen Blick auf Mengen als die heute übliche Mathematik. Diese stört sich bei dieser Sichtweise daran, dass damit zum Beispiel auch 1 + 1 gleich 4 sein könnte, weil Mama und Papa ja auch noch ein zweites Kind bekommen könnten. Man sieht, dass diese Mathematik eine gewissen Beliebigkeit erzeugt: Man kann nahezu alle Zahlen als gleich „hinbiegen".

Diese Verwirrung entsteht durch die Gleichsetzung der Aussage „eins und eins ist immer zwei" mit der Aussage „Eins plus Eins ist immer Zwei" bzw. 1 + 1 = 2. Die erste Aussage arbeitet auf der Ebene des Realen. Die realen Gegenstände sind hier bereits Mengenelementen zugeordnet, das sieht man an der Nutzung der Bezeichnung „eins". Sie kennzeichnet, dass einem Gegenstand die mengenhafte Eigenschaft der Einsheit zugeordnet wurde. In den obigen Beispielen ist diese Zuordnung problematisiert an der Stelle, an der der kleine Fisch sich im Bauch des großen Fisches auflöst. Dabei verliert er seine Zuordenbarkeit zur Einer-Menge. Ein vergleichbares Phänomen wird weiter unten bei den Betrachtungen zu den Corona-Zahlen diskutiert. Dort wird die Frage gestellt, was ein Corona-Toter ist – und es wird sich herausstellen, dass die Zuordnung eines realen Toten zur mengenhaften Einsheit eines Corona-Toten nicht sachadäquat ist.

Hinzu kommt nun aber, dass die Operation „plus" in den realen Beispielen anders konstruiert ist als in der mathematischen Abbildung der Situation: Das mathematische Konstrukt der Addition bezieht sich auf einen Prozess, bei dem Mengenelemente verschiedener Mengen vereint werden. Die (im Mathematikunterricht

zumeist unausgesprochene) Bedingung dabei ist, dass die Mengenelemente disjunkt sind und bleiben. Es verschmelzen dabei niemals Mengenelemente (Regentropfen) oder generieren neue Elemente (Elternschaft). Man wechselt auch nicht einfach die Betrachtungsebene wie bei den beiden Fischen, wo man einmal nur den großen Fisch betrachtet und einmal auch einem Gegenstand in seinem Inneren (dem kleinen Fisch) einen Einsheitscharakter zuordnet.

All diese Spezifika der Operation werden nun aber im Mathematikunterricht im Regelfall nicht thematisiert. Die verwendeten Materialien sind qua Konstruktion disjunkt und bleiben beim Handeln mit ihnen auch unverändert. Es werden zudem ausschließlich reale Beispiele diskutiert, bei denen die mathematischen Bedingungen erfüllt sind. Sind sie nicht erfüllt, so werden die Abweichungen geglättet. So kann es passieren, dass mit Äpfeln oder Keksen gerechnet werden soll und dass Kinder Fälle zur Sprache bringen, in denen Äpfel verfault oder Kekse aufgeweicht sind. Diese Einwürfe werden dann als Unterrichtsstörung markiert, und die Kinder lernen schnell, dass im Unterricht eine Debatte über die Geltung von Modellierungsbedingungen nicht erwünscht ist.

Die Ursachen für diese Glättungen sind disziplinatorischer Natur und liegen u. a. in der Furcht von Lehrkräften vor Debatten, die sehr schnell fachlich anspruchsvoll werden. Sie liegen aber ebenso darin, dass Lehrkräfte selbst dem Mathematismus folgen und glauben, dass Zahlen die Realität adäquat abbilden. Umgekehrt erkennen auch Lehrkräfte, die selbst gar nicht an die Schlagkraft der Zahlen für die Abbildung von Realität glauben, oftmals nicht, dass eins und eins nicht immer zwei ist und, dass dies im Unterricht auch thematisch werden muss.

Erzeugung von Zahlengläubigkeit Teil 2: Eine vorbildliche Aufgabe

Der Mathematikunterricht an Schulen legitimiert sich nicht als Spiel mit Zeichenketten oder als Unterricht im Ausbau von Theoriegebäuden. Er legitimiert sich als Unterricht, der brauchbares Wissen vermittelt. Der Umgang mit mathematischen Gegenständen soll dabei helfen, reale Probleme zu bearbeiten. Mathematikunterricht hat also das Modellieren immer schon gelehrt.

Umgekehrt wird das mathematische Wissen und Können immer an das Denken der Schüler angebunden, es entsteht also aus einem Denken in Realien heraus. Man kann auch das Herausziehen von Mathematik aus Realien als Modellbildung oder als eine Art Modellierung – oder als umgekehrte Modellierung – ansehen.

Im Ganzen ist also eine bildsame Befassung mit Schulmathematik immer mit Modellierungen verbunden. Bestandteil des Diskurses über mathematische Bildung war immer auch die Frage nach den Wichtungen von mathematischer Theoriebildung, mathematischem Handwerk und Modellierungsfähigkeiten. Nun hat sich spätestens mit PISA und den daraus herausgefaserten Standards für den deutschen Mathematikunterricht ein Jargon durchgesetzt, der Modellierungen zum Kern des

Mathematikunterrichts erklärt. Deshalb soll nun auch ein Beispiel betrachtet werden, das sich jener Form von Modellierungen widmet, die als beispielhaft für den heute angestrebten Mathematikunterricht gelten.

Das nachfolgende Beispiel kann dabei als prototypisch gelten. Es entstammt Blum et al. (2006), das ist ein „Implementationsbuch“ zu den Bildungsstandards. Herausgeber ist u. a. Werner Blum, der als einziger Mathematikdidaktiker in der Kommission, die die ersten Mathematik-Bildungsstandards erarbeitet hat, eine exponierte Rolle hatte. Vorgestellt wird die Aufgabe in der Wochenzeitung „DIE ZEIT“ Nr. 42 vom 12.10.2006. Dort feiert der Redakteur Thomas Kerstan die Bildungsstandards als „Kleines Wunder“ und berichtet begeistert einige Aufgaben. Man kann sicherlich mit Fug und Recht behaupten, dass Thomas Kerstan einer der bekanntesten und einflussreichsten Bildungsjournalisten des Landes war und ist. Die Aufgabe ist also von zwei Experten für den deutschen Bildungsdiskurs als vorbildlich und exemplarisch eingeführt. Ich habe in dem Buch „Bildungsqualen“ (Meyerhofer, 2015) diese Aufgabe interpretiert und möchte diese Interpretation hier zunächst sehr verkürzt wiedergeben.

In einer Talkshow greift ein Politiker der Oppositionspartei die Regierung für ihre Wirtschaftspolitik an und benutzt dazu die Grafik zu Verbraucherinsolvenzen. Der Vertreter der Regierungspartei nutzt das gleiche Datenmaterial, um zu belegen, dass die Wirtschaftspolitik der Regierung erste Erfolge zeigt. Versetze dich in die Rolle der beiden Politiker, und finde Argumente für jeden der beiden, die durch das Zahlenmaterial belegbar sind.
Tipp: Der Regierungsvertreter hat zuvor berechnet, um wie viel Prozent die Pleiten jeweils gegenüber dem Vorjahr zugenommen haben.

Abbildung 2: Beispielaufgabe aus Blum et al. (2006)

> Wir haben eine klassische Situation des Gebrauchs von Zahlen im politischen und medialen Raum: Partei A arbeitet mit absoluten Zahlen, Partei B arbeitet mit Prozentzahlen, und die Aussagen widersprechen sich. Hier endet die Aufgabe, und man würde im Bildungsstandards-Test einen Punkt erlangen, wenn man die genannte prozentuale Argumentation gibt. (Meyerhöfer, 2015, S. 108)

Warum ist dies nun Mathematismus? Hier wird mit der impliziten Annahme gearbeitet, dass steigende Insolvenzzahlen ein Indikator für eine schlechte Wirtschaftspolitik seien. Das ist aber sachlich völlig inadäquat:

Verbraucherinsolvenzen wurden 1999 geschaffen. Im Jahre 2001 wurden die Regeln deutlich verändert. Man wollte die Anzahl der Insolvenzen erhöhen, um mehr Menschen einen Ausweg aus ihrer Überschuldung zu schaffen. Was wir in der

Grafik sehen, ist also kein Trend der „Wirtschaftspolitik“, sondern eine Entwicklung nach Einführung eines Instrumentes bzw. nach einer Veränderung der Regeln zu diesem Instrument. Ein Politiker, der hier eine *prozentuale* Argumentation zur Legitimierung einer abstrakten „Wirtschaftspolitik“ führt, arbeitet also am Problem vorbei – ebenso wie der, der mit absoluten Zahlen arbeitet. Für einen Bildungsprozess müsste man gerade das Gegenteil dessen tun, was die Standards hier wollen: Man müsste die *Grenzen* des mathematischen Blicks thematisieren statt mathematistisch den Glauben an Zahlen zu perpetuieren (ebd.).

Ich möchte nun nicht behaupten, dass es im Mathematikunterricht nur solche Misslingensbeispiele für Modellierungen gibt. Das Besondere der Aufgabe ist, dass sie von einflussreichen Akteuren des Bildungsdiskurses als besonders gelungen gekennzeichnet ist, was darauf verweist, dass sie prototypisch ist. In Meyerhöfer (2015 und 2016) werden weitere Beispiele diskutiert. Wenn man mit einem durch diese Analysen geschärften Blick auf Mathematikunterricht und seine Lehrwerke schaut, dann erkennt man, dass eine vergleichbare Herausbildung von Mathematismus dort ein durchgehendes Sujet ist.

Auch auf der Ebene des Rechnens ohne Modellierungskontexte kann man dieses Problem erkennen. In der Mathematikdidaktik gibt es einen umfassenden Diskurs über die technische Orientierung des Mathematikunterrichts. Beklagt wird die Einarbeitung in Prozeduren, gefordert wird eine verständige Begründung von Prozeduren. Auch die prozedurale Orientierung ist eine Einarbeitung in den Glauben an Zahlen: Die Suggestion ist einerseits, dass man mit Zahlen oder Variablen sinnvolle und wahre Aussagen erzeugen kann und dass man dies auch kann, wenn man nicht versteht, warum die Prozedur – also das Rechenverfahren – überhaupt korrekte Resultate produziert. Genau in dieser unverständigen Verwendbarkeit kann man sogar eine Stärke der Prozeduren sehen.

Tiefergehende Einordnungen dieser Phänomene finden sich bei Phillip Ullmann (2008) und David Kollosche (2015). Ullmann spitzt seine Erkenntnisse zu auf die Formulierung von „Mathematik als Ideologie der Moderne“ (S. 17) und spricht von ihrem „maßlosen Geltungs- und Wahrheitsanspruch“ (S. 15). Kollosche konstatiert:

> Es zeigt sich, dass das Mathematische genutzt werden kann, um Einigkeit in der Gesellschaft herzustellen oder zu erzwingen. Die Grundlagen für diese Machtausübung bietet eine Sozialisation im Mathematischen, welche im Einzelnen ein unkritisches Vertrauen ins Mathematische verankert und ihn somit zum Komplizen oder wenigstens zum stillen Erdulder des Mathematischen macht. (2015, S. 231)

Zahlengläubigkeit in der Corona-Krise, Teil 1: Was ist ein Covid-19-Opfer? – Anzahlen bestimmen

Gemeinsam mit David Kollosche habe ich in einem Sonderheft der *Educational Studies in Mathematics* mit dem Titel „Mathematics Education in a Time of Crisis – a Viral Pandemic“ den Umgang mit mathematischen Konstrukten in der Corona-Debatte untersucht (Kollosche/Meyerhöfer 2021). Wir betrachten dort u. a. die Konstrukte zur Sterblichkeit, den R-Wert zur Ansteckungsrate und die Behauptungen zu einer exponentiellen Entwicklung von Pandemie-Parametern. Ich möchte hier die Betrachtungen zur Anzahl der Opfer verkürzt vorstellen.

Wir waren in der Corona-Debatte mit verschiedenen Opfer-Zahlen konfrontiert. Es gab offenbar einen Modus zur Bestimmung der Anzahl von Infizierten, von Erkrankten mit verschiedenen Schweregraden der Erkrankung, von Hospitalisierten, von Intensiv-Patienten und von Gestorbenen. Diese Anzahlangaben arbeiten offenbar mit der Annahme, dass das Gezählte sinnvoll in einer Kategorie zusammenfassbar ist, dass also – zugespitzt gesprochen – bei den vorliegenden Daten eins und eins sinnvoll zu zwei zusammengezählt werden können.

Wir haben bereits oben darüber nachgedacht, unter welchen Bedingungen eins und eins gleich zwei ist: Die beteiligten Mengen müssen disjunkt sein und bleiben, die Zuordnung einer Realie zu einer Einsermenge muss stabil bleiben. Hier kommt nun ein weiterer Aspekt des Abzählens hinzu, nämlich die Frage: Was kann man überhaupt abzählen bzw. unter welchen Umständen ist es überhaupt sinnvoll, eine mengenhafte Realie mit der Zahl 1 zu belegen? Dies ist auch für den Mathematikunterricht ein zwar kaum beachtetes, aber nicht triviales Problem. Für Kinder ist keineswegs immer durchschaubar, was man überhaupt sinnvoll zahlenhaft darstellen kann und welche Mengen man sinnvoll rechnerisch miteinander in Beziehung setzen kann. In einem Kursmaterial für Erwachsene, die nicht rechnen können, thematisieren wir deshalb z. B., unter welchen Umständen man Äpfel mit Birnen vergleichen bzw. addieren kann. Wir thematisieren Kategorienbildungen mit Ober- und Unterbegriffen und diskutieren, wie sich daraus Möglichkeiten und Unmöglichkeiten, die Dinge miteinander zu verrechnen, ergeben (vgl. Meyerhöfer, 2017).

Schauen wir also exemplarisch, wie aus der Realie „ein Toter“ die Einermenge „ein Corona-Toter“ konstruiert wird. Eine naheliegende Idee wäre: Jemand kommt mit Grippesymptomen ins Krankenhaus, wird auf Corona getestet, dann ein paar Tage betreut, und dann stirbt er. Das kommt manchmal auch so vor, aber die Corona-statistische Praxis zählt auch folgende Fälle:

- Jemand kommt mit Krebs oder nach einem Motorradunfall ins Krankenhaus, wird positiv auf Corona getestet, dann stirbt er, und dann zählt er als Corona-Toter.
- Jemand stirbt an etwas nicht näher Eruierten, dann wird an dem Toten ein Corona-Test gemacht, und dann zählt er als Corona-Toter.

- Jemand liegt im Sterben, er infiziert sich bei einem Besucher mit Corona, dann wird ein Corona-Test gemacht, er stirbt, und dann zählt er als Corona-Toter.

Jemand, der *mit* Corona stirbt, zählt also als ein *durch* Corona Gestorbener. Ich habe dieses Problem bereits kurz nach den ersten Covid-Maßnahmen publiziert (Meyerhöfer, 2020), und es wurde auch ansonsten breit diskutiert, es wurde aber bis heute nicht gelöst. Im öffentlichen Diskurs hat sich lediglich die Bezeichnung „durch Corona Gestorbene" in „an oder mit Corona Gestorbene" verändert.

Ein wenig mehr Klarheit könnte eine Autopsie bringen. In Kollosche/Meyerhöfer (2021, S. 408 f.) diskutieren wir, dass Autopsien von „Corona-Toten" in den meisten Fällen eine Vielzahl von Todesursachen anzeigen. Mit dieser Perspektive erscheint die Zahl der Menschen, die nicht nur *mit*, sondern *aufgrund von* Covid-19 gestorben sind, als unmöglich zu bestimmen.

Man kann nun verschiedene Modelle erdenken, um adäquater abzubilden, „wieviel des Sterbens" wirklich etwas mit den SARS-CoV-2-Infektionen zu tun hat. Die Zahl der Covid-19-Opfer erscheint als Paradebeispiel der Formatierungskraft der Mathematik, wie Skovsmose sie beschreibt (vgl. die ausführliche Einordnung ebenda). Man kann zugespitzt sagen: Corona-Tote gibt es nicht, sie werden erst durch das mathematische Konstrukt „ein Corona-Toter" erzeugt. Nun wurde die Zahl der Corona-Toten im öffentlichen und politischen Diskurs zur Begründung von Einschränkungen von Bürgerrechten herangezogen. Deshalb wurde das Konstrukt „ein Corona-Toter" kritisch beleuchtet und von Gegnern der Corona-Maßnahmen als willkürliche Setzung zur Erzeugung von Panik wahrgenommen. Dieses Konstrukt ist allerdings keineswegs beliebig. Es stammt vom Konstrukt „Grippe-Toter" ab – und in diesem Kontext erscheint das Konstrukt nutzbringend und weder willkürlich noch zur Erzeugung von Panik konstruiert:

Virus-Grippen sind gefährliche Krankheiten, für deren Überwachung es schon lange einen Überwachungsmechanismus im Robert-Koch-Institut (RKI) gibt. Eine spezielle Arbeitsgruppe sichtet Daten aus einem festen Set von Laborpraxen, die Mitteilungen über eine Liste von im Laborbetrieb detektierten Krankheitserregern weitergeben. Im Grunde wird hier eine halbwegs repräsentative Dauererhebung geleistet. Die RKI-Arbeitsgruppe nutzt diese Daten u. a., um Häufungspunkte von Krankheitsausbrüchen zu finden. Man kann dann an diesen Orten bestimmte Maßnahmen zur Problemeindämmung ergreifen.

Diese RKI-Arbeitsgruppe erstellt aber auch Schätzungen über Grippe-Opfer. Wenn wir von der Anzahl der Grippe-Toten in einem Jahr lesen, dann sind das keine gemessenen Daten, sondern es handelt sich um Schätzungen mit Hilfe von mathematischen Modellen. Ein Datum, das in diese Schätzungen eingeht, ist die Anzahl von empirisch wirklich vorgefundenen Grippe-Toten. Auch diese Toten sind nicht unbedingt „an" Grippe gestorben. Auch „normale" Grippe-Tote sterben

oftmals mit mehreren Krankheiten und an mehreren Krankheiten. Es ist aber sinnvoll, sie als „Grippe-Tote“ zu kategorisieren, weil dies ermöglicht, das Datum „ein Grippe-Toter“ überhaupt zu erzeugen. Wenn man hier z. B. eine Kategorie „multiple Ursachen“ nutzen würde, dann hätte man viel zu wenig Elemente der Kategorie „Grippe-Tote“, um das mathematische Modell „Grippe-Tote“ zu bestücken. Salopp gesprochen: Wenn man ein Lagebild zur Grippe erstellen will, dann benötigt man halt halbwegs brauchbare Daten für ein ungefähres Bild der Lage. (Zu einem inadäquaten Vorgehen wird das erst in dem Moment, in dem man anfängt, in einem nie zuvor genutzten Maße Lebende und Tote zu testen und mit den so entstehenden Zahlen politische Maßnahmen zu legitimieren. Man bildet damit ja zunächst nur ab, dass man mehr Personen als bislang üblich getestet hat. Dieses Problem der fehlenden Eichung der vorgenommenen Messung soll nun im Weiteren untersucht werden.)

Zahlengläubigkeit in der Corona-Krise, Teil 2: Panik als Resultat von Messungen ohne Eichung

Die ersten Corona-Maßnahmen wurden in Deutschland im Februar 2020 angewiesen. Grundlagen waren überspitzte Darstellungen der WHO zur Tödlichkeit von Sars-Cov-2 (vgl. Kollosche/Meyerhöfer, 2021, S. 406 f.). Bereits zu dieser Zeit erschienen die ersten Studien, die zeigten, dass die Letalität von Sars-Cov-2 lediglich in der Größenordnung herkömmlicher Influenzaviren liegt (ebd.). Im Weiteren gab es viele Studien, die mit unterschiedlichen Modellen zu unterschiedlichen Einschätzungen der Gefährlichkeit von Sars-Cov-2 kamen. Im politischen und öffentlichen Diskurs wurden diese unterschiedlichen Einschätzungen aber nicht zur Kenntnis genommen, sondern es verdichtete sich ein Panik-Modus. Ein zentrales Element dieses Modus war die Arbeit mit Messungen ohne Eichung. Hierzu einige Beispiele:

Bist du krank? Bin ich krank?

Die Frage aller mathematischen Modelle rund um Corona lautet: Ist dies ein Virus, welches so gefährlich ist, dass seine Eindämmung die Einschränkung von Bürgerrechten und anderen Freiheiten legitimiert? Dazu muss man die Gefährlichkeit von Sars-Cov-2 und von Covid-19 mit der Gefährlichkeit herkömmlicher Viren und Krankheiten vergleichen. Man muss also alle Parameter der Gefahrenbeschreibung an der Normalität von Krankheit eichen.

Die größte Eichungsverschiebung im Kontext von Corona liegt in der Neudefinition des Krankheitsbegriffs. Es gab auch vorher vielerlei Krankheitsdefinitionen, aber allen gemeinsam war, dass ein Individuum (oder seine Umgebung) irgendeine Art von Problem verspüren musste, um als „krank“ gelten zu können. Es war nicht möglich, zum Arzt zu gehen und zu sagen: „Ich habe keinerlei Probleme, bitte schreiben Sie mich krank.“ Im Falle von Corona ist man dazu sogar qua Strafandrohung verpflichtet worden.

Mit der Neusetzung von PCR-Tests als Standardtests wurde der Krankheitsbegriff völlig neu gefasst. PCR-Tests messen kein Unwohlsein, und sie messen nicht einmal das Vorhandensein eines Virus oder einer bestimmten Virusmenge. Sie messen lediglich das Vorhandensein von Genschnipseln eines Virus – das Vorhandensein von Viren und auch die Virusmenge muss dann erst abgeleitet werden. Im Jahr 2020 wurde man als krank gelabelt, wenn man nur minimalste Mengen an Genschnipseln aufwies. Es gab gesunde mehrköpfige Familien, die über mehrere Monate in Quarantäne gehalten wurden, weil für die Aufhebung der Quarantäne immer wieder alle Familienmitglieder getestet wurden und immer wieder irgendein Familienmitglied positiv getestet wurde. Später wurden dann zwar Minimalwerte für Viruslasten festgelegt, aber bis heute wird man ohne Vorliegen von Krankheitssymptomen per positivem PCR-Test als krank kategorisiert. Ein Vergleich der Verbreitung oder der Gefährlichkeit von Sars-Cov-2 mit anderen Krankheiten ist somit nicht möglich, weil die Daten für andere Krankheiten nicht an ein positives Testergebnis, sondern an echtes Kranksein gebunden sind.

Aussagekraft von Massentestungen

Eine Vergleichbarkeit scheint dadurch herstellbar, dass man den Begriff des „symptomlosen Kranken“ geschaffen hat. Dieser Begriff ermöglicht die Abgrenzung zu positiv Getesteten, welche tatsächlich krank sind. Man nutzt dafür den Begriff der Person „mit Symptomen“, den man mit dem klassischen Krankseinsbegriff gleichsetzen könnte. Es liegt nun nahe, mit Hilfe dieser Kategorie abzuschätzen, ob man es mit einem besonders gefährlichen Virus zu tun hat, indem man Krankheitshäufigkeiten vergleicht.

Wenn man nun viel mehr Corona-Positive mit Symptomen findet als man zum Beispiel Atemwegs-Kranke in vorherigen Jahren gefunden hat, so scheint dies anzuzeigen, dass ein Problem vorliegt. In genau dieser Weise wurde die Anzahl der positiv Getesteten (mit oder ohne Symptome) ja auch verwendet. Die schiere Menge der „Kranken mit Symptomen“ schien ein Problem anzuzeigen. Nun liegt aber auch hier eine Messung ohne Eichung vor. Man hat vor Corona zu keinem Zeitpunkt eine Massentestung der Bevölkerung oder aber eine repräsentative Testung der Bevölkerung auf Atemwegserkrankungen oder auf irgendeine Erkrankung hin vorgenommen. Deshalb lässt sich aus der Anzahl der positiv Getesteten keinerlei Aussage darüber ableiten, ob Corona gefährlicher oder auch nur verbreiteter ist als die bislang vorfindlichen Atemwegserkrankungen.

Das gilt auch für die „Inzidenz“, die die Anzahl der positiv Getesteten auf 100.000 Einwohner bezieht. Es lässt sich einfach nicht sagen, welcher Inzidenzwert „normal“ ist und welcher Inzidenzwert ein Problem anzeigt.

So wurde im Sommer 2020 unter Berufung auf Expertenpositionen bundesweit eine Inzidenz von 50 als Zielmarke ausgegeben, ab der wieder Maßnahmen verschärft werden sollten. Dann wurden plötzlich bereits ab dem Wert 35 Maßnahmen eingeleitet, dann wurde die Marke 100 für neue Maßnahmen benutzt, dann

200. In Potsdam setzte der Oberbürgermeister dann z. B. einfach die Zahl 300, ab der Kitas geschlossen werden sollten. Im Jahr 2021 erreichte man lokal vierstellige Inzidenzen, und im Jahr 2022 wurden bei Inzidenzen von 400 bestimmte Maßnahmen gelockert.

Ein „Normalwert" lässt sich allerdings bis heute für kein Virus angeben, eine Eichung ist nicht erfolgt. Ebenso wurde bislang nicht systematisch fixiert, welche Testdichte man in der Bevölkerung benötigt, um zu einer Aussage über die Gefährlichkeit eines Virus zu kommen. Über weite Strecken der Corona-Zeit hinweg ließ sich nicht abschätzen, ob die Steigung von Inzidenzen lediglich ein Effekt vermehrten Testens ist. Lediglich in jenen Zeiten, als man stabil über Wochen hinweg breite Teile der Bevölkerung zu Tests zwang, konnte man die Inzidenzen dieses Zeitraumes untereinander halbwegs sinnvoll vergleichen.

Überlastung des medizinischen Systems

Im Diskurs um eine eventuelle Überlastung des medizinischen Systems spielen viele Problem ineinander. Hier wurde nicht nur mit Messungen ohne Eichung gearbeitet, sondern vermeintlich scharfe Daten erweisen sich als sehr unscharf. In Kollosche/Meyerhöfer (2021) werden Parameter diskutiert, die andere Inhalte haben als im Zuge ihrer Nutzung impliziert wurde. Bei den Daten zum medizinischen System deutet sich nun an, dass diese zwar für normale Zeiten bestimmte wirtschaftliche Erwägungen ermöglichen, dass sie aber in Krisenzeiten ihre Aussagekraft über weite Strecken verlieren.

Ein Hauptziel der Corona-Politik war es, eine Überlastung des Gesundheitssystems zu vermeiden. Zentral hierbei war es, genug Krankenhausbetten und insbesondere Intensivbetten zur Verfügung zu haben. Es sollten Bilder von überfüllten Krankenhäusern wie aus Italien oder Frankreich vermieden werden.

Deutschland hatte im Jahr 2020 pro Einwohner etwa doppelt so viele Intensivbetten wie Italien oder Frankreich. Es waren mehr als 28.000[1], das sind 34 pro 100.000 Einwohner. Hinzu kamen zusätzlich über 12.000 Betten als freie Notfallreserven[2], die innerhalb einer Woche mobilisiert werden können.[3] Man hätte also bereits im Jahr 2020 eine politische Argumentation entwickeln können, dass die hohen Gesundheitsaufwendungen in Deutschland einen Verzicht auf Pandemie-Maßnahmen ermöglichen. Die Berliner Morgenpost veröffentlicht einen Monitor der normalen und der Intensivbetten, dem man entnehmen kann, dass in Deutschland zu keinem Zeitpunkt der Corona-Maßnahmen Intensivbetten so knapp waren, dass auch nur die Reserve hätte genutzt werden müssen.

Nun merkt man zunächst leicht, dass die o. g. Zahl des Statistischen Bundesamtes nicht mit der Zahl im Morgenpost-Monitor übereinstimmt. Ich möchte mich hier aber gar nicht mit unterschiedlichen Zählweisen befassen, sondern möchte zunächst die These verfolgen, dass die Anzahl von Krankenhausbetten gar keine fixierte und fixierbare Zahl ist – und deshalb auch kein fixierter Parameter von

„Gefahren-Ampeln“ sein kann. Ich habe dazu in einem populärwissenschaftlichen Artikel exemplarisch die Stadt Potsdam betrachtet[4]:

Potsdam hatte im Jahr 2020 ungefähr 175.000 Einwohner und 2 Krankenhäuser mit Intensivbetten. Es stellt sich heraus, dass eine fixierte Angabe der „Corona-Betten“ nicht sinnvoll möglich war. Man konnte sinnvoll von 18 Betten sprechen, aber ebenso sinnvoll von 26. Man konnte auch die Anzahl von 63 Beatmungsgeräten oder die Gesamtzahl der Intensivbetten von etwa 70 in den Fokus rücken. Welche Zahl soll dann als die „wahre“ Zahl gelten? Eine Analyse der Lokalberichterstattung (ebd.) zeigt, dass die Lokalpresse zwar anfangs über diese objektive Zahlenvielfalt berichtet, dann aber in der täglichen Berichterstattung immer mit den jeweils niedrigsten Bettenanzahlen arbeitet und deshalb über Monate hinweg permanent eine „besorgniserregende Lage“ detektiert.

Wenn ich mit Menschen darüber spreche, dass die Zahlen uns nur sehr begrenzt dabei helfen, die Gefahrenlage einzuschätzen, dann treffe ich auf den Glauben, dass die Zahlen „irgendwie schon eine Grundtendenz“ darstellen. Man sieht aber in der konkreten Betrachtung, dass dies keineswegs der Fall ist. Es gibt keine bundesweite Statistik, die transparent macht, ob in Prenzlau oder Buxtehude zwar 8 Betten in der offiziellen Bettenstatistik stehen, dann aber noch 3 Betten mobilisiert werden können, notfalls aber auch noch 6 oder 7 Betten aus der naheliegenden Kaserne geholt werden können und so weiter. Die Wahrheit liegt auch nicht irgendwo in der Mitte. Eine statische Zahl lässt sich nicht fixieren.

Eine weitere Eichung fehlt: Es wurde zu keinem Zeitpunkt politisch mit Daten darüber, welche Belegung von Intensivbetten „normal“ ist, argumentiert. Ohne ein solches Normal ist nicht fixierbar, ob z. B. eine Belegung von 20% der Intensivbetten durch Atemwegs-Patienten bereits eine „zugespitzte“ oder „angespannte“ Lage ist, welche sogar die Einschränkung von Grundrechten legitimiert.

Die Inadäquatheit eines statischen Modells „Bettenzahlen“ lässt sich auch leicht in einem Gedankenexperiment zeigen: In einer echten Gefahrenlage – in der die Einschränkung von Bürgerrechten in Rede stehen würde – wäre ein deutsches Krankenhaus in der Lage, deutlich mehr als das Doppelte der Normalbelegung aufzunehmen. Man kann unschwer jedem Krankenhausbett ein Feldbett hinzugesellen, und in einer Gefahrenlage würde das auch passieren. In einer Gefahrenlage würden Teilzeitkräfte Vollzeit arbeiten, berentete Pflegekräfte würden junge Freiwillige einarbeiten, und die Regierung würde es den privaten Krankenversicherungen erlauben, abweichend von Versicherungsverträgen Einzelzimmer mit zwei oder gar mehreren Patienten belegen zu lassen.

Der statische Umgang mit dem Parameter „Bettenauslastung“ ignoriert zudem den Charakter von Krankenhäusern als Wirtschaftseinheiten. Wenn ein Krankenhaus ausgelastet ist, dann zeigt dies keine Notlage an, sondern ein den Anforderungen entsprechendes Management. Eine *wirtschaftliche* Notlage entsteht, wenn

ein Krankenhaus *nicht* ausgelastet ist, und dann muss unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten die Krankenhausführung ausgetauscht werden. Auch die Auslastung von Intensivbetten unterliegt einer wirtschaftlichen Steuerung. Ein Patient im Zustand X wird je nach Auslastung der Intensivstation entweder dort oder auf einer Normalstation betreut. Es kann für diese Entscheidung keinen steinernen Standard geben, sondern nur Entscheidungs-Leitplanken.

Auch hier liegt eine Messung ohne Eichung vor: Wie voll waren die Krankenhäuser in den vorherigen Jahren? Wie überlastet war das Personal? Wir finden vor und hinter den Kameras viele Menschen, die beteuern, dass es noch nie so schlimm gewesen sei. Wir finden hinter den Kameras viele Menschen, die behaupten, dass es nie anders war und dass die Hilferufe des Personals immer unwichtiger waren als die Gewinnanforderungen der Krankenhausbesitzer.

Epilog

In der Zeit der Corona-Maßnahmen wurden Grundrechte und andere Freiheiten eingeschränkt. Grundlage war die Nutzung von quantitativen Parametern, mit deren Hilfe die Gefährlichkeit von Sars-Cov-2 behauptet wurde und mit deren Hilfe die Leistungsfähigkeit des medizinischen Systems abgebildet wurde.

Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass die verwendeten Parameter in ihrer Aussagekraft fehlerhaft und einseitig in Richtung eines Panikmodus gedeutet wurden (vgl. z. B. Kollosche/Meyerhöfer, 2021). In diesem Beitrag habe ich exemplarisch ausargumentiert, dass die Nutzung von Parametern ohne Eichung erfolgte und dass die Unschärfe der Parameter zu wenig beachtet blieb.

Ohne dass hier Platz für einen Beleg bliebe, möchte ich anmerken, dass die Phänomene der Nutzung von Messungen ohne Eichung und von unscharfen Parametern in beiden „Lagern“ – also im Lager „pro Maßnahmen“ ebenso wie im Lager der Maßnahmengegner – weit verbreitet sind. Meine These ist, dass dieser unkritische Umgang mit Zahlen durch den Mathematikunterricht erzeugt wird.

Ich habe oben angedeutet, dass im Mathematikunterricht von Klasse 1 an der Glaube erzeugt wird, dass die Beschreibung der Realität mit Zahlen eine adäquate und aussagekräftige Abbildung der Realität herstellt. Ich bezeichne diesen Glauben als Mathematismus. Stark vereinfacht gesprochen: Weil wir nie darüber sprechen, unter welchen Umständen 1+1 auch *nicht* zwei sein kann, glauben Menschen, dass es sinnvoll ist, den an Corona Gestorbenen mit dem mit Corona Gestorbenen zusammenzurechnen. Sie glauben, dass die so gewonnene Zahl 2 eine Bedeutung haben *muss*. Es ist außerhalb ihrer Vorstellungskraft, dass die so gewonnene 2 einfach gar nichts erzählt. Weil im Mathematikunterricht in Realkontexten jede Zahl (auch die überflüssigen Zahlen in offenen Aufgaben) eine inhaltliche Bedeutung hat, glauben Menschen, dass eine Inzidenz eine Bedeutung hat. Sie können sich nicht vorstellen, dass diese Zahl einfach „nichts erzählt“. Weil im Mathematikunterricht jede Aufgabe eine Lösung hat, glauben Menschen, dass die

Bettenzahl eines Krankenhauses oder die verfügbaren medizinischen Arbeitskräfte feste Größen sind – unabhängig davon, ob Normalbetrieb herrscht oder ob eine echte Pandemie vorliegt.

Ich formuliere hier mit Absicht keine Forderung nach mehr Mathematikunterricht. Man könnte ja glauben, dass man mit mehr mathematischem Sachverstand besser erkennt, dass man mehr Infizierte sieht, wenn man mehr Menschen testet. Man könnte glauben, dass man mit mehr mathematischem Sachverstand sieht, dass nirgendwo auf der Welt über mehr als wenige Tage hinweg eine exponentielle Entwicklung von Infiziertenzahlen zu sehen war. Man könnte glauben, dass man mit mehr mathematischem Sachverstand sieht, dass eins und eins etwas anderes sein kann als 1+1.

Nun hat aber die Corona-Krise uns gelehrt, dass die unterschiedlichen Deutungen des Umgangs mit Parametern wenig mit mathematischem Sachverstand zu tun hat. In beiden Corona-Lagern finden sich Menschen mit sehr wenig und Menschen mit sehr viel mathematischem Sachverstand. Auch der oben diskutierte Politiker, der in einer Talkshow mit prozentualen Annahmen argumentieren soll, ist uns in der Corona-Krise allenthalben begegnet. Mit mehr oder weniger großem mathematischen Sachverstand kann man eben die Rahmungen sehr unterschiedlich deuten.

Vielleicht geht es am Ende eines gesellschaftlichen Zerwürfnisses nicht um die Frage, welchen Wert ein Parameter haben muss, damit Grundrecht X oder Freiheit Y eingeschränkt werden darf. Vielleicht geht um die Frage, ob diese Entscheidung überhaupt an einen Parameter gebunden werden darf. Vielleicht geht es nur darum, *wie wir leben wollen.*

[1] https://de.statista.com/infografik/21122/anzahl-der-betten-zur-intensivmedizinischen-versorgung-in-deutschland/

[2] https://www.heise.de/tp/features/Neue-Deutsche-Coronawelle-4944727.html

[3] https://www.heise.de/tp/features/Corona-durch-die-DIVI-Brille-betrachtet-4932883.html

[4] https://www.rubikon.news/artikel/die-mathematik-der-angst

Literatur

Adorno, T. W. (1971a): Theorie der Halbbildung. In R. Tiedemann (Hrsg.), *Eine Auswahl*. (S. 292–321). Büchergilde Gutenberg.

Adorno, T. W. (1971b). Philosophie und Lehrer. In T. Adorno, *Erziehung zur Mündigkeit.* (S. 29–49). Suhrkamp.

Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung R., & Köller, O. (Hrsg.) (2006): *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I.* Cornelsen Verlag.

Meyerhöfer, W. (2015). Mathematikaufgaben zwischen Bildung und Standards. In S. Rademacher & A. Wernet (Hrsg.), *Bildungsqualen.* (S. 103–118). Springer-VS.

Meyerhöfer, W. (2016). Der PISA-Glaube als Phänomen mathematischer Halbbildung. In K. Zierer, J. Kahlert & M. Burchardt (Hrsg.), *Die pädagogische Mitte.* (S. 79–96). Julius Klinkhardt.

Meyerhöfer, W. (Hrsg.) (2017). *DVV-Rahmencurriculum Rechnen. Praxismaterial.* Deutscher Volkshochschulverband, Bonn 2017.

Meyerhöfer, W. (2020). Auch eine Krise der mathematischen Bildung. *Frankurter Allgemeine Zeitung, 2.4.2020*, 8.

Kollosche, D. (2015). *Gesellschaftliche Funktionen des Mathematikunterrichts.* Springer Spektrum.

Kollosche, D., & Meyerhöfer, W. (2021). COVID-19, mathematics education, and the evaluation of expert knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 108*, 401–417. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10097-2

Ullmann, P. (2008). *Mathematik, Moderne, Ideologie: Eine kritische Studie zur Legitimität und Praxis der modernen Mathematik.* UVK.

Vohns, A. (2007). *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Ein Fallbeispiel zur empirischen Lösungsweganalyse.* Universität Siegen. https://dspace.ub.uni-siegen.de/bitstream/ubsi/308/1/vohns.pdf

Vohns, A. (2018). Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Eine nicht bloß rhetorisch gemeinte Frage. *Mitteilungen der GDM, 105*, 8–20.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der GDM, 61*, 37–46.

4.
Mathematiklehrer:innenbildung

Lukas GÜNTHER, Leibniz Universität Hannover
guenther@idmp.uni-hannover.de

Der Start in das Mathematikstudium als krisenhafter Bildungsprozess

Ausgehend von drei Vohns'schen Gedanken zur mathematischen Bildung wird in diesem Beitrag der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik, insbesondere die damit verbundene mathematische Enkulturation als krisenhafter Bildungsprozess verstanden und durch eine bildungswissenschaftliche Perspektive beschrieben. Hierfür wird neben der Skizzierung eines mathematischen Bildungsbegriffs nach Vohns eine Theorie der transformatorischen Bildung herangezogen, die Bildung als die Konstruktion und Veränderung von individuellen Dispositionen des Wahrnehmens, Deutens und Bearbeitens von Problemstellungen versteht. Die sich ergebende affektive und sozio-kulturelle Perspektive auf mathematische Enkulturation deutet auf eine Notwendigkeit für produktive Fremdheits- und Krisenerfahrungen für eine erfolgreiche Wissenschaftssozialisation im Rahmen des Studieneinstiegs hin.

Einleitung

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik stellt für viele ehemalige Schüler:innen respektive nun Studienbeginner:innen eine besondere Herausforderung dar, die zu einer überdurchschnittlich hohen Abbruchquote in mathematikbezogenen Studiengängen führt (Rach & Heinze, 2017). Zahlreiche Studien untersuchten in den letzten Jahrzehnten, aus welchen Gründen und unter welchen Bedingungen dieser international als *Secondary-Tertiary-Transition* (STT) bezeichnete Übergang gelingt oder scheitert (bspw. Bauer et al., 2020; Di Martino & Gregorio, 2019; Hernandez-Martinez & Williams, 2013; Pepin, 2014; Rach & Heinze, 2017; Thomas et al., 2015). Di Martino et al. (2022) beschreiben dahingehend in ihrem Übersichtsartikel zum aktuellen Forschungsstand zwischen 2008 und 2021 vier zentrale theoretische Perspektiven auf STT: epistemologische, kognitive, affektive und sozio-kulturelle (vgl. auch Gueudet et al., 2016).

Im Zusammenhang mit affektiven und sozio-kulturellen Forschungsperspektiven auf STT steht auch immer wieder die sogenannte mathematische Enkulturation im Fokus (vgl. Egger & Hummel, 2020; Hochmuth et al., 2021; Kempen, 2019). Dabei werden Schul- und Hochschulmathematik als verschiedene Kulturen verstanden, in denen unterschiedliche Sichtweisen auf Mathematik als Wissenschaft bzw. als Fach und als Lerngegenstand vorliegen sowie verschiedene Denk- und Handlungsdispositionen notwendig sind. Während der STT werden lernende Subjekte somit nicht nur mit neuen oder andersartigen fachlichen Inhalten, sondern auch mit kulturellen Brüchen konfrontiert, wobei etablierte Dispositionen in

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 183–197). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

Frage gestellt werden und für eine erfolgreiche Wissenschaftssozialisation eine Transformation ebenjener notwendig ist (Schoenfeld, 1992/2016).

In diesem Beitrag soll ausgehend von drei Vohns'schen Gedanken zum Verhältnis zwischen Mathematik und Bildung aus den Jahren 2010 bis 2020 die mathematische Enkulturation im Übergang zwischen Schule und Hochschule als mathematischer transformatorischer Bildungsprozess beschrieben werden. Hierfür wird zunächst ein mathematischer Bildungsbegriff nach Vohns skizziert, auf dessen Basis anschließend das Bildungspotential im Übergang Schul-Hochschulmathematik herausgearbeitet wird. Unter Berücksichtigung einer erziehungswissenschaftlichen Theorie der transformatorischen Bildung (Koller, 2018) wird abschließend die mathematische Enkulturation im Übergang zur Hochschulmathematik als krisenhafter, transformatorischer Bildungsprozess interpretiert.

Starting Points frei nach Vohns

Der erste Vohns'sche Gedanke, der zur Skizzierung eines mathematischen Bildungsbegriffs genutzt werden soll, entstammt seinem Text *Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen* (2010). Hier formuliert er, zu einem modernen Verständnis mathematischer Bildung gehöre (i) ein „vertieftes Verstehen der Mathematik durch die […] Einnahme einer distanzierten Außenperspektive", (ii) das Erleben und Aushalten von Differenzerfahrungen zwischen verschiedenen mathematischen Weltsichten, (iii) das Zurechtfinden in den daraus entstehenden Differenzgefügen sowie (iv) die Transformation von alltäglichen Erfahrungen mit Mathematik hin zu wissenschaftstheoretisch reflexivem Wissen (Vohns, 2010, S. 248). Vohns benennt damit eine für mathematische Bildung sowie die laufende Auseinandersetzung mit Mathematik aus seiner Sicht notwendige Ambiguitätstoleranz, um die sich ständig erweiternden und verändernden mathematischen Begriffe, Sachverhalte und Verknüpfungen einordnen zu können.

Darüber hinaus beschreibt Vohns im Jahr 2018 in Anlehnung an ein Zitat von Klafki (1995) eine der mathematischen Bildung inhärente Individualität und Emergenz:

> Mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen und Können wären demnach „nicht als normativ verbindliche Verpflichtung" zu sehen, sondern „vielmehr als in der bildenden Begegnung glaubhaft zu repräsentierendes „Angebot", angesichts dessen" auch Lehrpersonen „zu ihren eigenen Interessen, Wertungen, Entscheidungen finden sollten". (Vohns, 2018, S. 20 mit Klafki, 1995)

Mathematische Bildung ist demnach Ergebnis individueller Auseinandersetzung und Konfrontation der Lernenden – und Lehrpersonen – mit Mathematik. Von Seiten der Lehre sei sie damit zwar anbietbar, jedoch unplanbar und unvorhersehbar.

Der dritte Gedanke von Vohns, der für diesen Beitrag aufgegriffen werden soll und an letzteren im Grunde anschließt, entstammt seinem Vortrag „Woran scheitert mathematische Bildung?“ (2020). In diesem mahnt er ausgehend und orientiert an den Grunderfahrungen nach Winter in invertierter Form:

> Geben wir uns als Fachdidaktiker nicht der Vorstellung hin, mathematische Bildung erzeugen oder gar erzwingen zu können, geben wir uns damit zufrieden, zumindest ihr unausweichliches Scheitern soweit als möglich einzudämmen. (Vohns, 2020, S. 22)

Dies schließt er im Rahmen seines Vortrags aus den An- und Widersprüchen einer mathematischen Bildung, auf die hier nicht genauer eingegangen werden soll, auch weil Andreas Vohns dies bereits anschaulich getan hat. Zentral für seine Argumentation ist jedoch, dass er die ‚Schuld‘ des Scheiterns einer mathematischen Bildung nicht bei einzelnen beteiligten Institutionen und Individuen sieht, sondern vielmehr in dem nicht immer gelingenden Zusammenspiel zwischen den vielfältigen Faktoren und Teilhabenden dieses Prozesses. Dies unterstreicht einerseits die oben angesprochene Individualität und Emergenz von mathematischer Bildung, zeigt andererseits aber auch die zentrale Problemstellung einer angestrebten Förderung von mathematischer Bildung.

Zusammenfassend bezeichnet Vohns in diesen drei Abschnitten eben jene Prozesse als mathematische Bildung, die (i) durch die individuelle Konfrontation und Interaktion mit Differenzerfahrungen zu einer Transformation von alltäglichen Erlebnissen mit Mathematik zu wissenschaftlich reflexiven mathematischen Wissen und damit zu einer Verschiebung der mathematischen Weltsichten führen, (ii) die individuell, emergent und performativ verlaufen, somit auch scheitern können und (iii) die folglich zwar durch didaktische Impulse und Einflüsse begünstigt, aber nicht notwendigerweise ausgelöst oder gar erzwungen werden können. Vohns skizziert damit einen mathematischen Bildungsbegriff, der nahe an gegenwärtigen erziehungswissenschaftlichen und pädagogischen Verständnissen von Bildung verortet werden kann. In diesen Disziplinen wird Bildung i.A. als eine „spezifische Problemlage [beschrieben], die als […] Subjektivierung objektiver Sachverhalte und als Objektivierung subjektiver Gegebenheiten“ sowie „als Antwort des Subjekts auf Fremdheits- und Krisenerfahrungen“ verstanden werden kann (Zirfas, 2018, S. 41 f.). Bildung beschreibe somit eine individuelle „Auseinandersetzung des Einzelnen mit als allgemein oder universell geltenden Bestimmungen von Welt“ (Zirfas, 2018, S. 41), wobei sich der Begriff Welt hier auf eine gesellschaftliche (Um-)Welt und Ordnung bezieht. Folglich sei Bildung eine zweistellige Relation, ein „Wechselverhältnis zwischen einem Einzelnem und einem Allgemeinen“ (Zirfas, 2018, S. 41) – im Gegensatz zu Erziehung, einer dreistelligen Relation zwischen der vermittelnden Person, dem vermittelten Gegenstand und der Adressat:in.

Unter Berücksichtigung des hier nach Vohns skizzierten mathematischen Bildungsbegriffs soll im folgenden Abschnitt die mathematische Enkulturation im Übergang zur Hochschulmathematik genauer betrachtet werden.

Mathematische Enkulturation

Es ist hinlänglich bekannt, dass der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik für Studienbeginner:innen eine besondere Herausforderung, für einige sogar eine unüberwindbare Hürde darstellt. Forschungsarbeiten und damit zusammenhängende (Förder-)Maßnahmen fokussieren i.d.R. die Differenzerfahrungen zwischen den mathematischen Inhalten sowie Sicht- und Arbeitsweisen der beiden Institutionen (vgl. Di Martino et al., 2022). Nach Stoffels (2020) werden dabei einerseits „[f]ehlende Basisfähigkeiten und Fertigkeiten" (S. 27 ff.) auf Seiten der Studienbeginner:innen, andererseits die „Andersartigkeit der Mathematik [in] Schule und Hochschule" (S. 31 ff.) adressiert. Wie bereits einleitend erläutert, kann der Übergang hin zur subjektiv ‚neuen', zumindest aber ‚andersartigen' Hochschulmathematik als Enkulturationsprozess (Bishop, 1988; Schoenfeld, 1992/2016) beschrieben werden, in dem Lernende für eine erfolgreiche Wissenschaftssozialisation in die hochschulmathematische Kultur eine Transformation ihrer mathematischen Weltsicht durchlaufen (müssen).

Schoenfeld (1992/2016) versteht das Lernen von Mathematik ausgehend von einem ursprünglich kognitionswissenschaftlichen Diskurs nicht als bloße Aufnahme von Faktenwissen, sondern beschreibt es als Aneignung von sozialen, kulturellen und sprachlichen Aspekten der Mathematik. Somit wird Mathematik als eine Kultur mit eigener Sprache verstanden, die durch eine gesellschaftsähnliche Gruppe verhandelt, geprägt und weitergegeben wird. Mathematik lernen – für Schoenfeld das Einnehmen der Perspektive einer Mathematiker:in – meint somit nicht nur das Lernen von Inhalten und Verfahren, sondern eben auch einen sozialen Prozess, der in der Interaktion zwischen dem lernenden Individuum mit dessen (Lehr-Lern-)Umwelt stattfindet und das Einnehmen und Verinnerlichen von gesellschaftlichen Perspektiven, Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsstrukturen voraussetzt (vgl. Loch, 1968).

Die Entwicklung mathematischen Denkens und Handelns enthalte somit eine kulturelle Komponente, die beim Eintritt in eine mathematische Gemeinschaft und dessen Kultur, also einer mathematischen Gesellschaft – Schoenfeld nennt diese „communities of practice" (Schoenfeld, 1992/2016, S. 8) in Anlehnung an Lave und Wenger (1991) – ein bestimmtes, der Kultur entsprechendes mathematisches Weltbild impliziere. Auf diese Weise werden mathematisches Wissen, Problemlösestrategien, Selbstregulierung und Praktiken innerhalb und bedingt durch kulturelle Kontexte erlernt und verfestigt sowie ein mathematisches „Selbst-, Anderen- und Weltverhältnis" (Koller, 2018) entwickelt.

Insgesamt bezieht sich Schoenfeld in seinen Überlegungen primär auf die Enkulturation in eine initiale mathematische Kultur, speziell der schulischen Mathematik, spricht dabei über das mathematische Weltbild von Schüler:innen und stellt diesem den Einfluss der Lehrenden und ihres Weltbildes gegenüber. Er bleibt jedoch vage, was bei ebenjenem Einstieg in die Mathematik mit einem intuitiven Verständnis respektive Weltbild von Mathematik (bspw. aus den kulturellen Kontexten der Familie, Elementar- oder Primarbildungsstätten) geschieht. Auch bleibt der Übergang in die Hochschulmathematik und deren spezifische Kultur unbeachtet, der jedoch in jüngeren Jahren stetig mehr Aufmerksamkeit erhalten hat (siehe hierzu den Überblicksartikel zum Forschungsstand von Di Martino et al., 2022).

Offen bleibt nichtsdestotrotz, wie mathematische Enkulturation – gerade an der problematischen Schnittstelle zwischen Schule und Universität – als Prozess genau verläuft. Dabei sind die damit einhergehenden Veränderungen als Teil eines Sozialisationsprozesses keine singulären und kurzzeitigen Ereignisse, die nur im Kontext einzelner und bestimmbarer Fachinhalte oder -themen stattfinden. Vielmehr stellen sie individuelle, emergente und performative Prozesse mit signifikanten Auswirkungen auf die Denkstrukturen und Weltsicht des Individuums dar (Butler, 2001; Koller, 2018; Schoenfeld, 1992/2016):

> The notion of socialization […] (also called enculturation—entering and picking up the values of a community or culture) is central, in that it highlights the importance of perspective and point of view as core aspects of knowledge. The case can be made that a fundamental component of thinking mathematically is having a mathematical point of view, that is, seeing the world in the ways mathematicians do. […] [The] point of view is a fundamental determinant of cognition, and […] the community to which one belongs shapes the development of one's point of view. (Schoenfeld, 1992/2016, S. 7)

Folglich wird auch der Übergang in eine neue mathematische Kultur und damit die Transformation der individuellen Perspektive auf Mathematik hin zu einem neuen Selbst-, Anderen- und Weltverhältnissen grundlegend durch die jeweilig enkulturierende (mathematische) Gesellschaft und dessen Weltbild – hier: die Hochschulmathematik – beeinflusst und geprägt. Dies schließt auch an die sozialwissenschaftliche Sicht an, Menschen seien nicht *per se* „bereits *in der Kultur* befindlich, sondern *auf dem Weg zur Kultur*, beim Lernen der Kultur, beim Hineinwachsen in sie, Geprägt werden durch sie" (Loch, 1968, S. 165, Hervorhebungen im Orginal). Dabei führe – bei entsprechender Offenheit des Individuums – der Enkulturationsprozess auf lange Sicht nicht zur einfachen Anpassung an eine neue Kultur, sondern zur Aneignung kultureller Aspekte wie Werte, Normen, soziale Konventionen und Verhaltensweisen und in diesem Sinne eines bestimmten Weltbilds (Kramme, 2020; Loch, 1968, S. 167 f.).

Insgesamt ist an ein solches Verständnis von mathematischer Enkulturation zwischen Schul- und Hochschulmathematik auch der oben beschriebene Blick auf mathematische Bildung anschlussfähig respektive kann mathematische Enkulturation als mathematische Bildung im Vohns'schen Sinne verstanden werden: der Studieneinstieg als eine individuell, emergent und performativ verlaufende Interaktion und Konfrontation eines lernenden Individuums mit einer neuen mathematischen Kultur, bei der Differenzerfahrungen zur Transformation und Konstruktion von mathematischem Wissen und Weltsichten führen, wobei inhärent die Möglichkeit des Scheiterns und die didaktische Ohnmacht existiert, den Prozess weder auslösen noch erzwingen zu können.

Transformatorische Bildung

Um die Einordnung von mathematischer Enkulturation als Bildungsprozess zu vertiefen, soll in diesem Abschnitt zunächst auf die Theorie der transformatorischen Bildung eingegangen werden, die Bildungsprozesse aus einer erziehungswissenschaftlichen Perspektive mit Differenzerfahrungen, die hier als Krisen bezeichnet werden, zusammenbringt.

Ausgehend vom klassischen Bildungsbegriff nach Humboldt formuliert Hans-Christoph Koller in seinem Buch *Bildung anders denken* (2018) eine Theorie der transformatorischen Bildung. Dabei soll einerseits das humboldtsche Bildungskonzept auf dessen Aktualität und Anschlussfähigkeit für die heutige bildungswissenschaftliche Diskussion überprüft, andererseits – frei nach Foucault (1996, S. 24) – anders bzw. weitergedacht werden, um offene Fragen nach (i) der Struktur individueller Welt- und Selbstverhältnisse, (ii) Anlässen für Bildungsprozesse, (iii) der Entstehung von Neuem in ebendiesen sowie (iv) der empirischen Untersuchung solcher Prozesse zu klären.

Als Ausgangspunkt nutzt Koller die Arbeiten von Rainer Kokemohr (1989, 1992, 2007) zur Unterscheidung von Lern- und Bildungsprozessen, die diese nicht wie üblich informations-, sondern sprachtheoretisch fassen: Lernen sei demnach der Umgang mit subjektiv neuen Problemen in einer etablierten Disposition von Wahrnehmung, Deutung und Bearbeitung. Bildung fände hingegen erst dann statt, „wenn der Prozess der Be- oder Verarbeitung subsumtionsresistenter Erfahrungen eine Veränderung von Grund legenden Figuren meines je gegebenen Welt- und Selbstentwurfs einschließt" (Kokemohr, 2007, S. 21), wenn also

> Menschen in der Auseinandersetzung mit neuen Problemlagen neue Dispositionen der Wahrnehmung, Deutung und Bearbeitung von Problemen hervorbringen, die es ihnen erlauben, diesen Problemen besser als bisher gerecht zu werden. (Koller, 2018, S. 16)

Koller geht dabei – in Anschluss an Bourdieus Habitus-Begriff (vgl. Bourdieu, 1987) – davon aus, dass dem Menschen ein „System relativ stabiler Dispositionen

des Denkens […] und des Handelns“ (Koller, 2018, S. 24) innewohnt, das kulturell durch die Gesellschaft geprägt und innerhalb dieser kollektiv vertreten wird. Dieses System stehe dabei zwischen dem Individuum und den gesellschaftlichen Rahmenbedingungen, sei abhängig von kulturellen Machtverhältnissen und beeinflusse grundlegend das individuelle Handeln. Dabei sei gerade die Stabilität dieses Systems und dessen Machtverhältnisse sowohl für das Individuum als auch für das Kollektiv ein wichtiges und zu erhaltendes Ziel. Dies weise weniger auf eine Transformationsfreude, mehr auf Transformationsvermeidung und verschärfe die Frage nach dem Anlass von Bildungsprozessen. Koller argumentiert mit Judith Butlers Überlegung zur *Wendung des Subjekts gegen sich selbst* (2001): die gesellschaftlichen Machtverhältnisse und der Wunsch nach Anerkennung innerhalb dieser führen – trotz der Trägheit gegenüber Veränderungen – dennoch zu einer gewissen Offenheit des Individuums gegenüber neuen Erfahrungen und damit zumindest zu einem Transformationspotential.

Erfahrungen, die dieses Potential bieten, benennt Koller als Krisen, die dabei

> keineswegs immer dramatische oder gar katastrophische Entwicklungen [meinen], sondern lediglich solche Situationen oder Konstellationen, in denen die relative Stabilität eines etablierten Welt- und Selbstverständnisses in Frage gestellt wird. (Koller, 2018, S. 71)

Solche Krisenerfahrungen können gesellschaftlich oder individuell bedingt sein und werden von Koller u.a. durch Waldenfels‘ Konzept der *Erfahrung des Fremden* (Waldenfels, 1987, 1994, 1997) genauer gefasst. Waldenfels geht davon aus, dass – ähnlich zum Habitusbegriff nach Bourdieu – das Individuum in und nach einer gesellschaftlichen Ordnung wahrnimmt, denkt und handelt. In dieser durchlebt es Erfahrungen, die weniger als festgelegte Situationen, mehr als Prozesse verstanden werden, die dem Individuum widerfahren und auf eine bestimmte Ordnung verweisen. Das Fremde im Sinne Waldenfels‘ sind nun eben solche Erfahrungen, die nicht auf die inhärente Ordnung des Individuums verweisen, sondern sie in Frage stellen und eine andere Ordnung benötigen, die sich dem Zugriff des Individuums (zunächst) entzieht. Dabei bilden Fremdheitserfahrungen nicht nur die Affirmation oder Negation einer Erwartung, sondern können auch die Form des Paradoxen annehmen. Waldenfels folgend bestehen sie „in der Außerkraftsetzung einer Ordnung, samt der Alternative zwischen Ja und Nein, wodurch die Frage, ob jene Annahme zutrifft oder nicht, unentscheidbar wird“ (Koller, 2018, S. 82). Dabei können nicht nur äußere Erfahrungen Fremdheit hervorrufen, sondern auch innere Prozesse, die sich unseren eigenen Denk- und Wahrnehmungsgewohnheiten entziehen. Folglich ist das Fremde sowohl inter- und intrapersonell als auch inter- und intrakulturell.

Die Konfrontation mit dem Fremden stellt also eine Außerkraftsetzung der intrinsischen Ordnung, der Denk-, Handlungs- und Wahrnehmungsmuster eines Indi-

viduums dar. Das Fremde ist in dem Sinne mit jener Ordnung „inkommensurabel“ (Koller, 2018, S. 86) und stellt das Individuum vor die Herausforderung, durch eine produktive Antwort Neues zu erschaffen, das wiederum Einfluss auf die Beschaffenheit der Ordnung habe.

Koller führt zur Ergründung der Entstehung des Neuen Oevermanns Theorie der Objektiven Hermeneutik und dessen sozialwissenschaftliche Erklärung an (Oevermann, 2002). Darin beschreibt Oevermann das Neue als paradox, einerseits emergent, also neu und nicht von Altem ableitbar, andererseits in dessen Entstehung zurückführbar auf bereits bekanntes. Dieses Paradox löst Oevermann über den Strukturbegriff der Objektiven Hermeneutik:

> Emergent ist es, insofern es aus der bisher geltenden Fallstruktur nicht ableitbar ist und sich in der Gegenwart spontan sequenziell vollzieht […]. Determiniert ist es hingegen dadurch, dass es sich nur im Rahmen des objektiv Möglichen, d.h. der allgemeinen Regeln vollziehen kann, und dass es sich, um Bestand zu haben, verobjektivieren […] muss. (Koller, 2018, S. 115 f.)

Als Anlass für eine solche Entstehung von Neuem und sich daraus entwickelnde Fallstrukturen, die als Oevermanns Version des Ordnungskonzepts nach Waldenfels verstanden werden können, sieht auch er Krisenerfahrungen, in denen die bekannten Entscheidungsprozesse nicht mehr greifen (können).

Solche Entstehungsprozesse können dabei nicht nur bezüglich ihrer zeitlichen, sondern auch bezüglich ihrer inhaltlichen Disposition als „Freiheitsspielräume“ (Koller, 2018, S. 120) verstanden werden, in denen dem Neuen respektive dessen Entstehung ein innovativer und künstlerisch-kreativer Moment zugeschrieben wird, der auch kennzeichnend für Träume und Kunstformen sei. Dabei vollzöge sich dieser – mit Bezug auf Butlers Weiterführung von Austins und Derridas Sprachakttheorien und ihr Konzept der Resignifizierung (Butler, 1998) –

> in sprachlichen (oder anderen zeichenförmigen) Praktiken, die bereits vorhandene Figuren wiederaufführen und dabei zugleich abwandeln. Das Neue wäre demzufolge also nicht das ›ganz andere‹, völlig Unbekannte, Noch-nie-Dagewesene, sondern vielmehr eine Wiederholung des schon Vorhandenen, die das Wiederholte in einen anderen Kontext versetzt und so in seiner Bedeutung verschiebt. (Koller, 2018, S. 134)

Zusammenfassend beschreibt der transformatorische Bildungsbegriff eben jene Prozesse als Bildung, die ausgelöst durch eine Krisen- respektive Fremdheitserfahrung etablierte Selbst-, Anderen- und Weltverhältnisse eines Individuums zunächst infrage stellen und durch einen produktiven Umgang und basierend auf Bekanntem zu einer innovativen und kreativen Verschiebung und Neubildung der Ordnungsstrukturen führen. Hier lassen sich nun, ähnlich wie im letzten Abschnitt, Parallelen zu den Vohns’schen Überlegungen zeichnen: Mathematische

Bildung als die performativ-kreative Reorganisation und Transformation der eigenen mathematischen Weltsicht, ausgelöst durch individuelle und emergente Krisenerfahrungen in der Interaktion mit subjektiv fremden mathematischen Sachverhalten. Hierbei werden jene Krisenerfahrungen durch gesellschaftliche Rahmung – bspw. didaktische – begünstigt, aber nicht notwendigerweise ausgelöst und können letztlich durch Ablehnung des Individuums scheitern.

Der Einstieg ins Mathematikstudium als krisenhafter Bildungsprozess

Ausgehend von den Ausführungen zur mathematischen Enkulturation und zur transformatorischen Bildung sowie den jeweiligen Verknüpfungen, die zum Vohns'schen mathematischen Bildungsbegriff gezogen wurden, soll im Folgenden die mathematische Enkulturation zu Beginn des Studiums als mathematische transformatorische Bildung beschrieben werden.

Wie im zweiten Abschnitt angesprochen, beschreibt Schoenfeld den Einstieg in die Mathematik i.A. als mathematische Enkulturation. Diese Sichtweise hat dabei zwei Komponenten: einerseits die Aneignung mathematischen Wissens, andererseits die Einnahme einer mathematischen Weltsicht. Letztere beschreibt die sich etablierenden Wahrnehmungs-, Denk- und Handlungsstrukturen, die in der Wechselwirkung zwischen den kulturellen Einflüssen der mathematischen Gesellschaft und den durch das Individuum mitgebrachten Dispositionen geprägt werden.

Wichtig für die Anwendung dieses Konzeptes auf Übergänge zwischen mathematischen Kulturen – ob von Schule zur Hochschule, zwischen thematischen Bereichen oder zwischen Hochschule und Beruf (vgl. Hochmuth et al., 2021) – ist, dass die Lernenden i.d.R. nicht als bisher ungeprägtes Subjekt in die Mathematik einsteigen, wie es durch den sozialwissenschaftlichen Begriff eigentlich beschrieben wird (Kramme, 2020; Loch, 1968). Das Individuum wurde zum Zeitpunkt des Übergangs bereits durch eine vorherige mathematische Kultur (im hier diskutierten Fall: die Schulmathematik) bedeutend geprägt. Da davon ausgegangen werden kann, dass Lernende ihr etabliertes, schulmathematisches Weltbild zu Beginn ihrer Universitätszeit nicht einfach eliminieren (können), kann eine Vorprägung der Studienbeginner:innen zu Beginn des Übergangs angenommen werden.

Im Sinne des transformatorischen Bildungsbegriffs lässt sich das schulmathematische Weltbild als ein Dispositionssystem mathematischen Wahrnehmens, Denkens und Handelns verstehen, das ein individuelles Selbst-, Anderen- und Weltverhältnis impliziert und durch die soziale Umwelt der Institution Schule und dessen Mathematikunterricht geprägt und gefestigt wurde. Mit Bezug auf Bourdieus Habitusbegriff lässt sich darüber hinaus eine latente Trägheit dieses Systems annehmen, die eine Transformation zunächst unwahrscheinlich und nur durch entsprechende Impulse möglich macht (vgl. Hernandez-Martinez & Williams, 2013).

Im Übergang zur Hochschulmathematik wird dieses schulmathematische Selbst- und Weltverhältnis mit Differenzerfahrungen konfrontiert, mit Brüchen von Begriffsverständnissen und Verfahren zwischen der schulischen und der hochschulischen Mathematik (vgl. bspw. Bauer et al., 2020). Im Sinne des Konzepts der negativen Erfahrungen nach Günter Bucks (siehe Koller, 2018, S. 71–78) werden die Erwartungen der Studienbeginner:innen, die aus ihren Erfahrungen aus der Schulzeit entstammen, durch die universitäre Mathematik negiert und führen zu einer Infragestellung des eigenen Wissenshorizonts. Folgend können diese neuen Erfahrungen respektive Problemlagen entweder durch das mathematische Weltbild und dessen Ordnung (vermeintlich) verarbeitet werden – gelten also als etwas *Anderes* als die bekannten Problemlagen aus der Schulzeit – oder sie entziehen sich der bekannten Ordnung, sind somit etwas *Fremdes*.

Gelten sie als fremd, so enthalten sie das Potential eine von Koller beschriebene Krisen-/Fremdheitserfahrung auszulösen, die im Sinne des Vohns'schen mathematischen Bildungsbegriffs aus einer Differenz entsteht: Eine initiale Situation – bspw. eine gestellte Aufgabe, ein Kommentar der Lehrperson, das Erschließen eines Begriffs – ist in der bekannten Ordnung nicht zu verarbeiten, setzt sie außer Kraft und stellt somit das etablierte Weltbild in Frage. Hieraus ergibt sich die Möglichkeit einer produktiven Neuordnung respektive Transformation im Sinne einer Enkulturation in die (bzw. in Teile der) Hochschulmathematik und dessen Kultur. Gleichzeitig kann die Transformation durch eine Ablehnung oder das Nicht-Wahrnehmen der Krise und des kulturellen Bruchs scheitern und somit eine Neuordnung verhindern.

Ist ebenjene Neuordnung jedoch erfolgreich, ist das transformierte Weltbild Oevermann folgend durch die Paradoxie gekennzeichnet, dass es einerseits emergent, andererseits deterministisch sei. Für die mathematische Enkulturation ist dies insofern annehmbar, als dass die zur Verfügung stehenden Erfahrungen und Dispositionen sowie das ursprüngliche Weltbild für jede lernende Person individuell und damit auftauchende kulturelle Brüche, Fremdheits- und Krisenerfahrungen als emergent zu bezeichnen sind. Gleichzeitig sind durch curricular organisierte Lehrpläne in Schule und Hochschule mathematisch-kulturelle Rahmungen vorgegeben. Da eben nur das als Fremdes erfahren werden kann, womit das lernende Subjekt in Kontakt kommt – was es also in der Hochschule an Inhalten oder zumindest Impulsen zur Verfügung gestellt bekommt –, sind solche Krisen im gewissen Sinne determiniert. Durch die individuellen Freiheitsräume und die dadurch eröffnete und notwendige Kreativität dieses Prozesses, liegt es nichtsdestotrotz auch in den Händen des lernenden Individuums, welche „realitätstaugliche[n] Mittel der Krisenbewältigung" (Koller, 2018, S. 119) zur Neuordnung genutzt werden. Somit liegt die Hypothese nahe, dass signifikante Teile des Transformationsprozesses durch Mechanismen des informellen Lernens (vgl. Arnold, 2016; Günther et al., 2022; Jadin et al., 2008) bewältigt werden (müssen).

Die hochschulmathematische Lehre kann demnach zwar relevantes mathematisches Wissen und kulturelle Dispositionen durch formale Kontexte zur Verfügung stellen, jedoch können nur eigenständige, informelle Auseinandersetzungen zur Enkulturation und somit zur Transformation des individuellen Weltbildes führen.[12]

Als konkretes, hier nur kurz angeschnittenes Beispiel kann das Beweisen als möglicher Ausgangspunkt einer mathematischen Enkulturation im Sinne eines transformatorischen Bildungsprozesses angebracht werden. Beweisen und das damit eng verbundene formale Argumentieren sind zentrale kulturelle Artefakte sowohl der Schul-, als auch der Hochschulmathematik. Als problematischer Aspekt der STT wird Beweisen immer wieder in Forschungsarbeiten fokussiert (vgl. Di Martino et al., 2022; Thomas et al., 2015), jüngst bspw. in Kempen (2019) und i.T. in Stoffels (2020). Beweisen und Argumentieren sind bereits in der Schulzeit ein wichtiger Aspekt des Unterrichts, werden hier aber deutlich weniger formal eingeführt und verwendet (vgl. Jahnke & Ufer, 2015). Der Übergang zur Hochschulmathematik konfrontiert die individuellen Lernenden dann mit einem besonderen Anspruch an Formalismus und neue Formen von Beweisen, die eine deutlich zentralere Rolle für das mathematische Wahrnehmen, Denken und Handeln spielen als in der Schulzeit (Kempen, 2019). Hieraus ergibt sich das Potential für Fremdheitserfahrungen und für die Negierung etablierter Denk- und Handlungsdispositionen. Im hier argumentierten Sinne kann dies wiederum zu einer bildenden Transformation, zu einer mathematischen Enkulturation führen und somit zu einer Wissenschaftssozialisation in (zumindest Teile) der hochschulmathematischen Kultur. Gleichzeitig hängt dieser Prozess von der entsprechenden Ausgangssituation sowie der Reaktion des jeweiligen Individuums ab: Welche Vorerfahrung, Vorwissen, Handlungs- und Denkweisen existierten? In welchem Zusammenhang und auf welche Weise findet die Konfrontation mit dem Fremden statt? Wie geht das Individuum mit der Negation der eigenen Dispositionen um? Hier zeigt sich bereits auf theoretischer Ebene die Individualität, Emergenz und Performanz des mathematischen transformatorischen Enkulturations- und Bildungsprozesses. Es ergeben sich offene Folgefragen, bspw. nach etwaigen ‚mehr oder weniger gebildet sein' durch unterschiedliche Prozessverläufe. Diese Fragen sollen hier zwar genannt, aber zunächst unbetrachtet bleiben und sind in späteren Beiträgen zu diesen Überlegungen genauer zu bearbeiten.

[12] Das zur Verfügung stellen von Anlässen für Fremdheitserfahrungen, wie es hier vorgeschlagen wird, kann als eine Art Reibungsfläche verstanden werden: Lehr-Lern-Situationen, die durch die Lehre bewusst so gewählt sind, dass sie möglicherweise Fremdheitserfahrungen darstellen und damit Krisen im Sinne transformatorischer Bildung auslösen können. Dann könnten im Sinne eines fluiden Lernens (Marvakis & Schraube, 2016) in der Interaktion zwischen Lernenden und Lehrenden gemeinsam Transformationen bewältigt werden. Ein möglicher Ansatz eines solchen Lehr-Lern-Konzepts findet sich i.T. bei Stoffels (2020) unter dem Begriff „Erfahrungsräume".

Mathematische Bildung als Transformation?

Basierend auf drei Gedanken zur mathematischen Bildung aus Vohns' Arbeiten und Vorträgen wurde in diesem Beitrag eine Interpretation der mathematischen Enkulturation in die Hochschulmathematik durch die Theorie transformatorischer Bildung dargelegt. Dabei wurde zunächst ein mathematischer Bildungsbegriff im Vohns'schen Sinne vorgeschlagen. Dieser sieht mathematische Bildung als individuelle, performative, aber möglicherweise auch scheiternde und von außen nicht erzwingbare Prozesse, die ausgehend von emergenten Differenzerfahrungen zu einer Transformation der mathematischen Weltsicht führen. Hierauf aufbauend wurde das Konzept mathematischer Enkulturation im Übergang zwischen Schul- und Hochschulmathematik vorgestellt und als mathematische Bildung beschrieben. Nach der theoretischen Einführung des transformatorischen Bildungsbegriffs, aus welchem Parallelen zu den Arbeiten von Vohns gezogen werden konnten, war eine – erneut mit Foucault – *andere* Perspektive auf den Einstieg in die universitäre Mathematik möglich.

Dabei wurde auf einer theoretischen Ebene deutlich, dass der Studieneinstieg in die Hochschulmathematik mehr als ‚nur' das Erlernen neuer und komplexerer Inhalte und Verfahren ist. Das Schul- und Studienfach sowie die Disziplin Mathematik als jeweils gesellschaftlich geprägte Kulturen verstehend, ist der Übergang zwischen den Institutionen und ihren mathematischen Kulturen mit Differenzen und Diskontinuitäten verbunden. Diese führen zu kulturellen Brüchen und – im Sinne der hier verwendeten Argumentation – zu transformatorischer mathematischer Bildung. Die darin inhärente Neuordnung des mathematischen Selbst-, Anderen- und Weltverhältnisses geht von einer die etablierte Ordnung negierenden und in Folge krisenhaften Problemstellung aus und nutzt bereits vorhandene sowie neue Dispositionen für die Transformation.

Die hier dargelegte Perspektive auf und Verknüpfung von mathematischer Enkulturation, mathematischer Bildung sowie transformatorischer Bildung zeigt dreierlei: Erstens werden die Ansätze und Überlegungen von Vohns zu einem mathematischen Bildungsbegriff durch die aufgezeigten Parallelen zum transformatorischen Bildungsbegriff nach Koller ge- und unterstützt und betten sie in den aktuellen pädagogischen Diskurs um Bildung ein. Zweitens ermöglicht der Vohns'sche mathematische Bildungsbegriff – gerade durch die angesprochenen Parallelen – eine Brücke zwischen dem Konzept der mathematischen Enkulturation und dem transformatorischen Bildungsbegriff. Auf diese Weise erhält der konkrete Prozess des Übergangs von der Schul- zur Hochschulmathematik ein erziehungswissenschaftliches Fundament, das die empirische Untersuchung mathematischer transformatorischer Bildungsprozesse ermöglicht (siehe hierzu Koller, 2018, S. 137–156).

Für drittens soll hier noch einmal ein oben genannter Gedanke von Vohns zu mathematischer Bildung aufgegriffen werden:

> Geben wir uns als Fachdidaktiker nicht der Vorstellung hin, mathematische Bildung erzeugen oder gar erzwingen zu können; geben wir uns damit zufrieden, zumindest ihr unausweichliches Scheitern soweit als möglich einzudämmen. (Vohns, 2020, S. 22)

Im obigen, ersten Abschnitt wurde aus diesem Zitat die Emergenz sowie die hohe Komplexität von Bildungsprozessen im Allgemeinen sowie in der Mathematik im Speziellen abgeleitet. In Anlehnung an die hier dargelegte Diskussion soll dieser Aspekt zum Abschluss dieses Beitrags noch einmal unterstrichen werden:

Die Zusammenführung der hier vorgestellten theoretischen Perspektiven auf Bildung sind sich im Kern einig, dass bildende Prozesse nicht mit Absicht ausgelöst werden können, weder durch Lehrende, noch durch die Lernenden selbst. Die hier so oft betonte Emergenz und Individualität dieser Prozesse machen sie unplanbar und unvorhersehbar. Es wird nicht möglich sein, Lernende zur Bildung zu bringen, oder zu vermeiden, dass diese krisenhaft verläuft, oder diese Krisen gar zu erleichtern. Doch es sollte möglich sein, sie zu begleiten und die Transformation, die Neuordnung des mathematischen Weltverhältnisses produktiv zu unterstützen. Dies könnte – zumindest für die Enkulturation in die Hochschulmathematik – letztlich das ‚Eindämmen des Scheiterns' sein, welches Vohns anspricht: Das Schaffen von Reibungsflächen – also Lernsituationen, die das Potential für Fremdheitserfahrungen bei Lernenden beinhalten – und die Begleitung der individuellen Krisenerfahrungen der Lernenden (bspw. im Sinne der Erfahrungsräume in Stoffels, 2020), um eine etwaige Neuordnung des mathematischen Selbst-, Anderen- und Weltverhältnisses erfolgreich und produktiv zu gestalten.

Literatur

Arnold, R. (2016). „Didaktik" informellen Lernens. In M. Rohs (Hrsg.), *Handbuch Informelles Lernen* (S. 483–494). Springer.

Bauer, T., Müller-Hill, E., & Weber, R. (2020). Diskontinuitäten zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik. In N. Meister, U. Hericks, R. Kreyer & R. Laging (Hrsg.), *Zur Sache. Die Rolle des Faches in der universitären Lehrerbildung: Das Fach im Diskurs zwischen Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Bildungswissenschaft* (S. 127-145). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-29194-5_8

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education* (Vol. 6). Springer Science & Business Media.

Bourdieu, P. (1987). *Sozialer Sinn: Kritik der theoretischen Vernunft*. Suhrkamp.

Butler, J. (1998). *Haß spricht. Zur Politik des Performativen*. Berlin Verlag.

Butler, J. (2001). *Psyche der Macht. Das Subjekt der Unterwerfung*. Suhrkamp.

Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *17*(4), 825-843. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

Di Martino, P., Gregorio, F., & Iannone, P. (2022). The transition from school to university in mathematics education research: new trends and ideas from a systematic literature review. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10194-w

Egger, R., & Hummel, S. (2020). *Stolperstein oder Kompetenzstufe? Die Studieneingangsphase und ihre Bedeutung für die Wissenschaftssozialisation von Studierenden*. Springer.

Foucault, M. (1996). *Der Mensch ist ein Erfahrungstier. Gespräch mit Ducio Trombardori*. Suhrkamp.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A. A., Nam Kwon, O., & Verschaffel, L. (2016). *Transitions in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-31622-2

Günther, L., Marten, N., & Berendes, K. (2022). Informal learning situations in the context of mathematics studies. Development of an analysis framework. *INDRUM 2022 PROCEEDGINGS: Fourth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics.* Hannover.

Hernandez-Martinez, P., & Williams, J. (2013). Against the odds: resilience in mathematics students in transition. *British Educational Research Journal*, *39*(1), 45–59. http://www.jstor.org/stable/24464801

Hochmuth, R., Broley, L., & Nardi, E. (2021). Transitions to, across and beyond university. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Hrsg.), *Research and Development in University Mathematics Education* (S. 191-215). Routledge.

Jadin, T., Richter, C., & Zöserl, E. (2008). *Formelle und informelle Lernsituationen aus Sicht österreichischer Studierender*.

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331-355). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8_12

Kempen, L. (2019). Die Lehrveranstaltung „Einführung in die Kultur der Mathematik“ im Wintersemester 2014/2015. In *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität* (S. 281-310). Springer Fachmedien. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24415-6_6

Klafki, W. (1995). Zur Geisteswissenschaftlichen Pädagogik Erich Wenigers. *Zeitschrift für Pädagogik, 41*(3), 391-394.

Kokemohr, R. (1989). Bildung als Begegnung? Logische und kommunikationstheoretische Aspekte der Bildungstheorie Erich Wenigers und ihre Bedeutung für biographische Bildungsprozesse in der Gegenwart. In O. Hansmann & W. Marotzki (Hrsg.), *Diskurs Bildungstheorie. Rekonstruktion der Bildungstheorie unter Bedingungen der gegenwärtigen Gesellschaft* (Vol. 2, S. 327–373). Deutscher Studien Verlag.

Kokemohr, R. (1992). Zur Bildungsfunktion rhetorischer Figuren. Sprachgebrauch und Verstehen als didaktisches Problem. In H. Entrich & L. Staeck (Hrsg.), *Sprache und Verstehen im Biologieunterricht* (S. 16-30). Leuchtturm-Verlag.

Kokemohr, R. (2007). Bildung als Welt- und Selbstentwurf im Fremden. Annäherungen an eine Bildungsprozesstheorie. In H.-C. Koller, W. Marotzki & O. Sanders (Hrsg.), *Bildungsprozesse und Fremdheitserfahrung. Beiträge zu einer Theorie transformatorischer Bildungsprozesse* (S. 13-69). transcript Verlag.

Koller, H.-C. (2018). *Bildung anders denken: Einführung in die Theorie transformatorischer Bildungsprozesse*. Kohlhammer.

Kramme, R. (2020). Enkulturation. In D. Klimke, R. Lautermann, U. Sträheli, C. Weischer & H. Wienold (Hrsg.), *Lexikon zur Soziologie* (S. 183). Springer Fachmedien.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.

Loch, W. (1968). Enkulturation als anthropologischer Grundbegriff der Pädagogik. *Bildung und Erziehung, 21*(jg), 161–178.

Marvakis, A., & Schraube, E. (2016). Lebensführung statt Lebensvollzug: Technik und die Fluidität von Lernen und Lehren. In K. Bader & K. Weber (Hrsg.), *Alltägliche Lebensführung* (S. 194-233). Argument.

Oevermann, U. (2002). *Klinische Soziologie auf der Basis der Methodologie der objektiven Hermeneutik: Manifest der objektiv hermeneutischen Sozialforschung*.

Pepin, B. (2014). Student transition to university mathematics education: transformations of people, tools and practices. In S. Rezat, M. Hattermann & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Transformation - a Fundamental Idea of Mathematics Education* (S. 65-83). Springer.

Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which Influence Do School-Related Variables Have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(7), 1343-1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Schoenfeld, A. H. (1992/2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education*, *196*(2), 1-38.

Stoffels, G. (2020). *(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen: eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule-Hochschule* Dissertation, Siegen, Universität Siegen, 2019].

Thomas, M. O. J., de Freitas Druck, I., Huillet, D., Ju, M.-K., Nardi, E., Rasmussen, C., & Xie, J. (2015). Key Mathematical Concepts in the Transition from Secondary School to University. In S. J. Cho (Hrsg.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (S. 265-284). Springer International Publishing.

Vohns, A. (2010). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *31*(2), 227-255. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0012-0

Vohns, A. (2018). *Mathematische Bildung am Ausgang ihrer Epoche? Keine bloß rhetorische Frage*. Universitätsbibliothek Dortmund.

Vohns, A. (2020). *Woran scheitert mathematische Bildung? Plädoyer für einen bewussten Standpunktwechsel*.

Waldenfels, B. (1987). *Ordnung im Zwielicht*. Suhrkamp.

Waldenfels, B. (1994). *Antwortregister*. Suhrkamp.

Waldenfels, B. (1997). *Topographie des Fremden. Studien zur Phänomenologie des Fremden 1*. Suhrkamp.

Zirfas, J. (2018). *Einführung in die Erziehungswissenschaft*. Ferdinand Schöningh.

Johanna RUGE, Universität Hamburg
johanna.ruge@uni-hamburg.de

Die Bildung von Kompetenzerwerbsbegleiter:innen und (Über-)Prüfungskult(ur)

Der Beitrag greift die von Andreas Vohns getroffene Zeitdiagnose auf, dass sich ein neues idealtypisches Bild der Mathematiklehrkraft als „kompetente Kompetenzerwerbsbegleiter(in)" durchsetzt. Andreas Vohns selbst formulierte Zweifel daran, inwiefern dieses Bild eine Stützfunktion für die Lehrer:innenbildung darstellt, und verwies dabei auf die Verbindung des Begriffes zum Prüfungswesen. Diese Verbindung wird im Beitrag näher betrachtet, um die Einblicke in das veränderte Bild von Mathematiklehrkräften und deren (Aus-)Bildung, anzureichern. Hierzu werden zum einen wissenschaftliche Diskurse befragt, um die zentrale Rolle von Überprüfbarkeit innerhalb der Kompetenzorientierung einzuordnen. Hierbei fällt auf, dass in der Forschung die Einblicke zu potentiellen Wirkungen von Bewertungspraxen auf das pädagogische Verhältnis zwischen Lehrenden und Lernenden rar gesät sind und nicht hinreichend im aktuellen Diskurs reflektiert werden. Zum anderen wird ergänzend auf ausgewählte Ergebnisse einer Interviewstudie mit Mathematiklehramtsstudierenden zurückgegriffen. In den dargestellten Perspektiven finden sich Bezüge zwischen den von meinen Interviewpartnerinnen geschilderten Erfahrungen im Studium sowie Idealbildern guten Mathematikunterrichts und dem idealtypischen Bild der Mathematiklehrkraft als kompetente:r Kompetenzerwerbsbegleiter:in. Aus diesen beiden Blickwinkeln lässt sich ein problematisches Verhältnis zwischen Profession und der Generierung wissenschaftlichen Wissens ‚über' jedoch nicht ‚mit' (angehenden) Lehrkräften ableiten.

1. Einleitung

Dieser Beitrag knüpft an die von Andreas Vohns (2017) getroffene Zeitdiagnose an, dass sich ein neues idealtypisches Bild des Berufes der Mathematiklehrkraft und einer entsprechenden (Aus-)Bildung durchsetzt: „kompetente Kompetenzerwerbsbegleiter(innen)" (ebd., S. 159). Dieses Bild verknüpft Mathematikunterricht und auch Mathematiklehrer:innenbildung mit einer Kompetenzorientierung (siehe unten). Es wird die Rolle einer Lehrkraft als Begleiter:in hervorgehoben und für eben diese Rolle sollen Lehrkräfte auch qualifiziert werden. Als kritisch betrachtet Andreas Vohns bei dem Bezug auf Kompetenzen die bildungspolitische ökonomisch-technokratische Rahmung[1] (ebd., S. 161). Er ordnet dieses idealtypische Bild in die historische Entwicklung des Berufsstandes von Lehrkräften und damit einhergehende Vorstellungen und Kämpfe ein, die deren

In S. Pohlkamp, M. Helmerich, D. Kollosche, K. Lengnink & T. Hamann (Hrsg.), *Mathematische Bildung neu denken: Andreas Vohns erinnern und weiterdenken* (S. 199–213). Münster: WTM-Verlag 2024. https://doi.org/10.37626/GA9783959872065.0

(Aus-)Bildung betreffen. Hervorzuheben ist, dass sich in der historischen Entwicklung nun ein gemeinsames idealtypisches Bild für Mathematiklehrkräfte an Gymnasien sowie an ‚Grund-, Haupt-, und Realschulen' [GHR] herausgebildet hat (ebda., S. 159–161). Zuvor identifizierte Andreas Vohns ein idealtypisches Bild für Gymnasiallehrkräfte – *mathematisch Gelehrte* – und eines für GHR-Lehrkräfte – *gebildeter Schulmann* (ebd., S. 146–159). Diese Trennung ging unter anderem mit Unterschieden in der Berufsprestige einher und der Frage der Wissenschaftlichkeit, bzw. die Rolle und das Ausmaß einer wissenschaftlichen (Aus-)Bildung für angehende Lehrer:innen. Wie Andreas Vohns hervorhebt, erkämpften sich Lehrkräfte im historischen Verlauf, dass nicht nur angehenden Gymnasiallehrkräften eine universitäre Bildung zu Teil wird (ebd., S. 151).

Mit dem Fokus auf Kompetenzen wird nicht nur vermeintlich eine Trennung der Mathematiklehrkräfte aufgehoben, es werden auch Reformbestrebungen im Bildungswesen hiermit verbunden. Diese betreffen die Einführung der Bildungsstandards auf Schulebene und somit hält der Kompetenzbegriff Einzug in die Curricula für angehende Mathematiklehrkräfte. Es wird davon ausgegangen, dass das mit der Einführung von Bildungsstandards intendierte Reformmodell nur dann erfolgreich sein kann, „wenn Lehrer über die notwendigen Kompetenzen und Einstellungen verfügen bzw. diese erwerben" (Klieme, 2004, S. 631). Zudem wird die Etablierung von Kontrollsystemen (die über bereits zuvor etablierte professionsinterne Normen hinausreicht) für notwendig erachtet (ebd., S. 627). Innerhalb dieser Logik wird der Wissenschaft eine spezifische Rolle zugeschrieben: Diese soll u.a. die Instrumente für die Kontrolle und Weiterentwicklung des Bildungswesens bereitstellen (siehe Kap. 2). Auf universitärer Ebene ist die Kompetenzorientierung zusätzlich mit der Bologna-Reform und einhergehenden Veränderungen und Umstrukturierungen von Studium und Lehre verbunden.

Diesem nun vorherrschenden „Leitbegriff *‚Kompetenzorientierung"*" (Vohns, 2017, S. 161/Reuser, 2014, Hervorhebung durch Autorin) im Bildungssystem und vor allem in der Lehrer:innenbildung steht Andreas Vohns kritisch gegenüber und stellt in Frage, ob dieser Leitbegriff „als solcher dem Anspruch von Lehrpersonenbildung nicht eher als Gegenbegriff denn als Stütze gegenüber steht" (2017, S. 161). Zweifel an der Stützfunktion des Begriffs bezieht er unter anderem auf das in der Kompetenzorientierung vorherrschende Verständnis von professionellem Wissen und die damit einhergehende Zielsetzung:

> [Das] […] nicht kodifizierte, oft implizite »Wissen der Praxis« […] als etwas letztlich doch von der Mathematikdidaktik zu Erhebendes, Kodifizierendes, Systematisierendes und damit letztlich auch wieder der formalen Ausbildung und dem Prüfungswesen unmittelbar zugänglich zu Machendes [aufzufassen]. (Vohns, 2017, S. 159)

Eben diese Verbindung zu (Über-)Prüfungen möchte ich in diesem Beitrag näher betrachten, um die Einblicke in das veränderte Bild von Mathematiklehrkräften

und deren (Aus-)Bildung anzureichern. Hierzu werde ich zuerst wissenschaftliche Diskurse befragen. Zunächst werde ich die zentrale Rolle von Überprüfbarkeit innerhalb der Kompetenzorientierung kurz skizzieren und einordnen (siehe Kap. 2). Die Überprüfbarkeit von Lernenden, Lehrenden und Lehr-Lern-Arrangements sind dabei unerlässlich für die innere Logik der Kompetenzorientierung. Bestrebungen der mathematikdidaktischen Wissenschaftsgemeinschaft professionelles Wissen in *Kompetenzen* zu konzeptualisieren (Vohns, 2017, S. 159–161) und anhand immer weiter ausdifferenzierter Kompetenzkonstrukte messbar und somit überprüfbar zu machen, können innerhalb dieser Logik verstanden werden als Bestrebungen eine umfassende (Aus-)Bildung zu gewährleisten. Die potentiellen Wirkungen von Bewertungspraxen auf das pädagogische Verhältnis zwischen Lehrenden und Lernenden werden jedoch nicht hinreichend innerhalb des wissenschaftlichen Diskurses in der Mathematikdidaktik reflektiert (siehe Kap. 3). Die in der Forschung rar gesäten Einblicke hierzu möchte ich, zweitens, um die Perspektive von Mathematiklehramtsstudierenden ergänzen, die mir Einblicke in ihre Lernerfahrungen im Studium gegeben haben. In Interviews mit Studierenden über ihre Lernerfahrungen im Mathematiklehramtsstudium wird das idealtypische Bild der Mathematiklehrkraft als kompetente:r Kompetenzerwerbsbegleiter:in – wenn auch selbstredend nicht direkt als solches benannt – von einzelnen Studierenden für sich angenommen und auf ihre Erfahrungen im Studium und Idealbilder guten Mathematikunterrichts bezogen. Kompetenz-Terminologie ist im Mathematiklehramtsstudium allgegenwärtig. Somit ist es auch nicht verwunderlich, dass diese Terminologie auch von Studierenden aufgegriffen wird, um ihre Erfahrungen und Standpunkte verständlich zu machen. Von Anna und Bianca habe ich gelernt, was das idealtypische Bild der/des kompetenten Kompetenzerwerbsbegleiter:in angehenden Mathematiklehrkräften als Bezugspunkt anbieten kann. Mit Hilfe von Annas Perspektive möchte ich den Aspekt der (Aus-)Bildung durch Begleitung stärker betrachten. Biancas Perspektive thematisiert stärker den Aspekt der Kompetenzen als Agenten des Wandels (siehe Kap. 4). Als Fazit meiner Einblicke möchte ich auf das meines Erachtens problematische Verhältnis zwischen Profession und der Generierung wissenschaftlichen Wissens *über* jedoch nicht *mit* (angehenden) Lehrkräften eingehen (siehe Kap. 5).

2. Logiken der Kompetenzorientierung

Überprüfbarkeit spielt eine zentrale Rolle innerhalb des Gesamtkonzeptes der Einführung und Fortentwicklung eines *kompetenzorientierten* Unterrichts: Selbstprüfung, informelle und formelle Überprüfungen des Leistungsstandes von Lernenden, und Überprüfung „lernförderlicher“ Lehr-Lern-Arrangements (z. B. anhand von Leistungsständen). Die Wichtigkeit von Prüfungen im Schulwesen ist keineswegs neu und exklusiv in der Kompetenzorientierung vertreten. Wie Holzkamp (1992) hervorhebt, ist ein

> Administratives Kriterium für das Vorankommen der Schülerinnen/Schüler […] die […] quantifizierende Leistungsbewertung nach dem System der Schulnoten. Der offizielle Schulzweck der »gerechten« Zuweisung zu unterschiedlichen Berufslaufbahnen/Lebenschancen ist dabei nur zu erreichen, wenn die Notengebung als streng vergleichbar bzw. einheitlich ausgegeben werden kann. (ebd., S. 3)

Leistungsbewertungen und damit logischerweise einhergehend Prüfungen haben im Bildungssystem jeher eine große Relevanz. Somit stellt sich die Frage, was ist spezifisch an dem neuen Leitbegriff der Kompetenzorientierung?

Ebenso wie beim Bildungsbegriff, handelt es sich beim Kompetenzbegriff um einen Sammelbegriff und dieser Begriff kann und wird durchaus unterschiedlich ausgelegt. In der Mathematiklehrer:innenbildung wird sich hier vor allem auf ein pädagogisch-psychologisches Verständnis aus der empirischen Bildungsforschung bezogen (Vohns, 2017, S. 159). Mit diesem Verständnis geht eine spezifische Betrachtungsweise von und eine spezifische Zielvorstellung einer angestrebten Professionalisierung[2] einher (Ruge et al., 2019). Innerhalb dieses Ansatzes wird „Kompetenz als eine personenbezogene innerpsychische Dimension“ (ebd., S. 120) verstanden und als „latentes Merkmal definiert, das gewissermaßen garantiert, dass der kompetent Handelnde in immer neuen Situationen adäquate Handlungen generieren kann (Klieme & Hartig 2008)“ (ebd., S. 120). In diesem Sinne verspricht die Kompetenzorientierung die Vorbereitung auf eine ungewisse Zukunft, da Kompetenzen flexibel einsetzbar seien. Die angestrebte Professionalisierung ist somit gerichtet auf Individuen – Mathematiklehramtsstudierende – deren Fähigkeiten, Fertigkeiten und auch Einstellungen entwickelt werden sollen:

> In (Aus-)Bildungsdiskursen wird der Kompetenzbegriff im Wesentlichen präskriptiv-normativ verwendet um etwa personenbezogen berufliche Anforderungen oder (Aus-)Bildungsziele zu formulieren. […], [D]ie Idee der Kompetenzentwicklung folgt einem Expertisemodell, nach dem benötigtes Expertenwissen mit einhergehenden Einstellungen schrittweise aufgebaut werden kann (bspw. Blömeke et al., 2013). (ebd., S. 120 f.)

Die Entwicklung des Berufsfeldes als eine kollektive Professionsentwicklung ausgehend von den Lehrkräften selbst ist hingegen nicht Bestandteil des Professionalisierungsmodells, stattdessen soll die Empirie in Form von *large-scale-assessment*-Studien eine Weiterentwicklung im Bildungssystem gewährleisten (bspw. Buchholtz et al., 2014). Hierfür spielt die Annahme der Messbarkeit von Kompetenzen und Einteilung in Kompetenzniveaus eine entscheidende Rolle (vgl. Klieme & Hartig, 2008). Dieses Format der Weiterentwicklung bedarf regel-

mäßiger Überprüfungen von Leistungsständen. Diese erfolgen zusätzlich zu Prüfungen zur Vergabe von Schulnoten, um mittels vermeintlich neutraler wissenschaftlicher Techniken objektive Daten generieren zu können.

Diese Verschiebung im Diskurs im Verständnis von Professionalisierung kritisiert Popkewitz auf internationaler Ebene bereits 1994: „The discussion about professionalism has moved to rationalize (and control) teachers' knowledge of pedagogical practice, through strategies of educational research" (ebd., S. 5).

Dies geschieht bspw. indem Fragen der (Aus-)Bildung von angehenden Mathematiklehrkräften in empirische Fragen umformuliert werden (bspw. Scheunpflug et al., 2006) und die Diskussion um das Wissen für eine ‚gute' pädagogische Praxis anhand von Modellen ‚erfolgreicher' pädagogischer Praxis und der Konzeption von Skalen zur Erfassung einzelner Modellkomponenten geführt wird. In diesen Modellen wird versucht ausgehend von „möglichst genauen Aufgabenbeschreibungen für den Lehrerberuf [...] Kompetenzbereiche und Wissensdimensionen" (Terhart, 2011) zu definieren und die

> beruflichen Fähigkeiten von Lehrern und deren Voraussetzungen hinsichtlich Wissen, Überzeugungen, Einstellungen, Handlungsroutinen etc. [...] auf ihren empirischen nachzuweisenden Beitrag zum Erreichen des Zwecks der Institution Schule/Unterrichten [zu beziehen, nämlich] „nachweisbare fachliche und überfachliche Lernerfolge bei den Schülern. (ebd., S. 207)

Dies stellt eine Engführung der Diskussion darüber, was einen ‚guten' Mathematikunterricht auszeichnet und eine Reduktion dieser auf empirische Nachweisbarkeit dar. Es trägt zu einer Vereinseitigung im Verhältnis von Wissenschaft und Profession bei. Diese Vereinseitigung formulieren Montecino & Valero (2015) pointiert, indem sie herausarbeiten, dass Lehrkäfte in offiziellen Dokumenten als *product* und als *sales agent* in Erscheinung treten, nicht jedoch als Teilhabende einer Profession und deren Entwicklung.

Das Vorantreiben solcher Entwicklungen geschieht sicherlich auch in der Hoffnung einer vermeintlich objektiven und neutralen Instanz zu folgen (vgl. Bellmann & Müller, 2011). Tatsächlich findet eher eine Verschiebung von Diskussionen bzw. *wer* diese Diskussion führt statt. Dies lässt sich anhand der Diskussion über die (Aus-)Bildung von Mathematiklehrkräften betreffende Konzeptualisierung von Fach- und fachdidaktischem Wissen verdeutlichen. Nach außen hin scheinen hier die Modelle *common-sense* Gleichsetzungen zu reproduzieren, wie etwa die „common-sense Gleichsetzung ‚Top im Fach = Top Vermittler'" (Vohns, 2009, S. 7). Die Gleichsetzung reproduziert zugleich eine – nicht nur im Bereich der Mathematik – im wissenschaftlichen und öffentlichen Diskurs bestehende Abwertung des Grundschullehramts im Vergleich zum Gymnasiallehramt (Faulstich-Wieland et al., 2010) und zudem auch der Lehramts- gegenüber den Fach-

studierenden. Somit ist auch mit der Kompetenzorientierung die Differenz zwischen Gymnasial- und GHR-Mathematiklehrkräften im Diskurs mitnichten aufgehoben. Die Diskussion wird innerhalb der Kompetenzorientierung über die adäquate Konstruktion von Skalen – also vermittelt über bestimmte Technologien, die häufig nicht umfassend öffentlich zugänglich sind[3] – geführt. So kritisieren bspw. Buchholtz et al. (2014), dass in „bisherige[n] einschlägige[n] Studien das fachdidaktische Wissen in erster Linie stark mathematisch orientiert" (ebd., S. 103) operationalisiert worden sei. Die alternative Konzeptualisierung der Autor:innen dieser Studie kommt zu einer anderen Einschätzung der Leistungen von Mathematiklehramtsstudierenden und widerspricht dem gängigen Befund, dass (angehende) Gymnasiallehrkräfte über mehr fachdidaktisches Wissen als GHR-Lehrkräfte verfügen. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass es sich hierbei um mehr als eine innerwissenschaftliche Diskussion über Technologien der Bildungsforschung handelt, eben da diese den Anspruch erheben für die ‚Verbesserung' der (Aus-)Bildung eingesetzt zu werden.

Der Einsatz von Leistungsstanderhebungen wird auf Schulebene weitaus stärker diskutiert als im universitären Bereich – dies mag sicherlich auch an der fortgeschrittenen Implementation liegen. Das Leistungsstanderhebungen durchaus einen Einfluss auf die Vorstellungen über Lehrkräfte und auch Schüler:innen haben zeichnen Montecino & Valero (2015) und Andrade-Molina (2017) am Beispiel von Diskursen im Kontext von *large-scale-assessment* Studien nach. Dass die durch *PISA & Co* (Jahnke & Meyerhöfer, 2006) zusätzlich eingeführten (Über-)Prüfungen Auswirkung auf die Unterrichtspraxis haben, wird bspw. mit Blick auf den Einfluss auf die Unterrichtsinhalte und Bildungskonzepte kritisiert. Weniger im Fokus der Debatte steht der Einfluss solcher Praktiken auf das pädagogische Verhältnis von Lehrenden und Lernenden.

3. Bewertungspraxen und das pädagogische Verhältnis

(Über-)Prüfungen sind keineswegs neutrale Mittel, um z.B. den Lernfortschritt eines Individuums oder von bestimmten Gruppen, zu überprüfen. Sie sollten eher als eine gesellschaftlich-vermittelte soziale Praxis aufgefasst werden (Kousholt, 2016). Diese Praxis wird u.a. beeinflusst durch und hat Einfluss auf das Verhältnis zwischen Studierenden und Lehrenden. Dies findet in der mathematikdidaktischen Forschung jedoch kaum Beachtung. Cabral & Baldino (2019a) werfen der mathematikdidaktischen Forschung in Bezug auf den Zusammenhang zwischen Bewertungspraxen und sozialen Selektionsprozessen[4] gar eine symptomatische Blindheit vor. So fänden sich in der mathematikdidaktischen Bearbeitung des Themas Bewertung vor allem Versuche Bewertungsprozesse vertrauenswürdig zu gestalten – im Zuge der Kompetenzorientierung wird hier auch von einem Wandel der Prüfungskultur gesprochen (siehe für eine Einordnung im deutschen Hochschulkontext: Döbler, 2019) –, was wiederum mit der Hoffnung einhergehe, somit

auch zu einer ‚gerechten' Gesellschaft beizutragen. Der Aspekt, dass Bewertungsergebnisse eben auch exkludierend wirken, und der Umgang damit seien, jedoch unterrepräsentiert. So gäbe es bspw. eine breite Auseinandersetzung mit formativen Leistungsbewertungen, die Auseinandersetzung mit summativer Leistungsbewertung im mathematikdidaktischen Diskurs sei hingegen rar.

Die hinter der Annahme von ‚gerechten' Bewertungspraktiken liegende Logik illustrieren Cabral & Baldino (2019b) anhand eines Zwiegespräches zwischen einer fiktiven Lehrerin namens Mrs. Smith und *the Big Other*[5]. Sie arbeiten heraus, dass summative Leistungsbewertungen – welche in Folge der Implementierung der Kompetenzorientierung auch in der universitären Lehre zugenommen haben – die didaktische Beziehung zwischen Lehrenden und Lernenden spaltet. Entsprechend betrachten sie die Ausübung von Bewertung durch Lehrende als einen *splitting moment.* Die seltene Auseinandersetzung mit dieser Thematik in der Mathematikdidaktik betrachten sie als "a symptom of the inherent uneasiness that teachers experience at the moment of assigning marks to students; we call this the promotional splitting moment." (Cabral & Baldino, 2019a).

Nissen & Mørck (2019) führen aus, dass sich die Alltäglichkeit von Bewertungen in Bildungsinstitutionen[6] auch auf das Verhältnis von Lehrenden und Lernenden in universitären Seminaren niederschlägt – die auf Kollaboration in der Betrachtung eines gemeinsamen Gegenstandes ausgelegt und nicht im Sinne eines Transfermodells konzeptualisiert sind. Dies erschwere eine kritische Auseinandersetzung mit einem gemeinsamen Lerngegenstand für Lehrende und Lernende. In der universitären Lehrer:innenbildung kommen in dem Bereich Mathematik zusätzlich noch fachkulturell spezifische Praktiken hinzu. Inwieweit diese ebenso hinderlich für einen Bildungsprozess sein können, thematisiert Khellaf (angenommen). In ihrer Studie zeichnet sie nach inwiefern das Lehr-Lern-Arrangement universitärer Lehrer:innenbildung einen minimalen Mitarbeitsmodus von Mathematiklehramtsstudierenden in fachdidaktischen Veranstaltungen begünstigt[7].

Die Studie von Kousholt (2016) gibt Hinweise darauf, dass bereits die soziale Praxis von (Über-)Prüfungen auch ohne die Vergabe von Noten durch die Lehrkraft einen Einfluss auf das Verhältnis von Schüler:innen und Lehrer:innen hat. Sie betrachtet konkret die Situation einer Leistungsstandserhebung, also einer Situation in der die Lehrkraft eben nicht für die Notenvergabe verantwortlich ist, allerding an der Testdurchführung beteiligt ist. Ihre Analyse von Schüler:innenhandlungen in Testsituationen zeigt auf, dass diese in der Testsituation nach Anzeichen einer Beurteilung suchen. Die jeweiligen Handlungen der Schüler:innen sind durchaus unterschiedlich. Es sollte jedoch nicht vernachlässigt werden, dass die Testsituation eine Wettbewerbssituation induziert. Diese hat auch einen Einfluss auf das Verhältnis von Schüler:innen untereinander und zum jeweiligen Inhalt. Diese Situation der Überprüfung ist sicherlich nicht gleichzusetzen mit einer Bewertungssituation, in der Noten vergeben werden, dennoch bringen solche

Überprüfungen zusätzliche Momente in die alltägliche Schulpraxis, in der die Logik von Wettbewerb und Vergleichsmaßstäben vorherrscht. Kousholt (2016) kritisiert

> what happens in the context […] is not included in the standard presentation of the test results. Instead, the test results will appear as a context-free measurement of the individual's academic aptitude in the tested area – no more and no less. What seems to be a neutral tool for measuring the individual learner's achievement level in isolation becomes part of children's attempts to make sense of the test. (ebd., S. 390)

Bewertungspraktiken sind ein zentraler Bestandteil des Bildungssystems. Durch die Idee, das weitere (Über-)Prüfungen von Leistungsständen zum Zwecke der Weiterentwicklung des Bildungssystems eingeführt werden müssen (siehe oben), werden (Über-)Prüfungen noch präsenter im Lehr-Lern-Alltag. Für Mathematiklehramtsstudierende ist das Thema Bewertung auf zweifache Weise relevant. Zum einen werden sie im Laufe ihres Studiums selbst bewertet und müssen sich (Über-)Prüfungen stellen. Zum anderen müssen sie zukünftig als Lehrkraft andere bewerten, somit wäre die Auseinandersetzung mit Bewertung auch eine Auseinandersetzung mit ihrer zukünftigen Berufspraxis.

4. Was ich von Mathematiklehramtsstudierenden gelernt habe

Mit dem idealtypischen Bild der/des kompetenten Kompetenzerwerbsbegleiter:in findet eine Verflechtung der Idee von (Aus-)Bildung „durch Begleitung" mit Überprüfbarkeit statt. Diesen Aspekt möchte ich anhand von Aussagen von Mathematiklehramtsstudierenden illustrieren, die mir Einblicke in ihre Lernerfahrungen im Mathematiklehramtsstudium gegeben haben. Als Datengrundlage dienen leitfadengestützte Interviews (Kvale & Brinkmann, 2009) mit Mathematiklehramtsstudierenden, welche als Momentaufnahmen von Studierendenperspektiven aufgefasst werden können. Im Rahmen eines Forschungsprojektes, welches sich mit Lernerfahrungen im Mathematiklehramtsstudium befasst, habe ich insgesamt zehn Interviews mit Studierenden in unterschiedlichen Studienphasen und mit verschiedenen Fächerkombinationen durchgeführt. Anna und Bianca[8] waren zwei meiner Interviewpartner:innen. Die Auswertung der Interviews mit Anna und Bianca orientierte sich an der Grounded Theory Methodologie (Mey & Mruck, 2020). Der Bezug zum idealtypischen Bild der/des kompetenten Kompetenzerwerbsbegleiter:in ergibt sich als ein Ergebnis der rekonstruktiven Interpretation des Datenmaterials und wurde nicht explizit in den Interviews erfragt. In den Interviews wurden Motive für die Aufnahme eines Mathematiklehramtsstudiums, Erfahrungen im Studienkontext, sowie die Gestaltung des alltäglichen Lernens erfragt.

Im Folgenden wird jeweils eine kurze, auf das Thema dieses Beitrags zugeschnittene Vignette dargestellt. Diese sind jeweils fokussiert darauf, was ich von meinen

beiden Interviewpartnerinnen über Aspekte das neue idealtypische Bild betreffend gelernt habe. Es handelt sich somit nicht um eine vollständige Darstellung der jeweiligen Perspektiven, sondern eine spezifische Reflexion dieser Perspektiven in Bezug auf das idealtypische Bild. Die folgende Darstellung soll Logiken verdeutlichen und Möglichkeiten aufzeigen, wie dieser Themenkomplex ausgedeutet werden kann. In der Kürze werden diese der Perspektive, die ich von Anna und Bianca auf das Mathematiklehramtsstudium erfahren durfte, nicht gerecht. Weitere Analysen sind an anderer Stelle beschrieben, die weitere Aspekte ausleuchten und auch die Ambiguitäten, die in dem Gesagten enthalten sind, stärker fokussieren (Ruge, 2023, 2022; Ruge & Hochmuth, 2017).

Anna

Die Idee einer (Aus-)Bildung durch Begleitung ist in dem Interview mit Anna eng verbunden mit dem Themenkomplex Bewertung und Kontrolle. Dies führt sie anhand ihrer Erfahrungen aus, die sie in ihrer Schulzeit und in ihrem bisherigen universitären Studium gemacht hat. Vor allem Kontrolle wird in ihren Beschreibungen eines pädagogischen Verhältnisses positiv konnotiert dargestellt. Kontrolliert zu werden bedeutet für sie eine Interessenbekundung des Gegenübers. Dies wird in ihren Beschreibungen einer Lehrkraft, die für sie als ein positives Vorbild dient, deutlich

Anna: *Und ja, dass man nicht so alleine gelassen wurde, also. Auch, was ich auch ganz toll fand, dass sie immer die Hausaufgaben kontrolliert hat*

und in ihrer Enttäuschung des Fehlens einer solchen Praktik – die mit einer engmaschigeren Begleitung des Lernprozesses einhergeht – im Studienkontext

Anna: *Und (.) also ich sage mal in der Schule gibt es ja immer diese Rückblicke oder Übungszettel von Lehrern, hier habt ihr die und Lösung findet ihr da und da. Das ist ja hier nicht/ nicht SO gegeben, sage ich mal. Und mir hat das Sicherheit gegeben, weil ich dann/ Ich muss es halt machen, um es richtig zu begreifen.*

Holzkamp (1991) weist daraufhin, dass in institutionalisierten Bildungskontexten Feedback zu Aufgaben mit summativen Leistungsbewertungen - auch außerhalb von Prüfungssituationen - verbunden sind. Die Deutung von Kontrolle als Fürsorge für Lernende, als Begleitung von Lernenden, ermöglicht einen Umgang mit der in Bildungsinstitutionen präsenten Notenvergabe. Dies lässt das von Cabral & Baldino (2019a, siehe oben) thematisierte Unbehagen womöglich nicht aufkommen bzw. aushalten[10].

Durch das Interview hindurch ziehen sich Beschreibungen von Lernen für anstehende Prüfungen (siehe Ruge, 2023). Die Relevanz von Inhalten wird in Noten ausgedrückt und zeitgleich bleiben diese als ein abstrakter Vergleichsmaßstab zu Anderen präsent.

Anna: *Ähm also ich, es kommt immer darauf an, was der Lernstoff ist. Ob ich weiß, der liegt mir, der liegt mir nicht. (..) Der interessiert mich, der interessiert mich nicht. Und dementsprechend sage ich, „okay, das interessiert mich nicht, damit möchte ich mich nicht so viel befassen, komm, da reicht dir auch eine 4,0, Hauptsache durch". Wenn ich jetzt aber weiß, okay Mathe und das macht dir eigentlich Spaß, und dieser Bereich, da hast du auch von anderen gehört, den kann man gut schaffen, dann habe ich schon das Bedürfnis, äh da auch GUT zu sein. Aber ich weiß auch, dass ich nicht die Einserkandidatin bin.*

Annas Lernprozess für Prüfungen lässt sich als kooperatives Bewältigungslernen mit Kommiliton:innen charakterisieren, bei dem auf spielerische Weise (z.B. durch das gemeinsame Erstellen und Spielen eines Memory-Spiels) eine gegenseitige Kontrolle des Lernfortschritts stattfindet.

Anna favorisiert eine Ausbildungsstruktur, da sie innerhalb einer solchen Struktur auch die Möglichkeit sieht, Unterricht gemeinsam mit Lehrkräften fortzuentwickeln. Damit durchbricht sie enggefasste Vorstellungen von (Aus-)Bildung durch Begleitung, indem sie strebt ein gegenseitiges voneinander Lernen anstrebt:

Anna: *Und hat dann halt Unterstützung von der Lehrerin, die ja Berufserfahrung hat. So. Was wiederum auch glaube ich den Lehrern guttun würde, weil sie nicht nur in ihrem eigenen Süppchen brodeln, sondern auch immer wieder welche/ junge Leute haben, die neue didaktische Einflüsse mit einbringen*

Bianca

Im Interview über ihre Lernerfahrungen im Mathematiklehramtsstudium nimmt Bianca explizit Bezug auf den derzeitigen Veränderungsprozess, die Vorstellungen, was eine gute Mathematiklehrkraft auszeichnet und wie die (Aus-)Bildung organisiert ist[9]:

Bianca: *also meiner Meinung nach, sehe ich halt den / gerade den Mathelehrer im Wandel, oder gerade den ganzen / die ganzen / die ganze Ausbildung, die ja irgendwie eine andere ist oder eine neuere ist und dass es mit diesen Kompetenzen halt so zu sagen auch so ein bisschen erst von uns in die Schule getragen werden muss*

Ihr Idealbild einer Mathematiklehrkraft beschreibt sie selbst als eine Mathematiklehrkraft die *kompetenzorientiert unterrichtet*. In ihren weiteren Ausführungen betont sie hierbei zwei Aspekte die sie als wichtig empfindet und mit dem Begriff *Kompetenzen* assoziiert. Erstens, betont sie, dass sie *gerne was mit Menschen machen möchte, aber wiederum auch vor allem Mathe*. Es ist ihr ein Anliegen Mathematik und Mensch *dann wirklich zusammen, zusammen zu bringen.* Der Kompetenzbegriff dient hier als eine Art Vermittler und ist für Bianca eben nicht durch

eine Aufsplittung, wie sie bspw. in Kompetenzmodellen zu finden ist (siehe Ruge 2017, 2022), gekennzeichnet. Zweitens, greift sie die Idee des kompetenzorientierten Unterrichts auf, um sich von dem idealtypischen Bild des mathematisch Gelehrten als Mathematiklehrkraft abzugrenzen. Sie beschreibt negativ konnotiert den Unterricht einer ihrer früheren Mathematiklehrer als *das hatte halt überhaupt nichts mit Anschaulichkeit und anderen Kompetenzen zu tun. Und das war halt die reine Fachmathematik*. Im Kontrast dazu wäre es ihr wichtig, dass *auch ALLE Kompetenzen* unterrichtet werden, um *alle Schüler sozusagen mit ins Boot zu holen*.

Die Bezugnahme auf den Kompetenzbegriff greift die Verbindung zu Reformbestrebungen[11] auf und nutzt diese als Abgrenzung gegenüber einer Überhöhung von mathematischem Fachwissen als einzig relevantem Wissen (vgl. *‚Top im Fach = Top Vermittler‘*).

Kompetenzorientierung ist für Bianca vor allem mit Praxisrelevanz verbunden und der Aspekt der Kontrolle spielt weniger eine Rolle. Praxisrelevanz ist für sie auf zweifache Weise bedeutsam. Zum einen auf der Inhaltsebene: Kompetenzorientierte Inhalte im Studium haben für sie Praxisrelevanz, da diese quasi mathematische Inhalte mit dem Menschen verbinden (siehe oben). Zum anderen in dem jeweiligen Bezug zum Lerngegenstand: Dieser kann für sie sowohl in Form von Schulpraktika hergestellt werden als auch über Theorie. In einem Studium ist ihr Raum für eigene Entscheidungen wichtig. Sie betont den eigenen Weg zu den Inhalten. Dieser eigene Weg sollte ihrer Meinung nach im Rahmen eines kompetenzorientierten Studiums möglich sein. Ebenso betont sie die Möglichkeit der Mitgestaltung, welche in dieser Offenheit liegt.

5. Fazit

Die Kopplung von Bildungsanliegen mit Disziplinierungstechnologien in Bildungsinstitutionen als auch in didaktischen Theorien und Rahmenmodellen ist keineswegs ein neues Phänomen (siehe Holzkamp, 1995, Kap. 4). Anhand der kurzen Einblicke in diesem Beitrag, lässt sich jedoch argumentieren, dass diese sich innerhalb der Kompetenzorientierung in veränderter Form darstellt.

Im Kontext der Kompetenzorientierung wird häufig ein Wandel der Prüfungskultur proklamiert bzw. gefordert. Betrachtet mensch die innere Logik der in der empirischen Bildungsforschung und in der Mathematikdidaktik aufgegriffenen Kompetenzorientierung, so lässt sich zugespitzt eher von einem Überprüfungskult sprechen. Der Mathematikunterricht und die Mathematiklehrer:innen(aus-)bildung soll ‚verbessert‘ werden, indem Überprüfungen von Leistungsständen ‚erfolgreiche‘ Unterrichtsmodelle herausfinden. Was als ‚erfolgreich‘ gilt, versteckt sich hinter wissenschaftlichen Modellen[12]. Setzt sich diese Bewegungsrichtung durch, so handelt es sich um einen Weg von einer gemeinsamen Auseinandersetzung von Praktiker:innen und Wissenschaftler:innen über professionsrelevante

Themen hin zu einer Deutungsmacht wissenschaftlicher Konstrukte. Die Bewegungsrichtung würde einer demokratischen Vorstellung einer kritischen mathematischen Bildung und deren Ausgestaltung (Skovsmose & Valero, 2002) widersprechen und eine weitere *de|mathematisation* (Straehler-Pohl, 2017) des Diskurses vorantreiben, die eine explizite Auseinandersetzung erschwert.

Mathematiklehramtsstudierenden hat der Kompetenzbegriff und die Idee einer (Aus-)Bildung durch Begleitung oberflächlich betrachtet durchaus etwas anzubieten und Teilaspekte werden aufgegriffen. Hierbei ist wichtig zu beachten, dass es sich keineswegs um eine Eins-zu-Eins Übernahme handelt, sondern eigene Ausdeutungen kreiert werden. Sowohl Anna und Bianca erachten eine Mitgestaltung der Weiterentwicklung ihrerseits des Lehrberufs für erstrebenswert. Ihre Perspektiven sollten im Prozess einer kollektiven Professionsentwicklung ernst genommen werden. Grundideen universitärer Bildung bieten hier durchaus die Möglichkeit eines Austausches zwischen Wissenschaft und angehenden Lehrkräften. Marvakis & Schraube (2019) betonen die Möglichkeiten, die trotz aller Einschränkungen in formalen, institutionalisierten Lernverhältnissen und pädagogischen Praktiken bestehen:

> Ein genauer Blick in schulische und universitäre Lernverhältnisse zeigt, dass die Fluidität von Lernen und Lehren[13] bis heute eine, wenn nicht die zentrale Form des Lernens darstellt. Studierende, gefragt, in welchen Situationen sie wirklich etwas lernen, betonen, wie sie durch Diskussionen unter sich und mit wechselseitigen Fragen und Erklären sich in ein inhaltliches Problemfeld hineindenken und Phänomene in ihren Zusammenhängen zu verstehen beginnen; aber auch Lehrende betonen, dass sie die Lehre gerade deswegen schätzen, weil sie dabei ständig von und mit den Studierenden etwas lernen. (ebd., S. 146)

Eine Personalisierung beruflicher Anforderungen und verstärkte Individualisierung des Professionalisierungsverständnisses erscheint für eine kollektive und kooperative Auseinandersetzung nicht dienlich. Ein solcher Aushandlungsprozess, indem Studierende und Dozierende eine beidseitige Verantwortung für einen gemeinsamen Lernprozess übernehmen, würde eine *Fluidität* von Positionen im Lernprozess verlangen (vgl. hierzu Marvakis & Schraube, 2019) – also ein reziproker Prozess, der es erlaubt auch von den jeweiligen Studierendenperspektiven zu lernen. Es wäre verfehlt eine beidseitige Verantwortung für einen Lernprozess mit einer rollenkonformen Erfüllung von Erwartungen an fixierten Positionen gleichzusetzen, wie das Modell der (Aus-)Bildung durch Begleitung auch gedeutet werden kann (, aber sicherlich nicht zwingend muss).

[1] Andreas Vohns (2017) bezieht diese ökonomisch-technokratische Rahmung auf das Spannungsfeld zwischen Bildung und Ausbildung: „Weitgehend unstrittig erscheint mir, dass mit dem Idealtypus »kompetenter Kompetenzerwerbsbegleiter(innen)« gleich in doppelter Weise die Spannung zwischen Bildung und Ausbildung […] in ihrer Ambivalenz als Frage

nach Allgemeinbildung […] sehr deutlich in Richtung der »anderen Zwecke« gelenkt werden soll und jedenfalls bildungspolitisch auch weit überwiegend ökonomisch-technokratisch gerahmt ist – Lehrer(innen) sollen für ihren Beruf qualifiziert werden und Mathematikunterricht wird als Anleitung zum rationalen Problembewältigungshandeln im privaten, öffentlichen und beruflichen Leben verstanden – für viel Aufhebens um Persönlichkeitsbildung hier und Technologiedefizit der Pädagogik da, bleibt dann wenig Zeit und Muße.“ (ebd., S. 161)

[2] Diese Betrachtungsweise wird teilweise auch als Beitrag zu einer Deprofessionalisierung gesehen.

[3] Hinzukommt, dass das Wissen über die Entwicklung solcher Skalen meist nicht Bestandteil des Wissens von Lehrkräften, also Professionsmitgliedern, ist. Dies erschwert eine konstruktive Debatte.

[4] Ihre Kritik ist eingebettet in eine weitreichendere Kritik des Bildungssystems. Baldino (1998) thematisiert die Auswirkungen der Selektions- und Allokationsfunktion der Schule auf Bewertungspraktiken und kritisiert soziale Selektionsprozesse und die Illusion von Leistungsgerechtigkeit. Eben diese Illusion sei zentral für die Funktionsweise des Bildungssystems im Kapitalismus.

[5] *Big Other* steht hier stellvertretend für kapitalistische Logiken/Denkweisen.

[6] Holzkamp (1995) spricht hier von Bewertungstotalität.

[7] Hiermit sind jedoch ausdrücklich keine Determinismen angesprochen.

[8] Namen wurden geändert.

[9] Holzkamp (1992) beschreibt diese Anforderung an Lehrkräfte wie folgt: „Wie der Lehrer solche Praktiken mit seiner pädagogischen Verantwortung der optimalen Unterstützung jedes einzelnen Schülers in Einklang bringt, ist ihm überlassen; genauer: das »Aushalten« und »Leben« der damit gesetzten unaufhebbaren Widersprüche macht einen wesentlichen Zug seiner administrativen »Brauchbarkeit« als »beamteter« Lehrer o. ä. aus“ (ebd., S. 5).

[10] Zum Verhältnis Mathematik-Gesellschaft, welches ebenfalls in den folgenden Interviewpassagen deutlich wird, siehe Ruge (2022).

[11] Wie Reformbestrebungen Identifikationspunkte für angehende Lehrkräfte bieten, zeichnen Brown & McNamara (2011) für den UK-Kontext nach.

[12] Der Einbezug wissenschaftlicher Methodiken und Reflexionen ist nicht per se zu verdammen. Es ist jedoch als kritisch zu bewerten, dass in diesem Prozess nur ein bestimmter Personenkreis eingebunden ist.

[13] Mit dem Begriff *Fluidität* wird betont, dass Lehren und Lernen ineinander verwobene, aufeinander bezogene und somit sich gegenseitig beeinflussende Prozesse darstellen.

Literatur

Andrade-Molina. M. (2017). Be the Best Version of your Self! OECD’S Promises of Welfare through School Mathematics. In Chronaki, A. (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 393–400). Volos, Greece.

Baldino, R. (1998) School and surplus-value: contribution from a Third-World country. In *Proceedings of the First International Conference on Mathematics Education and Society* (S. 74–81).

Bellmann, J., & Müller, T. (2011). *Wissen, was wirkt*. VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Blömeke, S., Bremerich-Vos, A., & Kaiser, G. (Hrsg.) (2013). *Professionelle Kompetenzen im Studienverlauf: Weitere Ergebnisse zur Deutsch-, Englisch- und Mathematiklehrerausbildung aus TEDS-LT*. Waxmann Verlag.

Brown, T., & McNamara, O. (2011). *Becoming a mathematics teacher: Identity and identifications*. Springer Science & Business Media.

Buchholtz, N., Kaiser, G., & Blömeke, S. (2014). Die Erhebung mathematikdidaktischen Wissens: Konzeptualisierung einer komplexen Domäne. *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(1), 101–128.

Cabral, T. C., & Baldino, R. R. (2019a). The credit system and the summative assessment splitting moment. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 275–288.

Cabral, T. C., & Baldino, R. R. (2019b). The social turn and its big enemy: a leap forward. In J. Subramanian (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 32–46). Hyderabad, India: Printed by Sri Satya Sai Designing Studio Pvt Ltd.

Döbler, J. (2019). *Prüfungsregime und Prüfungskulturen: soziologische Beobachtungen zur internen Organisation von Hochschule*. Springer-Verlag.

Faulstich-Wieland, H., Niehaus, I., & Scholand, B. (2010). Lehramt Grundschule: „niedrigste Stufe dieses Lehrerberufs“ versus „ich liebe Kinder“. Oder: Was SchülerInnen vom Lehramt abhält und Studierende daran reizt. *Erziehungswissenschaft 21*(41), 27–42.

Holzkamp, K. (1995). *Lernen: Subjektwissenschaftliche Grundlegung*. Campus-Verlag.

Holzkamp, K. (1992). Die Fiktion administrativer Planbarkeit schulischer Lernprozesse. In K.-H. Braun & K. Wetzel (Hrsg.), *Lernwidersprüche und pädagogisches Handeln. Bericht von der 6. Internationalen Ferienuniversität Kritische Psychologie*. Verlag Arbeit und Gesellschaft. https://www.kritische-psychologie.de/files/kh1992a.pdf

Holzkamp, K. (1991). Lehren als Lernbehinderung. *Forum Kritische Psychologie 27*. 5–22.

Jahnke, T., & Meyerhöfer, W. (Hrsg.) (2006). *PISA & Co – Kritik eines Programms*. Franzbecker.

Khellaf, S. (angenommen). *Über die Unausweichlichkeit minimaler Mitarbeit im Kontext des Mathematiklehramtsstudiums.*

Klieme, E. (2004). Begründung, Implementation und Wirkung von Bildungsstandards: Aktuelle Diskussionslinien und empirische Befunde. Einführung in den Thementeil. *Zeitschrift für Pädagogik 50* (5), 625–634.

Klieme, E., & Hartig, J. (2008). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. In M. Prenzel & I. Gogolin, H.-H. Krüger (Hrsg.), *Kompetenzdiagnostik. Zeitschrift für Erziehungswissenschaft. Sonderheft* 8, 11–29.

Kousholt, K. (2016). Testing as social practice: Analysing testing in classes of young children from the children’s perspective. *Theory & Psychology, 26*(3), 377–392.

Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Interviews: Learning the craft of qualitative research interviewing*. Sage.

Marvakis, A., & Schraube, E. (2019). Wider das halbierte Lernen. *Forum Kritische Psychologie - Neue Folge 2*. 131–148.

Mey, G., & Mruck, M. (2020). Grounded-Theory-Methodologie. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie, Band 2: Designs und Verfahren* (S. 513–535). Springer.

Montecino, A., & Valero, P. (2015). Product and agent: Two faces of the mathematics teacher. In S. Mukhopadhyay & B. Greer (Hrsg.), *Proceedings of the Eight International Mathematics Education and Society Conference* (S. 794–806). Portland, Oregon, United States.

Nissen, M., & Mørck, L. L. (2019). Situated Generalization with Prototypes in Dialogical Teaching. In E. Schraube & C. Højholt (Hrsg.), *Subjectivity and Knowledge* (S. 195–219). Springer, Cham.

Popkewitz, T. S. (1994). Professionalization in teaching and teacher education: Some notes on its history, ideology, and potential. *Teaching and teacher education, 10*(1), 1–14.

Reusser, K. (2014). Kompetenzorientierung als Leitbegriff der Didaktik. *Beiträge zur Lehrerinnen- und Lehrerbildung 32* (3). 325–339.

Ruge, J. (2023). To want and not want to learn. In M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth & J. Peters (Hrsg.), *Proceedings of the Fourth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2022, 19-22 October 2022)* (S. 662–671). Hannover, University of Hannover and INDRUM.

Ruge, J. (2022). The unease about the mathematics-society relation as learning potential. In R. Biehler, G. Gueudet, M. Liebendörfer, C. Rasmussen & C. Winsløw (Hrsg.) *Practice-Oriented Research in Tertiary Mathematics Education: New Directions* (S. 45–66). Springer.

Ruge, J., Khellaf, S., Hochmuth, R., & Peters, J. (2019). Die Entwicklung reflektierter Handlungsfähigkeit aus subjektwissenschaftlicher Perspektive. In S. Dannemann, J. Gillen, A. Krüger & Y. von Roux (Hrsg.), *Reflektierte Handlungsfähigkeit in der Lehrer*innenbildung—Leitbild, Konzepte und Projekte* (S. 110–139). Logos Verlag.

Ruge, J., & Hochmuth, R. (2017). How do pre-service teachers experience math didactics courses at university? In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Didactics of mathematics in higher education as a scientific discipline – conference proceedings. khdm-report 17-05* (S. 82–85). Universität Kassel.

Ruge, J. (2017). Competence-based teacher education – revisited. In Chronaki, A. (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference* (S. 823–833). Volos, Greece.

Scheunpflug, A., Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Schwerpunkt Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 9*(4), 465–467.

Skovsmose, O., & Valero, P. (2002). Democratic access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Hrsg.), *Handbook of international research in mathematics education: Directions for the 21st century* (S. 383–407). Lawrence Erlbaum.

Straehler-Pohl, H. (2017). De|mathematisation and ideology in times of capitalism: Recovering critical distance. In H. Straehler-Pohl, N. Bohlmann & A. Pais (Hrsg.), *The Disorder of Mathematics Education* (S. 35–52). Switzerland: Springer.

Terhart, E. (2011). Lehrerberuf und Professionalität: Gewandeltes Begriffsverständnis – neue Herausforderungen, In: W. Helsper & R. Tippelt (Hrsg.), *Pädagogische Professionalität. Zeitschrift für Pädagogik – 57. Beiheft.* Weinheim, 202–224.

Vohns, A. (2017). Brauchen Mathematiklehrpersonen Bildung? Eine nicht ganz unernstgemeinte Frage. In R. Krömer & G. Nickel (Hrsg.), *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik (SieB). Band 8*. 139–168.

Vohns, A. (2009). Lehrer sein das ist nicht schwer, Lehrer werden umso mehr: Eine bilaterale, (nicht nur lehrer-)bildungspolitische Presseschau. *Mitteilungen der GDM, 87*, 4–9. https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/?journal=mgdm&page=article&op=view&path%5B%5D=607&path%5B%5D=598

Mathematische Bildung muss sich im Rahmen gesellschaftlicher und schulischer Transformationsprozesse stets weiterentwickeln. Dafür bedarf es einer ständigen Reflexion über Bildungsansprüche, Bildungsinhalte und Bildungsorganisation, die nicht innerhalb der Schule stehen bleiben kann, sondern auch den Blick auf die Wirkung von Mathematik in der Welt berücksichtigen muss. Diese Themen hat Andreas Vohns mit seinen Arbeiten in besonderer Weise fokussiert.

- Was bedeutet mathematische Bildung in einer sich wandelnden Welt?
- Wie beeinflussen Veränderungen in der Gesellschaft die fundamentalen Ideen eines bildsamen Mathematikunterrichts?
- Welchen Beitrag kann der Mathematikunterricht zum Ziel zeitgemäßer staatsbürgerlicher Erziehung und Allgemeinbildung leisten?
- Welche gesellschaftlich relevanten Themen gehören in den Mathematikunterricht?
- Was heißt dies konkret für die Gestaltung eines bildsamen Mathematikunterrichts, für eine zukunftsorientierte Lehrkräftebildung und eine sich wandelnde Prüfungskultur?

Aus der Tagung des Arbeitskreises „Mathematik und Bildung“, die diese Themen aufgegriffen und für eine zeitgemäße mathematische Bildung neu und weitergedacht hat, ist nun dieses Buch hervorgegangen.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-206-5