СРЕДНЯЯ ДЛИНА ОЧЕРЕДИ ДЛЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ВХОДНЫМИ ПОТОКАМИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-8-13-20

Лихтциндер Борис Яковлевич,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия,
lixt@psuti.ru

Блатов Игорь Анатольевич,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия,
blatow@mail.ru

Китаева Елена Викторовна,
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия,
el_kitaeva@mail.ru

Manuscript received 08 April 2020;
Revised 20 May 2020;
Accepted 03 August 2020

Ключевые слова: система массового обслуживания, коррелированный входной поток, средняя длина очереди, формула Хинчина-Поллачека

В мультисервисных сетях с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского, поскольку эти потоки формируются множеством источников запросов на предоставление услуг, существенно отличающихся между собой. Все это приводит к тому, что для потоков в мультисервисных сетях характерна неравномерность поступления заявок и пакетов. Пакеты группируются в "пачки" в одних промежутках времени и практически отсутствуют – в других промежутках. Случайный процесс поступления заявок (пакетов) в систему характеризуется законом распределения, устанавливающим связь между значениями случайной величины и вероятностями появления указанных значений. В большинстве случаев такой поток характеризуется функцией распределения временных интервалов между соседними заявками, а процесс их обработки характеризуется функцией распределения вероятностей интервалов времени обслуживания. Рассматривается математическая модель простейшей одноканальной системы массового обслуживания (СМО) в случае входящего потока с произвольной корреляцией. Для данной СМО получены различные обобщения формулы Хинчина-Поллачека средней длины очереди. Предложена интервальная модель входящего потока, в рамках которой получено выражение средней длины очереди через безусловные моменты второго порядка. Все результаты были получены при весьма общих предположениях эргодичности и стационарности. Приводятся результаты численных экспериментов, подтверждающие теоретические выводы.

Информация об авторах:

Лихтциндер Борис Яковлевич, д.т.н., Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия
Блатов Игорь Анатольевич, д.ф.-м.н., Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Самара, Россия
Китаева Елена Викторовна, к.ф.-м.н., Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия

Для цитирования:

Лихтциндер Б.Я., Блатов И.А., Китаева Е.В. Средняя длина очереди для систем массового обслуживания с коррелированными входными потоками // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №8. С. 13-20.

For citation:

Lichtzinder B.Ya., Blatov I.A., Kitaeva E.V. (2020) On estimates of the average queue length for mass service systems in case of correlated input flow. T-Comm, vol. 14, no.8, pp. 13-20. (in Russian)

1. Введение

В подавляющем числе работ теории массового обслуживания указанные случайные величины считаются не коррелированными и взаимно независимыми. Однако, указанные допущения для анализа пакетного трафика мультисервисных сетей совершенно недопустимы. В ряде публикаций [1-9] а также в работах авторов этой статьи [10-13] предпринимались попытки учета корреляционных свойств потоков, образующих очереди. Имеется много работ, посвященных различным частным случаям СМО при наличии корреляции входных данных (см. обзор [14]).

В задачах управления СМО важной характеристикой является средняя длина очереди. Обобщения формулы Хинчина-Полячека средней длины очереди для некоторых конкретных СМО рассматривались в [15, 16]. Однако нам неизвестны работы, в которых разрабатываются общие подходы анализа СМО при наличии произвольных коррелированных входных потоков.

Одним из перспективных, на наш взгляд, направлений изучения пакетного трафика является разрабатываемый нами Интервальный метод [17, 18], позволяющий заменить анализ интервалов времени между соседними заявками и интервалов времени обработки заявок, анализом одной случайной величины – числом заявок, поступающих в течение последовательных интервалов времени обработки каждой из заявок. Нами показано, что дисперсия и корреляционные свойства указанной случайной величины, при заданной нагрузке, полностью характеризуют размер очереди в системах массового обслуживания [18].

В настоящей статье для одноканальной системы с коррелированным входящим потоком и постоянным временем обработки заявок при весьма общих предположениях стационарности и эргодичности получены формулы средней длины очереди, обобщающие формулу Хинчина-Полячека. При этом применение модели, основанной на интервальном методе, позволило получить формулу, выражающую среднюю длину очереди через безусловные выборочные ковариации входящего потока. Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические выводы.

2. Постановка задачи

Введем терминологию и обозначения. Анализируются стационарные потоки заявок (пакетов). Весь промежуток времени анализа разбивается на равные интервалы τ_i одинаковой длины τ . Считается, что интервал времени обработки каждой из заявок – постоянный и равен τ . Числа заявок на i -м интервале обозначаем через $m_i(\tau)$. Пусть $\rho = \lambda\tau$ – коэффициент загрузки, где λ – средняя интенсивность заявок. Предполагается, что $\rho \in (0, 1)$. Величины $\overline{m(\tau)} = \lambda\tau = \rho$ и $Dm(\tau) = [m_i(\tau) - \overline{m(\tau)}]^2$ – математическое ожидание и дисперсия чисел заявок, поступающих в течение интервала времени τ , соответственно. Через $q_i(\tau)$ обозначим количество заявок, стоящих в очереди в конце i -го интервала обработки (длину очереди). Через $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = K[q_{i-1}(\tau), m_i(\tau)]$ обозначим ковариацию случайных величин $q_{i-1}(\tau)$ и $m_i(\tau)$. Для предположений, которые мы будем делать по ходу статьи, будем использовать обозначения **A1**, **A2**, ...

Для любой одноприборной СМО справедливо рекуррентное соотношение, устанавливающее связь между поступающими и обработанными заявками [19]:

$$q_i(\tau) = q_{i-1}(\tau) + m_i(\tau) - \delta_i(\tau), \quad (1)$$

где

$$\delta_i(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{i-1}(\tau) = m_i(\tau) = 0 \\ 1, & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

В случае пуассоновского потока заявок с постоянным временем обслуживания, для средней длины очереди (математического ожидания) известна формула Хинчина - Поллачека [19], которая имеет вид

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \quad (2)$$

В [20] было получено обобщение формулы (2) на случай произвольных коррелированных потоков:

$$\overline{q(\tau)} = \frac{Dm(\tau) + 2\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2} \quad (3)$$

В частном случае пуассоновского потока $\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = 0$, $Dm(\tau) = \rho$ и формула (3) принимает вид (2). Доказательство формулы (3) приводится в разделе 4. Из него следует, что формула (3) справедлива для любых стационарных в широком смысле потоков с конечным математическим ожиданием и дисперсией, для которых процесс $q_i(\tau)$ обладает такими же свойствами, т.е. и для МАР-потока, управляемого эргодической марковской цепью.

Задачей настоящей статьи является получение формул, в которых средняя длина очереди выражается через корреляционные свойства входящего потока $m_i(\tau)$ при весьма общих предположениях.

3. Предположения и определения

В [12] формула (3) была преобразована к более удобному для применения виду. Приведем некоторые понятия из [12], поскольку они необходимы для решения задач данной статьи.

Введем понятие цикла обслуживания. Циклом обслуживания $Z_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} I_j$ будем называть совокупность смежных интервалов обработки I_j , на которых $q_j > 0$ везде, кроме последнего интервала, на котором очередь обнуляется после обработки последней заявки, а слева от данного цикла тоже находится хотя бы один такой интервал. Здесь N_k обозначает количество смежных интервалов – длину k -го цикла.

Замечание 1. Понятие цикла обслуживания отличается от введенного Л. Клейнроком [21] понятия периода занятости, поскольку, период занятости предполагает наличие слева и справа, как минимум, одного интервала, на котором $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$. Поэтому период занятости Клейнрока может содержать несколько циклов Z_k . Целесообразность введения данного понятия обоснована в [12].

Сделаем следующее предположение.

A1. Гипотеза эргодичности и взаимной стационарности. Предположим, что все рассматриваемые процессы обладают свойствами эргодичности, стационарности и взаимной стационарности в широком смысле. В частности, для любой реализации случайного процесса $m_i(\tau)$

$$\overline{m(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau), \quad Dm(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i(\tau) - \overline{m(\tau)})^2,$$

$$\mu_{m_{i-j}m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-j} \sum_{k=j+1}^N (m_{k-j}(\tau) - \overline{m(\tau)})(m_k(\tau) - \overline{m(\tau)}), \overline{q(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau), \quad (4)$$

$$\mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N q_{i-k-1}(\tau)[m_{i-k}(\tau) - \overline{m(\tau)}] \quad (5)$$

4. Основные результаты

Формулы для средней длины очереди, полученные в [12], были записаны для конкретной фиксированной реализации случайного процесса $m_i(\tau)$. Однако представляет интерес преобразование формулы (3) к выражению, зависящему от корреляционных свойств входящего потока m_i . Получим соответствующие результаты. Пусть $m_i(\tau)$ – произвольная реализация случайного процесса $\{m_i\}$.

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1) \quad (6)$$

Эта и последующие теоремы будут доказаны в следующем разделе.

Второе слагаемое в (6) при естественных дополнительных предположениях есть весовая сумма условных выборочных ковариаций (см. ниже) элементов входящего потока. Покажем это.

Пусть $A_k(\tau) = \{\delta_s = 1, s = i - k, i - k + 1, \dots, i\}$ – случайное событие, состоящее в том, что случайно выбранная пара $(m_{i-k}(\tau), m_i(\tau))$, $k + 1 \leq i \leq N$, принадлежит одному циклу обработки $Z_s \subset [1, N]$. Пусть $A_k(N)$ – число таких пар. Обозначим через

$$\mu(k, N) = \frac{1}{N_k(N)} \sum_{i \in Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{k: i-k \in Z_s} (m_{i-k}(\tau) - 1), P(A_k(\tau)) = \frac{N_k(N)}{N-k} \quad (7)$$

условную выборочную ковариацию случайных величин $m_{i-k}(\tau), m_i(\tau)$ при условии $A_k(\tau)$ и выборочную вероятность события $A_k(\tau)$ соответственно.

Теорема 2. *Справедлива формула*

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{N} \mu(k, N) P(A_k(\tau)) \quad (8)$$

Теорема 2 непосредственно вытекает из (6), (7).

Формулы (8) содержат условные корреляции и вероятности $P(A_k(\tau))$, вычисление которых затруднительно. Получим формулу, содержащую только безусловные моменты второго порядка нового случайного процесса, тесно связанного с исходным.

Произведем замену переменной интервалов τ_i , на которых рассматривается поступление заявок, на другую переменную – θ_i , которая представляет собой интервал между двумя соседними заявками, покидающими очередь. Числа заявок, поступивших на указанных интервалах, обозначим через $m_i(\theta)$. Это и есть новый случайный процесс, который мы рассмотрим.

Замечание 2. Каждая реализация случайного процесса $m_i(\theta)$ совпадает с соответствующей реализацией исходного случайного процесса $m_i(\tau)$, из которой удалены все уча-

стки покоя, на которых $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$, т.е. остаются только примыкающие друг к другу циклы обслуживания.

A2. Гипотеза A1 для процесса $m_i(\theta)$. Предположим, что для нового случайного процесса также справедлива гипотеза A1.

Пусть N – рассматриваемое число членов $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$ реализации процесса $m_i(\tau)$, а $M = M(N)$ число членов соответствующей реализации процесса $m_i(\theta)$, полученных из $m_1(\tau), \dots, m_N(\tau)$ удалением нулевых членов, принадлежащих участкам покоя.

Пусть

$$v_m(k, \theta, M) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta) (m_{i-k}(\theta) - 1) \quad (9)$$

безусловная выборочная ковариация числа заявок нового случайного процесса.

Теорема 3. Пусть справедливы предположения A1-A2. Тогда имеет место формула

$$\overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \rho \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} v_m(k, \theta, M) \quad (10)$$

В формуле (10) присутствует дисперсия исходного случайного процесса $m_i(\tau)$. Обозначим через $D_m(\theta)$ дисперсию процесса $m_i(\theta)$.

Теорема 4. Пусть справедливы предположения A1-A2. Тогда имеет место формула

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} \left(D_m(\theta) - 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} v_m(k, \theta, M) \right) \quad (11)$$

Формула (11) выражает среднюю длину очереди через безусловные моменты второго порядка случайного процесса $m_i(\theta)$.

Замечание 3. Если предположить, что теоретические ковариации

$$v_m(k, \theta) = \lim_{M \rightarrow \infty} v_m(k, \theta, M) \quad (12)$$

достаточно быстро убывают так, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_m(k, \theta)$ сходится, а сходимость в (12) достаточно быстрая, т.е. выполнены условия перестановки предельных переходов в (11), то формула (11) принимает вид

$$\overline{q(\tau)} = \frac{\rho}{2} (D_m(\theta) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} v_m(k, \theta)) \quad (13)$$

Однако, формула (13) для рассматриваемых нами потоков оказывается непригодной, в отличие от формулы (11), которая всегда верна при выполнении условий стационарности и эргодичности. Это связано с медленным убыванием выборочных ковариаций в (11) и медленной сходимостью в (12).

5. Доказательства теорем

Доказательство формулы (3). Возведем в квадрат уравнение баланса (1).

Учитывая, что

$$\delta_i^2(\tau) = \delta_i(\tau), q_{i-1}(\tau) \delta_i(\tau) = q_{i-1}(\tau), (\tau) m_i(\tau) \delta_i(\tau) = m_i,$$

получим

$$(q_i(\tau))^2 = (q_{i-1}(\tau))^2 + (m_i(\tau))^2 + \delta_i(\tau) + 2q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) - 2q_{i-1}(\tau) - 2m_i(\tau).$$

Вычислим математическое ожидание от обеих частей последнего равенства. Учитывая, что $\overline{m_i(\tau)} = \overline{\delta_i(\tau)}$, а в силу стационарности $\overline{(q_i(\tau))^2} = \overline{(q_{i-1}(\tau))^2}$, получим

$$0 = \overline{(m_i(\tau))^2} + \rho + 2\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} - 2\overline{q_{i-1}(\tau)} - 2\rho,$$

$$\text{или } \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}((\overline{(m_i(\tau))^2} - \rho) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)}).$$

$$\text{или } \overline{q(\tau)} = \frac{1}{2}(D_m(\tau) - \rho(1 - \rho)) + \overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} \quad (14)$$

Подставляя в (14) $\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau)m_i(\tau) + \overline{m(\tau)} \cdot \overline{q(\tau)} = \mu_{q_{i-1}m_i}(\tau) + \rho q(\tau)$, и выражая $q(\tau)$, получаем (3).

Доказательство теоремы 1. Из (14) следует, что для доказательства (6) достаточно установить равенство

$$\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1) \quad (15)$$

Докажем (15). Отметим важное свойство цикла обслуживания.

Лемма 1. Для любого цикла обслуживания

$$\sum_{k=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - \delta_j) = \sum_{j=j_k}^{j_k+N_k-1} (m_j(\tau) - 1) = 0.$$

Доказательство леммы вытекает из того, что окончание цикла обслуживания означает обработку всех заявок, которые поступили на всех интервалах, входящих в данный цикл обслуживания.

Последовательно применяя равенство (1) к значениям очереди в правой части (1), находим

$$q_{i-1}(\tau) = q_{i-(N+1)}(\tau) + \sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - \delta_{i-j}(\tau)).$$

Отсюда имеем (здесь и далее с точностью до бесконечно малой при $N \rightarrow \infty$)

$$\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_{i-1}(\tau)m_i(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j=1}^N (m_{i-j}(\tau) - (\delta_{i-j}(\tau) + q_{i-(N+1)}(\tau))) \right) \quad (16)$$

В силу леммы 1 отсюда имеем

$$\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_i \cap [i-N, i-1]: Z_i \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) + q_{i-(N+1)}(\tau) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_i \cap [i-N, i-1]: Z_i \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right) \right).$$

Но в силу той же леммы первая сумма в последнем равенстве равна нулю, так как

$$\sum_{j \in Z_i \cap [i-N, i-1]: Z_i \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = - \sum_{j \in Z_i \setminus [i-N, i-1]: Z_i \cap \{i-N\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) = -q_{i-(N+1)}(\tau).$$

Поэтому имеем

$$\overline{q_{i-1}(\tau)m_i(\tau)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_i(\tau) \left(\sum_{j \in Z_i \cap [i-N, i-1]: Z_i \cap \{i-1\} \neq \emptyset} (m_j(\tau) - 1) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1)$$

Тем самым формула (15), а, значит, и формула (6) доказана. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Вначале установим вспомогательное утверждение. **Лемма 2.** Для процесса $m_i(\theta)$ справедлива формула

$$\overline{m_i(\theta)} = 1, \quad (17)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(N)}{N} = \rho. \quad (18)$$

Доказательство. Вычисляя математическое ожидание от обеих частей формулы

$$(1) \text{ в силу стационарности находим } \overline{\delta(\tau)} = \overline{m(\tau)} = \rho. \quad (19)$$

Поскольку $m_i(\theta)$ получается из $m_i(\tau)$ удалением участков покоя, на которых $m_i(\tau) = \delta_i(\tau) = 0$, то для соответствующего процесса $\delta_i(\theta)$ будем иметь

$$\overline{\delta(\theta)} = \overline{m(\theta)}. \quad (20)$$

Но на участках обработки $\delta_i(\theta) = 1$, откуда

$$\overline{\delta(\theta)} = 1. \quad (21)$$

Из (20), (21), следует (17). Формула (18) следует из (19), (21) и того, что $\sum_{i=1}^N \delta_i(\tau) = \sum_{i=1}^M \delta_i(\theta)$.

Лемма доказана.

Преобразуем сумму безусловных ковариаций (9) из (10).

Имеем

$$v_m(k, \theta, M) = \frac{1}{M-k} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1),$$

$$\sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} v_m(k, \theta, M) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{i=k+1}^M m_i(\theta)(m_{i-k}(\theta) - 1) =$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1). \quad (22)$$

Из (22), определения процесса $m_i(\theta)$, циклов обработки и замечания 2 следует, что

$$\sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) = \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1), \quad (23)$$

поскольку эти суммы состоят из одних и тех же слагаемых.

Далее заметим, что в силу леммы 2 и (23)

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_i(\theta) \sum_{k=1}^{i-1} (m_{i-k}(\theta) - 1) = \frac{1}{\rho} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{Z_s \subset [1, N]} m_i(\tau) \sum_{j=j_s}^{i-1} (m_j(\tau) - 1). \quad (24)$$

Из (6), (22), (24) получаем (10). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, что $D_m(\theta) = D_{\delta=1}(\tau)$. Поэтому в силу

(10), (11) достаточно доказать формулу

$$D_m(\tau) = D_{\delta=1}(\tau) \cdot \rho + \rho(1 - \rho). \quad (25)$$

Для краткости будем опускать аргумент τ . Имеем в силу леммы 2

$$M(D_\delta(m)) = D_{\delta=0}(m)P(\delta = 0) + D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) =$$

$$= D_{\delta=1}(m)P(\delta = 1) = D_{\delta=1}(m) \cdot \rho, D(M_\delta(m)) =$$

$$= (M_{\delta=0}(m) - \rho)^2 P(\delta = 0) +$$

$$+ (M_{\delta=1}(m) - \rho)^2 P(\delta = 1) = (0 - \rho)^2 (1 - \rho) + (1 - \rho)^2 \rho =$$

$$= \rho(1 - \rho).$$

Отсюда, используя известную формулу $D_m = D(m) = M(D_\delta(m)) + D(M_\delta(m))$, получаем (25). Теорема 4 доказана.

6. Результаты численных экспериментов

6.1. Анализируемые потоки

Справедливость полученных нами результатов иллюстрируется результатами численных экспериментов на основе

формулы (11) для реализации видеотрафика на фоне простейшего пуассоновского потока той же интенсивности. Кроме того, мы приводим результаты аналогичных расчетов для одной из моделей заявок, управляемых цепью Маркова (МАР-поток). МАР-поток образовывался последовательным во времени переключением двух пуассоновских потоков заявок с параметрами интенсивности $\lambda_1 = 1000$ и $\lambda_2 = 10$. Переключение потоков осуществлялось с одинаковой вероятностью, равной 0,1, после поступления каждой заявки любого из потоков. Всего для МАР-потока и пуассоновского потока было сгенерировано по 100000 временных отсчетов, а поток телетрафика содержал 16910 отсчетов.

Все результаты были также проверены и подтверждены с помощью формулы (3) на основе оценок входящего в нее корреляционного члена согласно гипотезе А1, а также с помощью сравнения с оценками средних значений очередей, вычисленных их непосредственным усреднением (см. п. 6.2).

Результаты приведены в табличной и графической форме. В данном пункте приведем графические иллюстрации. Численные результаты в виде таблиц приводятся в п. 6.3.

В мультисервисных сетях связи (МСС) с пакетной коммутацией поток пакетов существенно отличается от пуассоновского и носит явно выраженный пачечный характер.

На рисунке 1. представлена реализация видеотрафика (узкие пачки) на фоне равномерного пуассоновского потока одинаковой интенсивности (серый фон). На рисунке 2. показан фрагмент указанной реализации в увеличенном масштабе времени. Каждая тонкая вертикальная полоска соответствует числу пакетов, поступающих в течение интервала времени обработки одного пакета. Из графиков следует, что для видеопотока имеются интервалы, в течение которых поступают десятки пакетов, в то время как пуассоновский поток содержит на указанных интервалах один или два пакета. Это и объясняет наличие больших очередей при передаче потоков видеотрафика.

Рис. 1. Поток видеотрафика и пуассоновский поток

Рис. 2. Поток видеотрафика и пуассоновский поток в увеличенном масштабе времени

Рис. 3. Зависимости средних размеров очередей при различных значениях коэффициента загрузки ρ

На рисунке 3 представлены зависимости средних размеров очередей при различных значениях коэффициента загрузки ρ (верхний график – видеотрафик, нижний график – пуассоновский поток). Из рисунка видно, что при одинаковых значениях коэффициента загрузки ρ средний размер очереди у пуассоновского потока во много раз меньше, чем у потока видеотрафика.

Рис. 4. Зависимости дисперсии и средних размеров очередей видеотрафика, при различных значениях коэффициента загрузки ρ

На рисунке 4 для рассматриваемого видеотрафика показаны зависимости дисперсии (нижняя кривая) и средних размеров очередей (верхняя кривая), при различных значениях коэффициента загрузки (ρ), полученные в результате имитационного моделирования. Значение дисперсии $D_{m(\tau)}(0,5) = 10,6$, в то время как размер очереди превышает 250 пакетов. Корреляционная составляющая в десятки раз превышает значение дисперсии, и не учитывать ее нельзя.

Разница впечатляет, поскольку при постоянном времени обработки и коэффициенте загрузки равном 0,5, среднее значение очереди для пуассоновского потока составляет лишь 0,25 пакета. Для пачечного потока видеотрафика составляющая, обусловленная дисперсией $D_{m(\tau)}(\rho)$ оказывается существенно меньше, чем составляющая, обусловленная наличием корреляционных связей.

Приведем результаты расчетов для МАР-потока.

На рисунке 5 показан поток, представляющий числа заявок, поступающих в течение каждого из интервалов времени $\tau = 2,72 \cdot 10^{-2}$, которые соответствуют коэффициенту загрузки $\rho = \lambda\tau = 0,5$.

Поток носит пачечный характер, и интервалы, в течение которых поступает более 20 заявок, чередуются с интервалами, содержащими не более двух заявок.

Рис. 5. Поток заявок, поступающих в течение интервалов времени, соответствующих коэффициенту загрузки $\rho = 0,5$

Рис. 6. Зависимости дисперсии и средних размеров очередей, при различных значениях коэффициента загрузки ρ

Несмотря на высокую пачечность, в отличие от видеотрафика, представленного на рисунке 3, здесь средние очереди имеют небольшие размеры $\bar{q}(0,5) = 5,21$ заявок, при коэффициенте загрузки (ρ), равном 0,5. На рисунке 6 для рассматриваемого потока показаны зависимости средних размеров очередей (верхний график) и дисперсии (нижний график), при различных значениях коэффициента загрузки (ρ). Из рисунка 6 видно, что в отличие от видеотрафика (рис. 4), при малых загрузках размер очереди близок к значению дисперсии, а влияние корреляционной составляющей соизмеримо с влиянием дисперсии.

6.2. Численные результаты

В разделах статьи 1-5 ρ предполагалось фиксированным. Здесь мы изучаем зависимость интересующих нас величин от ρ . Поэтому ниже мы используем обозначения, которые связаны с предыдущими следующим образом: $D_m(\tau) = D_m(\rho)$, $D_m(\theta) = D_m(\rho) \cdot \bar{q}(\tau) = \bar{q}_{cov}(\rho)$ – значение средней длины очереди, вычисляемое по формуле (11). $rescov_{m(\theta)}(\rho) = 2 \sum_{k=1}^{M-1} \frac{M-k}{M} v_m(k, \theta, M)$ обозначена корреляционная составляющая длины очереди в (11). Кроме того, $\bar{q}_{exact}\rho = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i(\tau)$, где $q_i(\tau)$ последовательно вычисляются по формулам (1). Графические результаты полностью согласуются с численными и были получены на их основе.

Отметим, что в таблице 1 для пуассоновского потока присутствует корреляционная составляющая, которая может быть не меньше дисперсионной. Это связано с тем, что пуассоновский поток при переходе от $m_i(\tau)$ к $m_i(\theta)$ подвергается изменениям (за счет удаления многих нулевых элементов) и становится коррелированным, а также тем, что выборочные ковариации медленно сходятся к теоретическим (см. замечание 3). Из таблицы 2 видно, что корреляционная составляющая сильно преобладает над дисперсионной и определяет длину очереди. В случае МАР-потока (таблица 3)

видно, что корреляционная составляющая преобладает, но не так сильно, как для потока видеотрафика.

Таблица 1

Пуассоновский поток

ρ	0.1	.2	.3	.5	.7	.9
$D_m(\theta)(\rho)$	$9.71 \cdot 10^{-2}$	$1.98 \cdot 10^{-1}$	$2.98 \cdot 10^{-1}$	$4.96 \cdot 10^{-1}$	$7.00 \cdot 10^{-1}$	$9.00 \cdot 10^{-1}$
$covm(\theta)(\rho)$	$5.42 \cdot 10^{-3}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$	$6.27 \cdot 10^{-2}$	$2.47 \cdot 10^{-1}$	$8.28 \cdot 10^{-1}$	3.94
$q_{cov}(\rho)$	$5.40 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-2}$	$6.37 \cdot 10^{-2}$	$2.48 \cdot 10^{-1}$	$8.25 \cdot 10^{-1}$	3.96
$q_{exact}(\rho)$	$5.40 \cdot 10^{-3}$	$2.46 \cdot 10^{-2}$	$6.37 \cdot 10^{-2}$	$2.48 \cdot 10^{-1}$	$8.25 \cdot 10^{-1}$	3.96
$D_m(\tau)(\rho)$	$9.97 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-1}$	$2.99 \cdot 10^{-1}$	$4.98 \cdot 10^{-1}$	$7.00 \cdot 10^{-1}$	$8.99 \cdot 10^{-1}$

Таблица 2

Поток видеотрафика

ρ	0.1	.2	.3	.5	.7	.9
$D_m(\theta)(\rho)$	.57	$1.04 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^{-1}$	$2.08 \cdot 10^{-1}$	$2.76 \cdot 10^{-1}$	$3.49 \cdot 10^{-1}$
$covm(\theta)(\rho)$	$7.16 \cdot 10^{-2}$	$8.72 \cdot 10^{-2}$	$9.46 \cdot 10^{-2}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-1}$	$3.04 \cdot 10^{-1}$
$q_{cov}(\rho)$	$3.62 \cdot 10^{-1}$	$8.81 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-1}$	$2.58 \cdot 10^{-1}$	$3.82 \cdot 10^{-1}$	$1.38 \cdot 10^{-1}$
$q_{exact}(\rho)$	$3.62 \cdot 10^{-1}$	$8.81 \cdot 10^{-1}$	$1.44 \cdot 10^{-1}$	$2.58 \cdot 10^{-1}$	$3.82 \cdot 10^{-1}$	$1.38 \cdot 10^{-1}$
$D_m(\tau)(\rho)$	.75	2.24	$4.42 \cdot 10^{-1}$	$1.07 \cdot 10^{-1}$	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$3.15 \cdot 10^{-1}$

Таблица 3

МАР поток

ρ	0.1	.2	.3	.5	.7	.9
$D_m(\theta)(\rho)$	.19	3.81	5.07	6.77	7.87	8.67
$covm(\theta)(\rho)$	3.1	.98	4.61	7.03	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$
$q_{cov}(\rho)$	$4.68 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	2.17	5.30	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$4.84 \cdot 10^{-1}$
$q_{exact}(\rho)$	$4.68 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	2.17	5.30	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$4.84 \cdot 10^{-1}$
$D_m(\tau)(\rho)$	$3.08 \cdot 10^{-1}$	$9.23 \cdot 10^{-1}$	1.73	3.53	5.71	7.88

Наконец, в таблице 4 представлена зависимость среднего размера очереди МАР потока от объема выборки. Видно, что при больших значениях N среднее значение очереди стабилизируется и приближается к предельным значениям в соответствии с теоремами 1-4.

Таблица 4

Зависимость среднего значения очереди от размера выборки для МАР-потока

$N\rho$	0.1	.2	.3	.4	.5	.6	0.7	0.8	0.9
10000	0.55	1.40	2.49	3.89	5.83	8.51	12.2	19.6	34.0
20000	0.51	1.33	2.41	3.79	5.74	8.62	13.0	20.9	40.7
30000	0.5	1.28	2.35	3.70	5.65	8.44	12.6	20.7	41.6
40000	0.50	1.29	2.34	3.70	5.66	8.50	12.9	21.1	45.8
50000	0.49	1.26	2.29	3.62	5.52	8.26	12.6	20.5	45.8
60000	0.48	1.25	2.26	3.57	5.43	8.08	12.2	20.2	49.2
70000	0.48	1.22	2.22	3.51	5.38	8.08	12.3	20.5	48.3
80000	0.47	1.21	2.20	3.50	5.35	8.06	12.3	29.4	48.0
90000	0.47	1.20	2.19	3.48	5.32	8.01	12.3	20.4	48.5
100000	0.47	1.19	2.17	3.45	5.30	7.99	12.2	20.3	48.4

7. Заключение

Таким образом, из результатов статьи можно сделать следующие выводы.

В статье для однолинейной системы массового обслуживания с ожиданием, неограниченным бункером, детерминированным обслуживанием и коррелированным входящим потоком получена формула (11), выражающая среднюю

длину очереди через безусловные моменты первого и второго порядка потока, тесно связанного с исходным потоком.

Формула (11) носит фундаментальный характер, поскольку показывает, что среднее значение размера очереди полностью определяется переменной составляющей энергии потока.

Результаты имитационного моделирования подтверждают справедливость полученного нами обобщения (11) формулы Хинчина-Поллачека для СМО со стационарными коррелированными потоками.

Реальные потоки пакетов видеотрафика в телекоммуникационных сетях имеют высокую степень корреляции, которая и обуславливает наличие больших размеров очередей. Влияние корреляционной составляющей на размеры очередей в десятки раз превосходит влияние дисперсии чисел заявок на интервалах обслуживания. Анализ примера потока пакетов реального видеотрафика показал, что определяющее влияние на размеры очередей в нем оказывает корреляционная составляющая потока.

Анализ примера одного из потоков, образуемых с помощью случайного независимого переключения двух пуассоновских потоков с различными параметрами интенсивности показал, что, несмотря на высокую пачечность результирующего потока, его дисперсия и корреляционные свойства оказывают сопоставимое влияние на средние размеры очередей. Следовательно, в первом случае, причиной возникновения больших очередей является большая корреляционная составляющая, в то время как во втором случае, причиной возникновения очереди является дисперсия и корреляционная составляющая в сопоставимых пропорциях.

Литература

1. Leland W.E., Taqqu Murad S., Willinger W., Wilson D.V. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic, J. IEEE/ACM Transact. Networking, 2:1 (1994), pp. 1-15.
2. Neuts M.F. Versatile Markovian point process, J. Appl. Probab., 16:4 (1979), pp. 764-779.
3. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis // Advances Appl. Probab., 12:1 (1980), pp. 222-261.
4. Jagerman D.L., Balcioglu B., Altiock T., Melamed B. Mean Waiting Time Approximations in the G/G/1 Queue, Queueing Systems, 2004, V. 46, 481-506.
5. Balcioglu B., Jagerman D.L., Altiock T. Approximate mean waiting time in a GI/D/1 queue with autocorrelated time to failures, IEEE Transactions, 39 10, 985-996, 2007.
6. Карташевский И.В., Сапрыкин А.В. Обработка коррелированного трафика в узле сети типа G/G/1, Радиотехника, 2017, №10. С. 119-125.
7. Карташевский И.В. Модель трафика для программно-конфигурируемых сетей, Радиотехника, №6, 2016. С. 124-129.
8. Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса, Радиотехника, 1999. №5. С. 24-31.
9. Шелухин О.И., Тенякиев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / Под ред. О.И. Шелухина. М.: Радиотехника, 2003.
10. Лихтциндер Б.Я. Корреляционные связи в пачечных потоках систем массового обслуживания, Телекоммуникации, 2015, №9. С. 8-12.
11. Лихтциндер Б.Я. Корреляционные свойства длин очередей в системах массового обслуживания с потоками общего вида // Инфокоммуникационные технологии, 2015, Т.13, №3. С. 276-280.
12. Блатов И.А., Лихтциндер Б.Я. Об оценке длин очередей в СМО с произвольной корреляцией / В сборнике: Информационные технологии и нанотехнологии Сборник трудов ИТНТ-2018, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2018. С. 1607-1616.
13. Лихтциндер Б.Я. О некоторых обобщениях формулы Хинчина-Поллачека // Инфокоммуникационные технологии, 2007, Т.5, №4. С. 253-258.
14. Вишневецкий В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей, АиТ, 2017, № 8, 3-59; V.M. Vishnevskii, A.N. Dudin, Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks, Autom. Remote Control, 78:8 (2017). С. 1361-1403.
15. Шул'га Ю.Н. Обобщение формулы Полячека – Хинчина для объемных стохастических сетей, АиТ, 1989, № 3, 84-98; Yu. N. Shul'ga, Extension of the Polaczek – Khinchin formula to 3d stochastic networks, Autom. Remote Control, 50:3 (1989), pp. 355-365.
16. Jain G., Sigman K. A Pollaczek-Khinchine formula for M/G/1 queues with disasters, J. Appl. Prob., 1996, V. 33, pp. 1191-1200.
17. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа мультисервисного трафика сетей доступа, Электросвязь, №12, 2015. С. 52-54.
18. Лихтциндер Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая линия – Телеком, 2018.
19. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
20. Лихтциндер Б.Я. Интервальный метод анализа трафика мультисервисных сетей доступа, Самара ПГУТИ, 2015.
21. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

ON ESTIMATES OF THE AVERAGE QUEUE LENGTH FOR MASS SERVICE SYSTEMS IN CASE OF CORRELATED INPUT FLOW

Boris Ya. Lichtzinder, Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, lixt@psuti.ru

Igor A. Blatov, Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, blatow@mail.ru

Elena V. Kitaeva, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev, Samara, Russia, el_kitaeva@mail.ru

Abstract

In multiservice packet-switched networks, the packet flow differs significantly from the Poisson flow, since these flows are generated by many sources of requests for services that are significantly different from each other. All this leads to the fact that the flows in multiservice networks are characterized by uneven arrival of requests and packets. Packages are grouped into "bundles" at some time intervals and are practically absent at other intervals. The random process of claims (packets) entering the system is characterized by a distribution law that establishes a relationship between the values of a random variable and the probabilities of occurrence of the indicated values. In most cases, such a flow is characterized by a distribution function of time intervals between neighboring claims, and the process of their processing is characterized by a probability distribution function of service time intervals. The mathematical model of the simplest single-channel queuing systems (QS) in case of incoming flow with arbitrary correlation. For this QS, various generalizations of the Khinchin-Pollachek formula of the average queue length. An interval model of the incoming flow is proposed, within which an expression of the average queue length through unconditional moments is obtained second order. All results were obtained with very general assumptions of ergodicity and stationarity. Are given results of numerical experiments confirming theoretical conclusions.

Keywords: queuing system, correlated input stream, average queue length, Khinchin-Pollachek formula.

References

1. Leland W. E., Taqqu Murad S., Willinger W., Wilson D.V. (1994). On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic. *J. IEEE/ACM Transact. Networking*, 2:1. P. 1-15.
2. Neuts M.F. (1979). Versatile Markovian point process. *J. Appl. Probab.*, 16:4. P. 764-779.
3. Ramaswami V. (1980). The N/G/I queue and its detailed analysis. *Advances Appl. Probab.*, 12:1. P. 222-261.
4. Jagerman D.L., Balcioglu B., Altioek T., Melamed B. (2004). Mean Waiting Time Approximations in the G/G/I Queue. *Queueing Systems*. Vol. 46. P. 481-506.
5. Balcioglu B., Jagerman D.L., Altioek T. (2007). Approximate mean waiting time in a GI/D/I queue with autocorrelated time to failures. *IEEE Transactions*, 39 10. P. 985-996.
6. Kartashevsky I.V., Saprykin A.V. (2017). Processing of correlated traffic in a network node of type G / G / I. *Radiotekhnika*. No. 10. P. 119-125.
7. Kartashevsky I.V. (2016). Traffic model for software-defined networks. *Radio engineering*. No. 6. P. 124-129.
8. Tsybakov B.S. (1999). Teletraffic model based on a self-similar random process. *Radiotekhnika*. No. 5. P. 24-31.
9. Shelukhin O.I., Tenyakshev A.M., Osin A.V. (2003). Fractal processes in telecommunications / Ed. O.I. Shelukhin. Moscow: Radiotekhnika.
10. Likhtsinder B.Ya. (2015). Correlation links in burst streams of queuing systems. *Telecommunications*. No. 9. P. 8-12.
11. Likhtsinder B.Ya. (2015). Correlation properties of queue lengths in queuing systems with general flows. *Infocommunication technologies*. Vol.13. No. 3. P. 276-280.
12. Blatov I.A., Likhtsinder B.Ya. (2018). On the estimation of the lengths of queues in the QS with arbitrary correlation. *Information technology and nanotechnology Proceedings of ITNT-2018*, Samara National Research University named after academician S.P. Queen. P. 1607-1616.
13. Likhtzinder B.Ya. (2007). On some generalizations of the Khinchin-Pollyachek formula. *Infocommunication technologies*. Vol.5. No. 4. P. 253-258.
14. Vishnevskii V.M., Dudin A.N. (2017). Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks. *Autom. Remote Control*, 78:8. P. 1361-1403.
15. Shul'ga Yu.N. (1989). Extension of the Polaczek - Khinchin formula to 3d stochastic networks. *Autom. Remote Control*. 50:3. P. 355-365.
16. Jain G., Sigman K. (1996). A Pollaczek-Khinchine formula for M/G/I queues with disasters. *J. Appl. Prob.* Vol. 33. P. 1191-1200.
17. Likhtsinder B.Ya. (2015). Interval method of analysis of multiservice traffic of access networks. *Electrosvyaz*. No. 12. P. 52-54.
18. Likhtsinder B.Ya. (2018). Traffic of multiservice access networks (interval analysis and design). Moscow: Hotline – Telecom.
19. Ventzel ES, Operations Research. Tasks, principles, methodology, Moscow: Nauka, 1988.
20. Likhtsinder B.Ya. (2015). Interval method for traffic analysis of multiservice access networks, Samara PSUTI.
21. Kleinrock L. (1979). Queueing Theory. Moscow: Mechanical Engineering.

Information about authors:

Boris Ya. Lichtzinder, Dr. Tech. sciences, Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

Igor A. Blatov, Doctor of Phys.-Math. Sciences, Volga State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

Elena V. Kitaeva, set physical-mat. Sciences, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev, Samara, Russia