Lesson Study

em
MATEMÁTICA

Dividir e Compartilhar

Núbia Quenupe Campos

Julia Schaetzle Wrobel

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Bruna Lution Dalle Prane

**INSTITUTO
FEDERAL**
Espírito Santo

**Edifes
PARCERIA**

Dividir e compartilhar

***Série Lesson Study* em Matemática - Nº 03**

Núbia Quenupe Campos
Julia Schaetzle Wrobel
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Bruna Zution Dalle Prane

Dividir e compartilhar

Série *Lesson Study* em Matemática – Nº 03

Edifes
PARCERIA

Vila Velha, 2021

Edifes
PARCERIA

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo
R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara
29040-689 – Vitória – ES
www.edifes.ifes.edu.br
editora@ifes.edu.br

Coordenador da Edifes: Adonai José Lacruz

Conselho Editorial: Aldo Rezende * Ediu Carlos Lopes Lemos * Felipe Zamborlini Saiter * Francisco de Assis Boldt * Glória Maria de F. Viegas Aquije * Karine Silveira * Maria das Graças Ferreira Lobino * Marize Lyra Silva Passos * Nelson Martinelli Filho * Pedro Vitor Morbach Dixini * Rossanna dos Santos Santana Rubim * Viviane Bessa Lopes Alvarenga.

Instituto Federal do Espírito Santo

Reitor: Jadir Jose Pella

Coordenadoras da Série Lesson Study em Matemática

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Julia Schaeztle Wrobel

Revisão textual

Esther Ortlieb Faria de Almeida

Diagramação

Coordenadoria Geral de
Tecnologias Educacionais do Cefor - Ifes

Capa

Coordenadoria Geral de
Tecnologias Educacionais do Cefor - Ifes

Universidade Federal do Espírito Santo

Reitor: Paulo Sérgio de Paula Vargas

Comitê Científico

Dra. Adriana Richit - Universidade Federal da
Frenteira Sul - Brasil

Dr. João Pedro da Ponte - Universidade de Lisboa
- Portugal

Dra. Renata Camacho Bezerra - Universidade
Estadual do Oeste do Paraná - Brasil

Dra. Roberta D'Ângela M. Bortoloti - Universida-
de Estadual do Sudoeste da Bahia - Brasil

Dr. Victor Giraldo - Universidade Federal do Rio
de Janeiro - Brasil

Dra. Yuriko Yamamoto Baldin - Universidade
Federal de São Carlos - Brasil

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Quezia Barbosa de Oliveira Amaral - CRB6-ES 590

D618 Dividir e compartilhar / Núbia Quenupe Campos...[et al.] -
Vila Velha, ES : Edifes, 2021.
136 p.;il. – (*Lesson Study* em Matemática ; v. 3).

Vários autores.

ISBN: 978-65-89716-08-2 (e-book).

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Resolução de
problemas. 3. Professores – Formação. I. Campos, Núbia Quenupe.
II. Wrobel, Julia Schaeztle. III. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira. IV.
Prane, Bruna Zution Dalle. V. Título.

CDD 22 – 510.7

Copyright @ 2021 by Instituto Federal do Espírito Santo

Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto No. 1.825 de 20 de dezembro de
1907. O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.
Material público para livre reprodução, desde que se faça referência à fonte e às autoras.

DOI: 10.36524/9786589716082

*A gente se faz educador, a gente se forma,
como educador, permanentemente, na
prática e na reflexão sobre a prática*

Paulo Freire

AGRADECIMENTOS

A produção deste livro, o terceiro da série *Lesson Study* em Matemática, só foi possível graças à participação, envolvimento e dedicação de várias pessoas, cada qual contribuindo a seu modo, revestindo-se de diferentes papéis e atuando em várias frentes. É para elas que direcionamos nossos sinceros agradecimentos, as quais nomeamos especificamente a seguir.

Às professoras Camila Andreatta (Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo) e Hellen Castro Almeida Leite (Universidade Federal do Espírito Santo), pelos muitos encontros de planejamento, críticas, sugestões e participação no *Lesson Study* que originou este livro, duas grandes parceiras que pensam e se interessam pelo ensino da Matemática de qualidade, assim como nós.

À equipe da Escola Estadual de Ensino Médio Fernando Duarte Rabelo, na figura do Diretor José Paulo Andrade Gomes Lopes, por abrir gentilmente as portas da escola para a aplicação da aula, e aos 36 alunos que aceitaram participar das atividades planejadas.

Aos colegas da Comissão Científica pelas valiosas contribuições para o enriquecimento deste livro.

Finalmente, ao Instituto Federal do Espírito Santo - Ifes e à Universidade Federal do Espírito Santo – UFES, por acreditarem em nosso potencial como profissionais e nos apoiarem a fazer sempre mais e melhor pela educação matemática brasileira.

Muito obrigada!

Núbia Quenupe Campos

Julia Schaetzle Wrobel

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Bruna Zution Dalle Prane

PREFÁCIO

A *Lesson Study* é uma prática surgida no Japão há mais de 150 anos e vem sendo continuamente desenvolvida pela comunidade escolar como estratégia de aperfeiçoamento das aulas dentro da classe, com objetivo primordial de apoiar a aprendizagem eficiente dos alunos e aprimorar o currículo estabelecido. A sua prática implica, de forma intrínseca, o aperfeiçoamento contínuo da formação de professores no Ensino Básico, e vem ganhando cada vez mais seguidores e apoiadores em países fora do Japão. Entretanto, a estrutura aparentemente simples da *Lesson Study* se revela altamente complexa ao planejar sua aplicação nas escolas, porque esta metodologia possui princípios que não se traduzem em uma fórmula ou receita padronizada para as lições desenvolvidas dentro da sala de aula. A *Lesson Study* necessita levar em consideração a cultura local, o contexto social, as condições administrativas, e sobretudo o preparo dos professores no planejamento de aulas sobre conteúdos curriculares para atingir os objetivos de aprendizagem de seus estudantes. Isso leva a atividades de investigação em cada país e comunidade que tenta trazer a *Lesson Study* para o ambiente

escolar. A investigação é necessária para não perder a essência nas interpretações dentro de cada contexto, e potencializar os benefícios que esta metodologia pode trazer à aprendizagem efetiva dos alunos e ao crescimento profissional dos professores.

Este livro, o terceiro da série *Lesson Study* em Matemática, é um valioso material de referência aos educadores matemáticos do nosso país, por constituir relato vívido de experiência de pesquisa de um ciclo completo realizado, fundamentado corretamente nos princípios originais da *Lesson Study*, e implementado no contexto local, respeitando as características da necessidade dos alunos do 1º ano do Ensino Médio que mostraram conhecimentos falhos sobre o tema de Divisão e seus algoritmos, que deveriam trazer do Ensino Fundamental como conhecimento prévio para conectar aos tópicos curriculares do Ensino Médio. É um fenômeno observado com frequência nas nossas escolas e um desafio para os professores que precisam trabalhar com os estudantes que iniciam o Ensino Médio sem o hábito de estudar para aprender a questionar-se, explorar as questões, pensar organizadamente, comunicar seus argumentos e resultados.

As autoras desse livro enfrentaram o desafio de trabalhar o tema da Divisão de números inteiros, por meio de Resoluções de Problemas contextualizados. O ponto alto do trabalho de pesquisa das autoras está na etapa do estudo preliminar da própria equipe, desde os enunciados dos problemas, os dados numéricos cuidadosamente escolhidos para contemplar os casos cruciais na compreensão da representação posicional decimal, escolha do material didático de apoio, a previsão de dúvidas e erros que possam ocorrer durante a aula e preparação para tais situações, as diferentes formas de algoritmos da divisão presentes nos textos didáticos para aprofundar o conhecimento. O cuidado no estudo que embasou o plano de

aula se mostrou produtivo exatamente na aplicação da aula, quando a professora se mostrou capacitada para as perguntas e reações dos estudantes.

Em outras palavras, este texto apresenta descrição de um exemplo real de pesquisa de aula, que constitui um modelo para os leitores interessados em compreender o fundamento da *Lesson Study*, especialmente a importância do planejamento de uma aula e sua observação pelos pares para coletar evidências para a avaliação do ciclo de *Lesson Study*. A análise do processo durante as etapas da *Lesson Study* também ilustra uma atividade importante desta metodologia que ainda não está incorporada nos conhecimentos e práticas dos professores das nossas escolas.

O livro é uma contribuição para a pesquisa da melhoria da formação de professores com *Lesson Study*.

Recomendo sua leitura a todos que desejam conhecer as possibilidades de prática de *Lesson Study* no nosso país, e auguro continuidade da série com mais relatos..

Yuriko Yamamoto Baldin
(yuriko@dm.ufscar.br)

APRESENTAÇÃO DA SÉRIE

E tantos verbos de persuadir requerem os verbos de ousar. De provocar o sujeito a significar sua existência pela contraposição ao que está posto, de forma a atender as suas reais necessidades. Assumir insubmissões é assumir o direito à liberdade de pensar, de questionar, de buscar respostas...¹

Nesse espírito de insubordinações criativas, proposto por D'Ambrósio e Lopes², apresentamos a série *Lesson Study* em Matemática, motivadas pelo desejo de divulgar aulas de Matemática elaboradas sob as premissas do modelo japonês *Lesson Study* ou Estudo/Pesquisa de Aula na língua portuguesa³.

Nossa opção pelo *Lesson Study* como fio condutor das ações de ensino e de seus impactos sobre a aprendizagem de estudantes não é incidental, está pautada em seus reflexos em

¹ D'Ambrosio; Lopes (2015a, p. 14-15).

² D'Ambrosio; Lopes (2015b).

³ Optamos pela utilização do termo *Lesson Study*, em vez de Estudo/Pesquisa de Aula ou *Jugyou Kenkyu*, por sua ampla difusão no meio acadêmico-escolar-científico.

práticas que vêm se mostrando potenciais para a aprendizagem em Matemática, evidenciados tanto em resultados apresentados pelo Japão em testes de larga escala e em pesquisas acadêmicas na área de Educação Matemática, quanto na própria experiência das organizadoras desta série.

Pretendemos difundir entre professores que ensinam Matemática o resultado de aulas planejadas-executadas-refletidas que poderão funcionar como ponto de partida para suas próprias ações de ensino, deixando a cargo de sua criatividade e experiência avanços a partir do que for apresentado em cada volume da série. Desse modo, o professor poderá imprimir sua marca pessoal em suas ações, uma vez que cada turma tem seu modo de ser e de sentir o mundo, seu contexto e sua história. Ademais, os livros podem ser utilizados em disciplinas específicas de licenciatura, de pós-graduações e em atividades de formação continuada em Ensino de Matemática.

Para além de um produto educacional em ensino, os livros da série *Lesson Study* são, em si, resultados de processos de investigação realizados em meio à prática diária de professores em sala de aula, mas sobretudo com o cuidado de serem escritos com linguagem própria da sala de aula.

Por fim, destacamos que cada volume da série se apresenta independente, podendo ser lido e levado a efeito fora de ordem, conforme o interesse do leitor.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
(alicevfs@gmail.com)
Julia Schaetzle Wrobel
(juliasw@gmail.com)

SUMÁRIO

<i>LESSON STUDY</i>	14
POR QUE A (RE)CONSTRUÇÃO DO ALGORITMO PADRONIZADO DA DIVISÃO NO ENSINO MÉDIO?.....	20
COMO E ONDE TUDO ACONTECEU.....	23
O PLANEJAMENTO COLABORATIVO.....	28
O PLANO DA AULA.....	76
A AULA.....	85
AValiação.....	110
O QUE DEU CERTO... O QUE NÃO DEU CERTO... UM BALANÇO FINAL	114
REFERÊNCIAS.....	123
APêNDICE.....	130
MINICURRÍCULO DAS AUTORAS.....	132

LESSON STUDY

*Lesson Study*⁴ é um modelo japonês de estudo/pesquisa da prática do professor com o objetivo de potencializar a aprendizagem efetiva e participativa dos alunos. Este também pode ser entendido como um meio para a formação de professores. Para isso, as aulas são elaboradas, de modo colaborativo, por um grupo de professores e gestores, seguidas de reflexões sobre a vivência de cada um.

No Japão, a prática do *Lesson Study* atende, igualmente, à formação inicial e continuada de professores, com destaque para professores recém-formados que assumem, pela primeira vez, suas salas de aula e podem contar com a colaboração de colegas mais experientes⁵.

Para além do Japão, a literatura acadêmica aponta a importância do trabalho docente colaborativo por meio de investigação, estudo e reflexão sobre a própria prática. Trocas de sabe-

⁴ Fernandez; Yoshida (2004), Takahashi (2006), Isoda; Olfos (2009), Fujii (2014), Souza; Wrobel; Baldin (2018).

⁵ Para uma descrição detalhada do *Lesson Study* Japonês, o leitor pode consultar Fernandez; Yoshida (2004).

res e de experiências têm um papel central na aprendizagem profissional docente e, nesse sentido, o trabalho colaborativo apresenta-se como uma via importante para a formação do professor, o que pode se refletir efetivamente na melhoria da aprendizagem dos alunos. Por promover fortemente esse espírito de colaboração e reflexão, entendemos que o *Lesson Study* pode e deve se firmar como um meio de ensino também no Brasil.

É importante observar que o modelo original de *Lesson Study* situa-se nos aspectos culturais e sociais do contexto educacional japonês (incluindo a formação de professores e a própria escola), que são diferentes do contexto educacional brasileiro. Porém, o mais importante não é reproduzir o modelo com o compromisso de manter todos os detalhes como estes ocorreriam em uma escola japonesa, e sim entender a essência, os princípios e objetivos do *Lesson Study* e adaptar o modelo ao contexto brasileiro, de forma que esses princípios sejam preservados e os objetivos atingidos⁷.

Muito mais do que produzir um roteiro de aula resultante no final dos diversos ciclos, o *Lesson Study* propicia a formação e o desenvolvimento do professor, sendo que sua participação na construção do roteiro pode lhe fornecer uma visão sobre como construir aulas por meio da colaboração com outros colegas e com base na observação de outras turmas.

Em sua essência, o *Lesson Study* é composto por três etapas⁸:

⁶ Ferreira (2003), Fiorentini (2004), Miskulim et al. (2005), Ibiapina (2008), Baldin (2009), Cyrino; Caldeira (2011), Giraldo et al (2017; 2018); Giraldo (2018), Wrobel; Souza (2018).

⁷ Giraldo et al. (2017).

⁸ Autores como Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015) consideram quatro etapas, e não apenas três, sendo a identificação pelos professores de um problema relevante na aprendizagem dos alunos a primeira delas.

Etapa 1: Planejamento

Nesse primeiro momento, o grupo de professores se reúne para estudar o currículo escolar, traçar metas, definir o conteúdo a ser abordado e o ano escolar, buscar resultados de pesquisas e material didático sobre o tema, construir o caminho que devem trilhar para alcançar os objetivos definidos, entre outros. Diferentemente de um plano de aula comum, burocrático, em que o professor descreve o conteúdo, os objetivos gerais e específicos, os procedimentos, os recursos e a forma de avaliação, no *Lesson Study* o plano de aula é sempre criteriosamente elaborado e buscando a participação ativa dos alunos. Nesse sentido, o grupo discute as situações ou problemas que serão propostos no início da aula e se estes são adequados ao contexto dos alunos. Há, também, uma preocupação com os possíveis questionamentos que devem ser realizados para estimular o pensamento dos alunos, bem como suas respostas esperadas.

Os professores destacam conhecimentos prévios necessários para a aula, dificuldades epistemológicas e dúvidas são previstas e maneiras de lidar com cada uma delas são debatidas, tendo em vista formas adequadas para se lidar com situação que se apresentar. Prevê-se, também, que os alunos vão à lousa apresentar e discutir suas estratégias e pensamentos com a turma e com o professor, considerando as múltiplas estratégias matemáticas e as possíveis conexões entre elas. No momento do planejamento, cada professor contribui com a sua experiência no assunto, suas leituras prévias e, ao final, todos produzem, conjuntamente, um plano de aula que descreve, em detalhes, o que acreditam ser o melhor para a(s) aula(s) que pretendem lecionar.

Etapa 2: Execução

O passo seguinte é a aula propriamente dita. Um dos professores executará as ações planejadas em sua própria classe, enquanto o restante do grupo observará a reação dos alunos e a dinâmica da aula, sem interferir em seu andamento. Tendo o planejamento em mãos, como uma referência, os professores apenas observam e realizam anotações para posterior reflexão. Seus olhares concentram-se nas respostas, facilidades ou dificuldades dos alunos e na coerência entre o que foi discutido quando da construção do planejamento e a efetiva execução, além da possibilidade de realização de novo planejamento para uma aula futura, considerando alterações importantes observadas durante a aula.

A execução da aula deve levar em conta a valorização da produção dos alunos, com o uso do erro como elemento favorecedor da construção do raciocínio pela turma. É importante que todos os alunos estejam engajados na discussão e solução do problema e que a aula seja conduzida em torno das ideias matemáticas, sem que o tempo seja consumido com questões irrelevantes ou que não promovam o desenvolvimento do pensamento matemático que os levem à solução do problema. Por fim, é importante realçar o cuidado com a organização da produção dos alunos na lousa, o compartilhamento de ideias pelos alunos e a síntese dessa produção matemática pelo professor.

É relevante destacar que o planejamento não deve ser visto como algo estático ou “engessado”. Ao contrário, ele apresenta o resultado dos debates realizados pelo grupo de professores que decidiu por realçar elementos que se espera explorar em sala de aula, conforme os desdobramentos e reações dos alunos. No entanto, o professor que ministrará a aula pode decidir por caminhos diversos face a situações não previstas ocorridas durante a aula.

Etapa 3: Reflexão

Após a aula, os professores se reúnem para analisar seus impactos sobre o desempenho e a aprendizagem matemática dos alunos, baseados no que tinha sido previamente planejado/pensado pelo grupo. O objetivo, nesse momento, é refletir sobre a produção de conhecimentos e as reações dos alunos. O grupo pode, então, decidir por debruçar-se sobre possíveis melhorias na aula, aprimorando o que tiver sido produzido até o momento, atualizando o planejamento e, assim, inaugurando uma nova etapa (replanejamento).

Em seguida, o mesmo ou outro professor do grupo pode ministrar essa nova aula, observado pelos colegas e seguido de nova reflexão, processo esse contínuo e denominado de Espiral do *Lesson Study*⁹ - uma vez que a cada nova edição de planejamento-execução-reflexão agregam-se experiências em nível mais elevado de maturidade (Figura 1)¹⁰.

Figura 1. Espiral do *Lesson Study*.

Fonte: Adaptada de Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

⁹ Adaptado de Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

¹⁰ Mais informações sobre o *Lesson Study* podem ser consultadas em Souza e Wrobel (2018) e em Souza, Wrobel e Baldin (2018).

Cabe destacar que o replanejamento e as etapas seguintes a ele são raros no cenário japonês de aplicação do *Lesson Study* e que esses não ocorreram no presente trabalho.

POR QUE A (RE)CONSTRUÇÃO DO ALGORITMO PADRONIZADO DA DIVISÃO NO ENSINO MÉDIO?

A experiência das autoras como professoras e pesquisadoras mostra que a divisão é a operação matemática com que os alunos mais apresentam dificuldades, seja na interpretação de textos para a resolução de algum problema, seja na simples aplicação de algoritmos padronizados, que os alunos memorizam mecanicamente, sem entender que propriedades matemáticas fundamentam cada passo.

No Ensino Básico brasileiro, a operação de divisão é introduzida nos anos iniciais do Ensino Fundamental¹¹ e se aplica a muito do que é estudado subsequentemente, não apenas em Matemática como em outras disciplinas. Seria de se esperar, portanto, que alunos dominassem essa operação desde então. Entretanto, o que vemos em testes diagnósticos e em resultados

¹¹ BRASIL (1997); BRASIL (1998); BRASIL (2017).

de nossas avaliações com esses alunos nos leva a crer que esse conhecimento não se concretizou, ao menos no que diz respeito a algoritmos e a interpretações de seus resultados, inclusive pelos professores¹².

Outro aspecto é a revisão de conteúdos ao longo da educação básica, o que permite que esses sejam constantemente recontextualizados e relacionados com outros conceitos pelos alunos.

No Brasil, documentos oficiais recomendam que no 6º ano seja introduzida a divisão euclidiana¹³ e nos anos finais do Ensino Fundamental já seja desenvolvida a resolução das operações por meio de diferentes estratégias e com compreensão dos processos envolvidos. Esses documentos indicam, ainda, que seja realizado um trabalho sistematizado com as operações matemáticas que inclua a construção e análise de vários procedimentos¹⁴, relacionando-os.

Eis a motivação para a realização de um *Lesson Study* com alunos do Ensino Médio, a qual promova a compreensão de algoritmos para a divisão. Pretendemos que a experiência descrita em **Dividir e compartilhar** leve à produção de significados que lhes permitam efetuar a operação, bem como raciocinar ante a problemas que a requeiram.

¹² BEZERRA (2017).

¹³ BRASIL (2017, p. 298).

¹⁴ BRASIL (2018).

Apesar de o foco ser a (re)construção de algoritmos para a operação de divisão por meio de diferentes estratégias, não dispensaremos o uso de problemas. Priorizamos um ensino de matemática orientado para a produção de sentidos para os conceitos, em oposição a um ensino de matemática que se limite à apresentação de fatos, resultados e procedimentos.

Nesse sentido, no íterim de um problema e levando-se em conta suas especificidades, é que se decide se o quociente é o não a resposta ao problema, por exemplo.

Com isso em mente, mãos à obra!

COMO E ONDE TUDO ACONTECEU

Dividir e compartilhar apresenta o *Lesson Study* sobre o conteúdo matemático Divisão, que aconteceu no primeiro semestre de 2017 e foi desenvolvido por uma equipe de seis professoras de Matemática¹⁵: Bruna Zution Dalle Prane (Mestre em Educação Matemática, professora do Ifes – campus Vitória), Camila Andreatta (Graduada em Licenciatura em Matemática, professora da Rede Estadual do Estado do Espírito Santo - SEDU-ES), Hellen Castro Almeida Leite (Mestre em Educação Matemática, Professora da UFES), Julia Schaetzle Wrobel (Doutora em Matemática Aplicada, Mestre em Educação Matemática, Professora da UFES), Maria Alice Veiga Ferreira de Souza (Doutora em Educação Matemática, professora do Cefor/Ifes) e Núbia Quenupe

¹⁵ Esse trabalho fez parte da pesquisa de Mestrado da Prof. Núbia Quenupe Campos, sob orientação da Prof. Julia Schaetzle Wrobel pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT / UFES (CAMPOS; 2018).

Campos (Graduada em Licenciatura em Matemática, professora da SEDU-ES). No entanto, as professoras Camila e Hellen não participaram da escrita deste livro por questões pessoais.

Núbia e Camila atuam na escola básica; Bruna e Hellen atuam no ensino superior e têm experiência em formação de pedagogos; Julia e Hellen têm bagagem em formação de professores da licenciatura em Matemática; Julia e Alice também atuam no ensino superior e em pós-graduações em ensino de matemática. Essa riqueza de experiências e vivências constitui um grupo heterogêneo e adequado para os propósitos de um *Lesson Study*, com as idiossincrasias trazidas de diferentes contextos profissionais. Diferente de um grupo cooperativo, houve colaboração, essência do modelo, por trabalharmos nos apoiando, com vistas a alcançar objetivos comuns, negociados coletivamente, com relações não-hierarquizadas, liderança compartilhada, confiança mútua e corresponsabilidade sobre as ações¹⁶.

Esse grupo foi constituído para pensar em uma questão recorrente nas turmas de 1º ano do Ensino Médio das professoras da Rede Estadual: os alunos chegam a essa etapa escolar sem dominar o algoritmo de divisão. Diante desse cenário e sob as premissas do *Lesson Study*, trabalhamos colaborativamente na elaboração-execução-reflexão de aulas baseadas nesse tema, como passaremos a relatar.

Foram realizados três encontros para o planejamento da aula, em que foram abordadas discussão da temática, elaboração dos problemas, avaliação de materiais a serem utilizados, apresentação de diferentes estratégias para a solução das questões e possíveis soluções pelos alunos, totalizando 9h. Além disso, mantivemos contato por mídias digitais durante todo o tem-

¹⁶ Entendemos colaboração conforme Damiani (2008).

po, trocando ideias e apontando importantes questionamentos, o que permitiu reduzir a quantidade de encontros presenciais.

Figura 2: Equipe do Lesson Study¹⁷

Foram realizados três encontros para o planejamento da aula, em que foram abordadas discussão da temática, elaboração dos problemas, avaliação de materiais a serem utilizados, apresentação de diferentes estratégias para a solução das questões e possíveis soluções pelos alunos, totalizando 9h. Além disso, mantivemos contato por mídias digitais durante todo o tempo, trocando ideias e apontando importantes questionamentos, o que permitiu reduzir a quantidade de encontros presenciais.

¹⁷ Esta e todas as outras figuras do texto são de autoria das autoras e por essa razão, optamos por não destacar repetidamente a fonte ao longo do texto.

Para que o leitor tenha uma ideia da cronologia de desenvolvimento de atividades, destacamos algumas atividades e o mês de sua realização:

- Planejamento de aula: janeiro de 2017;
- Aplicação do pré-teste (avaliação diagnóstica): primeira semana de aula – fevereiro de 2017;
- Execução da simulação de aula: março de 2017;
- Execução das atividades com os alunos: março de 2017;
- Aplicação do pós-teste: abril de 2017.

As aulas foram ministradas para 36 alunos do 1º ano do Ensino Médio da Rede Estadual em uma turma regular da professora Núbia, sob a observação atenta de todo o grupo, que naquele momento era responsável por analisar se o planejamento coletivo havia atingido as expectativas sobre a aprendizagem dos alunos. Este livro apresenta quatro aulas; duas aulas geminadas em um dia, seguidas de reflexão, momento em que o grupo se reuniu para refletir e discutir impactos desse planejamento sobre os seus objetivos, e outras duas aulas geminadas no dia seguinte, seguidas de nova reflexão.

As reuniões e aulas foram gravadas em vídeo para a revisão da escrita do planejamento, para análise da participação e aprendizagem dos estudantes em aula e, também, para subsidiar aspectos pontuais que foram objeto de reflexão posterior das autoras. As imagens e vozes serviram, igualmente, para ilustrar e aumentar a compreensão de todas as etapas do *Lesson Study* aqui descritas.

Os registros foram autorizados em termos de consentimento livre e esclarecido por todas as professoras participantes, pelos pais/responsáveis de todos os alunos que participaram das aulas e pelo diretor da Escola. Através dessa autorização, os participantes tomaram conhecimento da pesquisa e autorizaram a divulgação em meios acadêmicos e científicos de suas

produções, garantindo-lhes a preservação de nomes e rostos, em consonância com a ética da pesquisa.

Os vídeos e fotografias ocorreram em ambientes de formação de professores e sala de aula, que não se constituem em locais que favoreçam a qualidade das imagens. Por essa razão, optamos pela reprodução fiel de algumas produções escritas de professores e alunos, mantendo as cores e a disposição espacial (Figuras 18 a 21, 24 e 25, 29 a 31, 33 e 34 e Quadros 1 e 2).

Passaremos, a apresentar o planejamento da aula e, em seguida a discussão sobre cada uma das etapas da tríade planejamento-execução-reflexão sobre a Divisão.

O PLANEJAMENTO COLABORATIVO

Para começar nossa conversa, destacamos que as reuniões para planejamento das aulas não seguiram uma sequência linear de ideias, ou seja, muitas questões foram retomadas e reavaliadas e o plano avançou e retrocedeu, em um processo natural de pensar e repensar um tema.

Neste capítulo detalharemos e esclareceremos aspectos relevantes não descritos no plano apresentado no capítulo anterior e que emergiram em meio às reuniões presenciais e virtuais para a construção da aula.

Figura 3: Professoras elaborando o planejamento.

A primeira questão abordada foi uma explicação de Núbia sobre a necessidade de trabalhar divisão com os alunos do 1º ano do Ensino Médio. Era de se esperar que, ao chegarem no Ensino Médio, os alunos soubessem dividir, mas, pela nossa prática docente, sabíamos que não era essa a realidade de muitos alunos brasileiros. Há alguns anos trabalhando nesta série, a professora Núbia relatou que não havia tido uma única turma em que a maioria dos alunos alcançasse aquele ano escolar sabendo operar a divisão. Camila concordou e relatou que um aluno seu, também do 1º ano do Ensino Médio, a surpreendeu com a seguinte afirmativa: “Professora, tem uma coisa que eu não sei em Matemática, que eu nunca consegui entender. Aquela conta que é assim...”. E o aluno fez, no ar, o símbolo da divisão, o que a assustou muito por ele não conseguir sequer lembrar o nome da operação.

Um dos questionamentos sugeridos pelo grupo foi sobre como abordar a operação matemática de Divisão com os alunos do 1º ano. Havia uma preocupação com que a abordagem não fosse demasiadamente infantil ou desmotivante para os alunos,

ao mesmo tempo em que precisávamos definir se trabalharíamos com conceitos ou com procedimentos. Optamos pela segunda, uma vez que sucessivas atividades diagnósticas em anos anteriores mostraram que os alunos compreendiam o conceito de divisão, mas não sabiam operá-la corretamente¹⁸.

A questão então era: como ensinar estratégias para a divisão, de modo que os alunos compreendam as justificativas matemáticas, os valores posicionais de cada algarismo que compõe um número, a construção do quociente através das ordens e a abordagem por estimativas.

O grupo optou por abordar o tema pela via da Resolução de Problemas, baseando-se em recomendações da literatura em Educação Matemática e das diretrizes nacionais¹⁹. Tivemos uma preocupação particular com relação aos problemas que seriam aplicados aos alunos. Daí, escolhemos trabalhar com problemas verbais de seus cotidianos, ou seja, aqueles que se apresentam em linguagem materna, trazendo uma narrativa ou história²⁰.

Apesar dessa opção, o tempo de aula deveria ser consumido, prioritariamente, com as estratégias de divisão e não com discussões acerca dos problemas, embora essa seja uma etapa necessária para a própria dinâmica de aulas baseadas em resolução de problemas.

¹⁸ Sobre conceitos, o leitor poderá consultar Toledo e Toledo (1997).

¹⁹ Polya (1978); Schoenfeld (1986); Brasil (1998, 2017).

²⁰ Souza; Guimarães (2015).

PLANEJAMENTO DA DINÂMICA DE AULA

O grupo decidiu propor os problemas aos alunos, um após o outro, e deixá-los debater e resolver coletivamente, para, em seguida, apresentar e discutir suas estratégias de resolução na lousa. Se uma estratégia prevista durante o planejamento não fosse abordada pelos alunos, a professora deveria discuti-la com a classe. Em especial, o algoritmo padronizado para a divisão deveria ser detalhado por ser tradicionalmente ensinado aos alunos na escolaridade básica brasileira. Além disso, as professoras definiram que o mais produtivo seria trabalhar os problemas em aulas consecutivas para que houvesse continuidade nessa ação. Por isso, foi definido que a aplicação ocorreria em duas aulas geminadas, com carga horária total de 220 minutos, além de dois testes diagnósticos a serem aplicados antes e após essas duas aulas.

Para privilegiar a interação, a classe seria organizada em grupos de até 4 alunos, os quais fariam uma leitura preliminar e individual do problema apresentado. Em seguida, um aluno seria convidado a lê-lo em voz alta e, na sequência, a professora visitaria os grupos mediando o processo de solução por meio de questionamentos. Ao transitar entre os grupos, ela verificaria as estratégias e possíveis erros e dúvidas dos alunos, munindo-se de dados que pudessem conduzir suas próximas ações.

Além disso, a professora deveria verificar, nesse momento, se algum grupo resolveu o problema de maneira diferente dos demais, tendo em vista o enriquecimento da aula quando da socialização dos resultados pelos alunos. Esses grupos deveriam ser encorajados a expor suas resoluções para os demais colegas. Se isso não ocorresse, a professora discutiria todas as diferentes estratégias de solução, conectando-as.

Os alunos deveriam resolver 4 problemas, apresentando e discutindo com a turma suas resoluções ao término de cada um. Assim teriam chance de conhecer novas estratégias antes de prosseguirem, buscando enriquecer seus repertórios²¹, constituindo o estágio de *neriage*. O *neriage* é o momento em que os alunos, cuidadosamente guiados pelo professor, compartilham seus entendimentos, analisam, comparam e contrastam criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança com o que foi aprendido. É a conclusão coletiva apurada por todos.

O grupo de professoras também registrou algumas recomendações para a condução da aula: a professora deveria se autorregular²² para não responder imediatamente aos próprios questionamentos, o que é muito comum. Ao contrário, ela deveria dar tempo para os alunos refletirem e elaborarem suas próprias respostas, dando oportunidade para que eles construam seus próprios argumentos matemáticos²³.

Outra preocupação deste grupo foi a de envolver todos os alunos na discussão, por meio de perguntas e pela valorização de suas produções. Isso promoveria o compartilhamento de raciocínios ou resoluções uns dos outros, valorizando a integração dos alunos e utilizando o erro como oportunidade de aprendizado. Dessa forma, os alunos seriam mais ativos ao serem levados a construir seu próprio conhecimento²⁴.

²¹ Souza; Wrobel (2017).

²² A autorregulação é entendida pela Psicologia Cognitiva como sendo “controle do próprio comportamento através de automonitoramento das condições que evocam comportamento desejado e indesejado” (VANDENBOS, 2010, p. 121).

²³ Krutetskii (1976).

²⁴ Polya (1978); Schoenfeld (1996); Isoda e Olfos (2009).

Uma terceira preocupação foi cuidar do tipo de questionamento que a professora faria aos alunos. Perguntas do tipo “O que vocês entenderam do problema?” ou “Como vocês resolveriam?” são amplas e prejudicam o fluxo de raciocínio²⁵. Indagações desse tipo deveriam ser substituídas por outras mais específicas, tais como: “Quais são os dados do problema?”, ou “O que o problema está pedindo?”.

O grupo considerou, ainda, a importância de o aluno saber resolver um problema e não apenas conhecer sua resposta, o que é um tipo de exercício mental que amplia suas possibilidades de discernimento sobre as coisas, possibilitando a tomada de decisões. Nesse sentido, os alunos deveriam ser estimulados a registrar todo o raciocínio e não apenas as respostas finais dos problemas. Essa recomendação não constaria por escrito nas folhas de atividades, mas seria dita no momento que os alunos recebessem os problemas.

As professoras ponderaram sobre o espaço onde as aulas seriam executadas. O auditório da escola foi cogitado, mas um ambiente diferente do usual poderia causar-lhes algum desconforto, agitação e perda de tempo com o deslocamento, daí elas optaram por permanecer na sala de aula regular.

Também foi cogitado que os alunos poderiam solicitar que a resolução dos problemas valesse algum tipo de pontuação, então as professoras refletiram que atribuir um ou dois pontos para essa produção poderia ser um incentivo para maior dedicação às tarefas.

Por fim, foi definido que os alunos seriam informados sobre o objetivo da aula e a razão da presença de outras professoras naquele recinto, por ser uma ação extracurricular para essa sé-

²⁵ Wrobel et al. (2016).

rie escolar e pela condição fora da rotina do acompanhamento da aula, respectivamente.

A ELABORAÇÃO DOS PROBLEMAS

Na elaboração dos problemas, as professoras planejaram 4 tipos de divisão, quais sejam: 1) números naturais no dividendo e no divisor e ausência de zero no quociente; 2) um zero no quociente; 3) dois zeros não sequenciais no quociente; 4) um número não inteiro no quociente, com a vírgula seguida de um zero, ou seja, o algarismo da ordem dos décimos seria o zero. Esses tipos não foram selecionados aleatoriamente, mas como resultado de um diagnóstico²⁶ realizado pela professora regular daqueles alunos e membro do grupo que planejou a aula.

No planejamento, as professoras tomaram o cuidado de evitar problemas cujos textos pudessem trazer duplicidade de interpretação com palavras que não fizessem parte do vocabulário dos alunos ou discussões que não contribuíssem para a aprendizagem da divisão, por não serem esses os objetivos primeiros, apesar de não se negar o valor de interpretações e determinadas discussões em aulas de Matemática.

A primeira divisão deveria envolver situação com valores monetários. Optamos pela compra de um celular, que é de interesse e faz parte do cotidiano dos alunos. A princípio, pensamos na divisão $540 \div 12$ e cada uma das professoras resolveu individualmente esta operação (Figura 4) para se relevar diferentes estratégias.

²⁶ Detalhes do diagnóstico podem ser consultados em Campos (2018).

Figura 4: Cadernos de duas professoras.

12) $540 \overline{) 12}$
45

a) $\begin{array}{r} 120 \\ 240 \\ 360 \\ 480 \\ \hline 600 \end{array} \rightarrow 60 \rightarrow 540$ *provisiva*

b) $\begin{array}{r} 12 \times 50 = 600 \\ - 60 \\ \hline 540 \end{array} \rightarrow 50 - 5 = 45$ *revisiva*

c) $\begin{array}{r} 540 \overline{) 12} \\ 48 \\ \hline 60 \\ 0 \end{array} \overline{) 45}$ *algoritmo*

$540 \overline{) 12}$	$4 \times 12 = 48$
$- 48 \quad 45$	$40 \times 12 = 480$
060	$480 + 60 = 540$
$- 60$	
0	5×12
	$540 : 12 = 40 + 5 = 45$

O método mais usado pelo grupo foi o algoritmo padronizado da divisão. Pensando em uma estratégia de cálculo mental, uma das professoras provocou o grupo:

- Julia* E se nenhuma de nós tivesse papel e caneta ou calculadora? Como faríamos essa divisão?
- Maria Alice* Eu resolveria por aproximação.
- Núbia* Eu faria 12×50 . Seriam 600.
- Maria Alice* Você vai por cima, eu vou por baixo... Eu faço 120 mais 120 mais 120... (risos).
- Camila* Eu faria 12×10 é 120. Por aí vai... 240, 360..."

Essa diversidade na forma de operar a mesma divisão nos munuiu de estratégias que poderiam ser eleitas pelos alunos e, caso não fossem, seriam objetos de promoção pela professora.

Em seguida, Hellen chamou a atenção do grupo para uma nova estratégia de resolução que a divisão $448 \div 8$ proporcionava: o 448 é decomposto obviamente em números múltiplos de 8. Poderíamos fazer $400 \div 8$, $40 \div 8$ e $8 \div 8$. Ou, ainda, $400 \div 8$ e $48 \div 8$. Essa

nova estratégia não se aplicava na divisão de 540 por 12. Certamente, 540 pode ser decomposto em múltiplos de 12, mas não de maneira imediata e óbvia. Definimos, por isso, que essa seria a primeira divisão proposta para o **Problema 1: $448 \div 8$** . Para contextualizar a divisão e retomando à proposta de compra de celular, decidiu-se que o telefone custaria R\$448,00 e esse valor seria dividido em 8 parcelas iguais.

Problema 1 - Primeira proposta

João precisou comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. Ele se interessou por um *Smartphone* Positivo, como o da imagem a seguir.

Esse *Smartphone* custava R\$ 448,00. João, achando o preço muito bom, decidiu comprá-lo e parcelar o seu valor em oito prestações iguais. Qual foi o valor de cada prestação paga por João?

A princípio, alguns dos problemas imaginados apresentavam imagem meramente ilustrativa, sem contribuir com o raciocínio ou fornecer informações para a solução do problema. A professora Maria Alice salientou que isso poderia ser um distrator²⁷, incentivando que alguns alunos procurassem informa-

²⁷ Aquilo que provoca distração – “Estímulo ou tarefa que desvia a atenção da tarefa de interesse primordial” (VANDENBOSS, 2010, p. 301).

ções relevantes nas figuras. Reformularam, portanto, o texto dos problemas retirando imagens inócuas ou substituindo por outras que contivessem informações necessárias para sua solução. Importante dizer que todos os problemas foram elaborados para um contexto local, podendo ser adaptados a diferentes cenários.

O texto foi reformulado para que os alunos se sentissem inseridos na problemática, o que poderia motivá-los a resolvê-lo. Por exemplo: um trecho dizia “João quer comprar um celular” e foi substituído por “Você quer comprar um celular”.

Além disso, o texto não informava que se tratava de 8 prestações iguais. Nesse caso, a professora deveria alertar os alunos dessa condição, ressaltando que, muitas vezes, essa informação não está escrita, mas subentendida nas propagandas.

Problema 1 - texto reformulado.

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção:

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Passamos à análise do texto do **Problema 2**.

As professoras inferiram que a palavra “socioeconômico” e a expressão “perfil dos estudantes” poderiam ser geradoras de dúvidas pelos alunos. É certo que essa seria uma oportunidade de aumentar seus vocabulários, mas, em consonância com a di-

retriz de manter o foco apenas no objetivo da aula, decidiram suprimi-las. A figura também foi excluída por não acrescentar informação ao problema.

Problema 2 - Primeira proposta

A secretaria de educação do município BOA FÉ fez uma pesquisa socioeconômica com os 9270 alunos de suas escolas para traçar um perfil desses estudantes. Nas escolas dessa cidade, há 30 alunos em cada turma. Quantas turmas existem em BOA FÉ?

O envolvimento dos estudantes na problemática foi também uma opção, por isso trocaram a cidade fictícia por “município”, visto que a palavra “município” faz parte do léxico daqueles alunos por estudarem em uma instituição pública. Destacamos abaixo a redação final do problema:

Problema 2 – texto reformulado

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

A análise do **Problema 3** levou o grupo a refletir sobre o fato de que muitos alunos do Ensino Médio participam de programas de estágio e esse fato foi usado para inseri-los neste contexto.

Problema 3 - Primeira proposta

Com a volta às aulas, a rede de papelaria PAPEL MÁGICO precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas 14 lojas da região Sudeste. Foram comprados 15120 cadernos dos mais variados tipos e esses cadernos foram distribuídos igualmente entre as lojas da região Sudeste. Quantos cadernos cada loja recebeu?

A imagem dos livros foi substituída pela de um mapa contendo a localização das lojas. Dessa forma, a figura passou a ser útil para o entendimento do problema.

Outrossim, suprimimos a palavra “igualmente”, mas mantendo a ideia de divisão em partes iguais para o estímulo com diferentes maneiras de se identificar uma mesma operação matemática, como mostramos abaixo:

Problema 3 – texto reformulado.

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

O **Problema 4** trabalharia um quociente com o zero na ordem dos décimos.

Problema 4 - Primeira proposta

A distribuidora de grãos GRÃO AMÉRICA verificou que precisava utilizar 700 sacos para transportar 22435 quilogramas de feijão que estavam em seus galpões. Sabendo que cada saco comporta a mesma quantidade de feijão, quantos quilos desse grão haverá em cada saco?

Como nos problemas anteriores, retiramos a imagem dos feijões por não agregar valor matemático para a questão.

Ao invés de “mesma quantidade”, a professora Maria Alice sugeriu constar no texto que cada saco não deveria pesar mais do que x quilos, mas esse comando poderia levar o aluno (corretamente) a colocar mais feijão em um saco que no outro, fugindo ao nosso objetivo. Para evitar tal confusão, Bruna sugeriu substituir o peso máximo dos sacos por “distribuir igualmente” e alterar a estrutura da pergunta. Camila propôs manter “a mesma medida”, e questionar o seu valor, resultando na seguinte redação:

A distribuidora de produtos alimentícios América precisa transportar 22435 quilogramas de café que estão em seus galpões. Há apenas 700 sacos no estoque. Você deve fiscalizar o ensacamento dessa distribuidora, garantindo que os sacos recebam a mesma medida de café. Qual é essa medida?

ESTRATÉGIAS MATEMÁTICAS

Com todos os problemas reformulados, as professoras decidiram que cada uma deveria resolvê-los individualmente, tentando por diferentes modos para manter consonância com as diretrizes da aula e um planejamento adequado à proposta de um *Lesson Study*. A maioria das professoras iniciou utilizando o algoritmo padronizado da divisão e, em seguida, utilizou aproximações e decomposição, assim foram definidas as possíveis resoluções para cada problema.

Foi planejado que os alunos deveriam ir à lousa registrar e discutir suas resoluções com os colegas (*bansho e neriage*). *Bansho* é o registro da aula na lousa. Não se trata da simples exposição das estratégias, mas sim a questão da aula, diversas soluções dos alunos com suas estratégias e justificativas, e a síntese final pelo professor. A lousa não é apagada durante a aula. Professores japoneses consideram-na como importante ferramenta de ensino para organizar os pensamentos dos alunos.

Nesse momento, todas as estratégias deveriam estar presentes na aula, por iniciativa dos alunos ou pela professora. Ao final desse momento, era importante conectar as estratégias, comparando-as e finalizando com uma síntese do processo (*matome*).

Problema 1

O estudo de material didático (*kyouzai kenkyuu*) é parte do *Lesson Study*. Assim, a equipe considerou relevante, para a compreensão do algoritmo padronizado da divisão, o entendimento da relação entre as ordens no sistema decimal. Para isso, optaram por trabalhar com Material Dourado.

O Material Dourado (Figura 5), desenvolvido por Maria de

Montessori, é composto por cubinhos, barras, placas e cubos. Uma barra equivale a 10 cubinhos. Uma placa equivale a 10 barras ou 100 cubinhos. O cubo equivale a 10 placas, ou 100 barras, ou 1000 cubinhos.

Figura 5: Material Dourado

Fonte: <http://www.edupp.com.br/2015/05/aplicacao-do-material-dourado-montessoriano-em-sala-de-aula/>. Acesso em 14 jun. 2018.

Por não haver esse material disponível para os alunos manipularem, as professoras decidiram trabalhar com a projeção de suas imagens na lousa. Teriam, assim, uma abordagem visual baseada em algo concreto, o que não foi considerada a melhor estratégia, mas o que era possível fazer.

- **Algoritmo padronizado da divisão com o uso de Material Dourado**

A estratégia consiste em representar o número com o Material Dourado. Um cubinho representa a unidade, a barra contém dez cubinhos e representa as dezenas e a placa com cem cubinhos representa a ordem das centenas. As imagens abaixo ilustram a operação de divisão considerando a decomposição dos números com esse material.

O número 448 foi decomposto em 400 (4 centenas ou 4 placas) + 40 (4 dezenas ou 4 barras) + 8 unidades (8 cubinhos) (Figura 6).

Figura 6: Representação do 448 com material dourado

Não é possível dividir 4 placas em 8 grupos, a menos que as placas sejam quebradas. Por não ser possível distribuir ao menos 1 placa em cada um dos 8 grupos, o quociente não terá placas, ou seja, terá 0 centenas.

Cada uma das placas equivale a 10 barras, contabilizando assim um total de $40 + 4 = 44$ barras ou 44 dezenas (Figura 7).

Figura 7: Equivalência de placas em barras

Dividimos, então, 44 barras em 8 grupos. Cada grupo receberá 5 barras (o que significa 5 dezenas no quociente) e ainda restarão 4 barras, que não conseguimos agrupar (Figura 8).

Figura 8: Divisão de barras

O próximo passo é transformar cada barra restante em 10 cubinhos, ou seja, 4 dezenas (4 barras) equivalem a 40 unidades (40 cubinhos), totalizando 48 unidades (cubinhos) a serem divididas (Figura 9).

Figura 9: Equivalência de barras em cubos

Agora, cada um dos 8 grupos receberá 6 unidades (cubinhos). Desta forma, cada um dos 8 grupos receberá 0 placas, 5 barras e 6 cubinhos, totalizando 56 cubinhos. A correspondência desse resultado no algoritmo está representada na Figura 10.

Figura 10: Resultado da divisão

Fazemos uma ressalva. A simples manipulação ou visualização do material dourado não é suficiente para que os alunos compreendam a relação entre ordens. Há que se ter cuidado com o uso que fazemos dos materiais. Nós professores visualizamos no concreto conceitos que já compreendemos. Os alunos, por sua vez, estão construindo o conceito pelas imagens

ou manipulações, o que pode gerar diferentes interpretações²⁸. Nesse sentido, os diálogos e interações dos professores nas atividades são tão importantes quanto o próprio material em uso²⁹. Destacamos que há autores que defendem a não utilização do material dourado no interior do quadro valor de lugar (QVL), mas sua apresentação desassociada dele. O argumento é que a utilização de 4 barras na coluna das dezenas poderia remeter o aluno à ideia de que os 40 cubinhos ali dispostos (4 barras) devem ser multiplicados por 10 (uma vez que estão na coluna das dezenas), resultando em 400 unidades ao invés de 40³⁰. Nunca vivenciamos tal situação em nossas salas de aula, mas a questão apontada merece atenção.

- **Algoritmo padronizado da divisão com a relação entre ordens**

Uma vez que o aluno estivesse familiarizado com a representação pictórica do Material Dourado, o grupo decidiu avançar para a representação numérica do algoritmo, sem o apelo das imagens. Nesse momento, o importante é sublinhar que a relação entre as ordens deveria se manter presente. A experiência das professoras diz que esse é o coração da compreensão do algoritmo padronizado da divisão: se o aluno compreende a relação entre ordens, não precisa decorar onde coloca zero, onde coloca a vírgula. Assim, evitamos o famoso abaixa o zero e coloca a vírgula, que os alunos usualmente repetem sem entender, o que os leva, por vezes, a resoluções incorretas.

²⁸ Ball (1992).

²⁹ Silveira (2018).

³⁰ Silveira (2018).

C	D	U
4	4	8
40	40	
+4	+8	
44	48	
-40	-48	
4	0	

8		
0	5	6
C	D	U

- **Algoritmo padronizado da divisão sem o destaque da relação entre ordens**

Compreendida a relação entre ordens, poder-se-ia omiti-la da operação na utilização do algoritmo padronizado da divisão.

$$\begin{array}{r}
 448 \overline{) 8} \\
 \underline{-40} \quad 56 \\
 48 \\
 \underline{-48} \\
 0
 \end{array}$$

- **Aproximação regressiva (aproximação por cima)**

A estratégia denominada pelo grupo como aproximação regressiva consiste em fazer operações que contenham aproximações superiores ao valor de 448, como, por exemplo:

$8 \times 60 = 480$. Extrapolamos 448.

Mas $8 \times 4 = 32$, então

$$448 = 480 - 32 = (8 \times 60 - 8 \times 4) = 8 \times (60 - 4) = 8 \times 56$$

Temos então que

$$448 \div 8 = 56.$$

- **Aproximação progressiva (aproximação por baixo)**

Analogamente, podemos realizar operações que contêm aproximações inferiores ao valor de 448 – a aproximação progressiva – como, por exemplo:

$$8 \times 50 = 400.$$

Ainda não chegamos ao número 448.

Mas $8 \times 6 = 48$, então

$$448 = 400 + 48 = (8 \times 50 + 8 \times 6) = 8 \times (50 + 6) = 8 \times 56$$

Temos novamente que |

$$448 \div 8 = 56.$$

- **Decomposição**

Nesse modo, iniciamos com a decomposição do 448 ($400+48$ ou $400+40+8$) e seguimos operando a divisão em cada parcela ($400 \div 8 + 48 \div 8$ ou $400 \div 8 + 40 \div 8 + 8 \div 8$). Ao final, somamos os resultados obtidos ($50 + 6$ ou $50 + 5 + 1$), recompondo o número (56). Duas possíveis decomposições são apresentadas a seguir:

$$448 = 400 + 48.$$

Então

$$\frac{448}{8} = \frac{400}{8} + \frac{48}{8}$$

$$50 + 6 = 56$$

$$448 = 400 + 40 + 8.$$

Então

$$\frac{448}{8} = \frac{400}{8} + \frac{40}{8} + \frac{8}{8}$$

$$=$$

$$= 50 + 5 + 1 = 56$$

- **Método americano**

Utilização de subtrações sucessivas e aproximações, como uma combinação de estratégias anteriores. Por exemplo:

448	<u>8</u>
<u>-80</u>	10
368	20
<u>-160</u>	20
208	<u>+6</u>
<u>-160</u>	56
48	
<u>-48</u>	
0	

Problema 2

As estratégias para o Problema 2 são as mesmas, com a variação dos números. Nesse segundo momento, optamos por não trabalhar novamente com a representação do Material Dourado. Mas, se necessário, a professora estaria preparada para usá-lo e os slides estavam prontos.

- Algoritmo padronizado da divisão com a relação entre ordens.

U_m	C	D	U
9	2	7	0
<hr/>			
	90	20	270
	<u>+2</u>	<u>+7</u>	<u>-270</u>
	92	27	0
	<u>-90</u>		
	2		

<hr/>			
30			
0	3	0	9
<hr/>			
U_m	C	D	U

O grupo previu que os alunos poderiam simplificar os números antes de efetuar a divisão. Como $\frac{9270}{30} = \frac{927}{3}$, basta efetuar a divisão $927 \div 3$.

C	D	U
9	2	7
<hr/>		
9	2	20
<u>-9</u>		<u>+7</u>
0		27
		<u>-27</u>
		0

<hr/>		
3		
3	0	9
<hr/>		
C	D	U

Fazemos uma ressalva: a simplificação de números é possível quando estamos trabalhando com divisões exatas. Se a divisão não fosse exata e quiséssemos analisar o resto da divisão, um cuidado extra deveria ser tomado. Repare nas duas operações a seguir:

$ \begin{array}{r l} 449 & 8 \\ \hline -80 & 10 \\ \hline 369 & 20 \\ -160 & 20 \\ \hline 209 & +6 \\ -160 & 56 \\ \hline 49 & \\ -48 & \\ \hline 1 & \end{array} $	$ \begin{array}{r l} 4490 & 80 \\ \hline -800 & 10 \\ \hline 3690 & 20 \\ -1600 & 20 \\ \hline 2090 & +6 \\ -1600 & 56 \\ \hline 490 & \\ -480 & \\ \hline 10 & \end{array} $
---	---

Ao prosseguir com a operação, certamente encontraremos o mesmo valor para o quociente, uma vez que as frações $\frac{449}{8}$ e $\frac{4490}{80}$ são equivalentes.

$$\frac{449}{8} = \frac{4490}{80} = 56,125.$$

Por que, então, o resto é diferente em cada uma das divisões?

A divisão euclidiana, ou divisão com resto, é uma das quatro operações que toda criança aprende na escola. Sua formulação precisa é: dados a inteiro e b inteiro não nulo, existem q e r inteiros, com $0 \leq r < b \vee$ e $a = bq + r$. Tais q e r estão unicamente determinados e são chamados o quociente e resto da divisão de a por b , respectivamente.

Veja o que acontece quando trocamos 449 por 4490 e 8 por 80:

$$449 = 8 \times 56 + 1$$

Multiplicando por 10 os dois lados da equação, temos:

$$449 \times 10 = (8 \times 56 + 1) \times 10$$

Aplicando a propriedade distributiva do lado direito da equação, temos:

$$4490 = (8 \times 56) \times 10 + 1 \times 10$$

De maneira equivalente:

$$4490 = 80 \times 56 + 10$$

Concluimos que o quociente (56) é o mesmo nos dois casos, mas o resto é diferente (respectivamente 1 e 10). Essa diferença está exatamente relacionada à questão das ordens, que ressaltamos anteriormente.

- **Algoritmo padronizado da divisão**

Novamente, os zeros do divisor e dividendo podem ser (ou não) cancelados, trabalhando com frações equivalentes.

$$\begin{array}{r} 9270 \overline{) 30} \\ \underline{-90} 309 \\ 270 \\ \underline{-270} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 927 \overline{) 3} \\ \underline{-90} 309 \\ 27 \\ \underline{-27} \\ 0 \end{array}$$

- **Aproximação regressiva**

Fazer aproximações por valores superiores a 9270, por exemplo:

$$3 \times 31 = 93. \text{ Então } 30 \times 310 = 9300.$$

Extrapolamos 9270 por 30 unidades.

Logo,

$$9270 = 9300 - 30 = (30 \times 310 - 30) = 30 \times (310 - 1) = 30 \times 309.$$

Temos então que

$$9270 \div 30 = 309.$$

- **Aproximação progressiva**

Fazer aproximações por valores inferiores a 9270.

- **Decomposição**

O aluno decompõe o dividendo 9270 (por exemplo, $9270 = 9000 + 270$) e depois divide cada parcela por 30.

$$3 \times 31 = 93. \text{ Então } 30 \times 310 = 9300.$$

Extrapolamos 9270 por 30 unidades.

Logo,

$$9270 = 9300 - 30 = (30 \times 310 - 30) = 30 \times (310 - 1) = 30 \times 309.$$

Temos então que

$$9270 \div 30 = 309.$$

Também aqui o aluno pode ou não cancelar os zeros do divisor e do dividendo, dividindo ambos por dez, e trabalhando com frações equivalentes.

- **Método americano**

Utilização de subtrações sucessivas e aproximações.

9270	30
<u>-6000</u>	200
3270	100
<u>-3000</u>	<u>+9</u>
270	309
<u>-270</u>	
0	

Problema 3

Para resolver o Problema 3, o aluno precisa extrair da imagem a informação de que a loja possui 14 filiais. A partir daí, basta dividir 15120 por 14 utilizando um dos métodos anteriores.

- Algoritmo padronizado da divisão com a relação entre ordens

D_m	U_m	C	D	U
1	5	1	2	0
<hr/>				
	10	10	110	0
	<u>+5</u>	<u>+1</u>	<u>+2</u>	
	15	11	112	
	<u>-14</u>		<u>-112</u>	
	1		0	

14				
<hr/>				
0	1	0	8	0
D_m	U_m	C	D	U

- Algoritmo padronizado da divisão

$$\begin{array}{r}
 15120 \overline{) 14} \\
 \underline{-14} \\
 112 \\
 \underline{-112} \\
 00
 \end{array}$$

- Aproximações progressiva e regressiva

Por exemplo:

Se fossem 1000 cadernos por loja, teríamos $14 \times 1000 = 14000$.

Faltam 1120 cadernos.

Distribuindo mais 100 cadernos por loja, teríamos

$14 \times 100 = 1400$.

Agora sobrou $1400 - 1120 = 280$ cadernos.

Precisamos retirar 280 cadernos.

Mas $14 \times 20 = 280$.

Então

$1000 + 100 - 20 = 1080$.

- **Método americano**

15120	14
<u>-14000</u>	1000
1120	10
<u>-140</u>	20
980	20
<u>-280</u>	20
700	<u>+10</u>
<u>-280</u>	1080
420	
<u>-280</u>	
140	
<u>-140</u>	
0	

Problema 4

- Algoritmo padronizado da divisão com a relação entre ordens

D _m	U _m	C	D	U	d	c
2	2	4	3	5		
	20	220	2240	1430	350	3500
	+2	+4	+3	+5		-3500
	22	224	2243	1435		0
			-2100	-1400		
			143	35		

700						
0	0	0	3	2	0	5
D _m	U _m	C	D	U	d	c

- Algoritmo padronizado da divisão

22435

700

-2100

1435

-1400

3500

-3500

0

32,05

- **Aproximação progressiva e/ou regressiva**

Por exemplo:

$$30 \times 700 = 21000$$

$$2 \times 700 = 1400$$

Somando os lados das equações, temos

$$(32) \times 700 = 22400.$$

Ainda faltam 35kg para serem distribuídas em 700 sacos.

Se fossem 350kg teríamos a metade de 700, então colocaríamos meio quilo a mais em cada saco.

Como são apenas 35 quilos (que é um décimo de 350) devemos colocar 0,05 quilogramas (que é um décimo de meio quilo) a mais em cada saco.

$$32 + 0,05 = 32,05.$$

GESTÃO DO TEMPO

O grupo de professoras se preocupou com a gestão do tempo de aula, pois seria difícil obter outras oportunidades em meio ao período letivo para abordar a operação de divisão, por esta não integrar o currículo regular do Ensino Médio. As escolas brasileiras prezam pelo cumprimento do conteúdo escolar e de sua respectiva aprendizagem, mas, segundo a experiência das professoras, culturalmente, o primeiro acaba sendo mais valorizado que o segundo. Nesse sentido, as professoras deveriam prever dúvidas/obstáculos que poderiam surgir ou, ainda, discussões sobre determinado problema visando a saná-las no menor tempo possível e evitar prolongamentos desnecessários.

Foi acordado que não seria proveitoso iniciar um novo problema em uma aula e concluí-lo em outra. Por isso, foi decidido

que, caso o tempo restante em uma aula não fosse suficiente para a discussão de um novo problema, a professora proporia alguns exercícios de fixação, nos mesmos moldes dos problemas trabalhados até aquele momento. Esses exercícios seriam uma estratégia para a questão do tempo e, ainda, ajudariam a reforçar as compreensões alcançadas. A fixação de conceitos por meio de exercícios é benéfica sob o ponto de vista da Psicologia Cognitiva³¹ ao defender a automatização e fixação como uma etapa que integra a aprendizagem. Contudo, não se está defendendo aqui ensino por memorizações desligadas de significado, mas sim a fixação como um componente do processo de aprendizagem.

Para esse fim, as professoras planejaram propor a divisão $132 \div 6$ com a utilização das imagens do Material Dourado, recorrendo novamente a um recurso visual para alcançar a compreensão dos alunos. Se o tempo fosse insuficiente, o exercício seria oferecido na avaliação após a aula. As imagens da Figura 11 seriam discutidas com a turma, na mesma perspectiva do **Problema 1**.

³¹ Kandel (2009).

Figura 11: A divisão explicada com o Material Dourado.

Após recorrer às imagens, a professora proporia as operações de divisão abaixo ($212 \div 4$ e $434 \div 4$), que trazem números naturais no dividendo e no divisor e quociente sem zeros, ou seja, operações que encerram a mesma essência trabalhada no **Problema 1**, até que o tempo de aula se esgotasse.

1) $212 \div 4$

2) $434 \div 4$

Do mesmo modo e pela mesma razão, as professoras planejaram divisões como meio de fixação do conteúdo trabalhado em cada problema. Para o **Problema 2**, as operações abaixo exercitariam dividendo e divisor com o algarismo das unidades igual a zero e também apresentam quociente contendo um algarismo zero:

1) $8320 \div 40$

2) $6120 \div 60$

Para exercício do conteúdo do **Problema 3**, duas divisões que continham zero no algarismo das unidades do dividendo e dois zeros, não sequenciais, no quociente:

1) $33120 \div 16$

2) $53170 \div 13$

Para o **Problema 4**, as divisões que seriam propostas trariam o divisor contendo dois algarismos zero, nas ordens das dezenas e das unidades, e quociente não inteiro, contendo zero logo após a vírgula, ou seja, na ordem dos décimos.

1) $8515 \div 500$

2) $13524 \div 300$

O planejamento também previu possíveis erros dos alunos, bem como perguntas que esses pudessem apresentar. Além dis-

so, pensamos em possibilidades para a professora conduzir a turma por meio de questionamentos, como veremos a seguir.

POSSIBILIDADES DE ERROS E QUESTIONAMENTOS DOS/ PARA OS ALUNOS

A professora deve evitar constranger os alunos, especialmente nos momentos em que é pedido que eles exponham publicamente as soluções encontradas. O objetivo do ensino de matemática (assim como de qualquer disciplina) não é formatar os alunos em procedimentos únicos e padronizados, e sim estimular a criatividade, a produção de novos saberes, a criação de estratégias e soluções originais – e nada disso pode ser atingido sem o fortalecimento da autoestima dos aprendizes. Por isso, os alunos devem ser sempre estimulados a apresentar e discutir suas ideias e as soluções que encontraram. Nesse momento, o fato dessas ideias estarem formalmente “certas” ou “erradas” tem pouca ou nenhuma importância, pois o objetivo é estimular o pensamento e não atingir o certo de imediato³².

O texto é o primeiro contato do aluno com o problema ou problemática e este deve ser bem entendido³³, pois, do contrário, pode comprometer os desdobramentos para os objetivos da aula. Para isso, a professora solicitaria que os alunos explicassem os textos dos problemas com suas palavras. Assim, os alunos deveriam, principalmente, demonstrar entendimento sobre os dados do problema e o que nele se pede.

³² Contribuição do Professor Victor Giraldo, membro do comitê científico desta série, com a qual concordamos e que está em sintonia com o *Lesson Study*.

³³ Souza e Guimarães (2015); Polya(1978).

Ao pensar nos possíveis erros e questionamentos dos alunos, as professoras decidiram propor algumas intervenções que poderiam ser realizadas antes e/ou durante o processo de resolução. Essas intervenções seriam especialmente utilizadas quando da visita que elas fizessem aos grupos, por essas minimizarem a possibilidade de exposição dos alunos diante de seus erros, dúvidas ou equívocos. Essas intervenções poderiam ser aplicadas por meio de questionamentos, como, por exemplo:

- Explica para mim como vocês fizeram isso?
- Por que vocês colocaram esse algarismo aqui?

Esses questionamentos também poderiam ser formulados durante o *neriage*, para que os alunos pudessem se expressar e explicar o raciocínio utilizado em cada resolução. Isso os ajudaria a criar significado para um processo (nesse caso, o algoritmo padronizado da divisão ou o método que os alunos escolhessem) que fora memorizado sem sentido. E isso pois, quando o aluno tem o primeiro contato com o conteúdo de divisão, ele precisa conhecer a relação entre as ordens e o significado do zero e da vírgula no sistema posicional decimal.

Durante a resolução em grupos e a exposição das soluções para toda a turma, o esforço e a tentativa dos alunos deveriam ser sempre valorizados, mesmo que eles apresentassem soluções erradas. Frases como “foi uma boa tentativa” e “vocês tiveram um bom raciocínio” serviriam de incentivo aos alunos e deveriam ser usadas.

Em consonância com o *Lesson Study*, várias estratégias de resolução para um mesmo problema são recomendadas³⁴. Como isso não é usual no ensino brasileiro, pensamos que algum aluno poderia questionar a necessidade de todas essas estratégias

³⁴ Polya (1978); Fernandez, Yoshida (2004).

serem trabalhadas em aula e achar mais fácil tentar entender apenas uma delas. As professoras defendem que determinado método poder ser mais simples para alguns alunos do que para outros. Mostrar-lhes as várias possibilidades de resolução de um problema pode ajudá-los a ampliar seus modos de pensar matematicamente e incentivar a usá-los em outras situações-problemas da Matemática. Isso permite, inclusive, que os alunos elejam as estratégias que lhes sejam mais familiares. Teoricamente, a diversidade de pensamentos se deve ao fato de as pessoas terem diferentes representações mentais para uma mesma situação³⁵.

Uma vez definida as diretrizes gerais da aula, passaremos a discussão específica de cada um dos problemas.

Problema 1

Para estimular a compreensão do texto do Problema 1, foram planejados os seguintes questionamentos:

- O que está sendo vendido?
- Quantos celulares serão comprados?
- Quantas parcelas serão feitas?
- Quanto custa o celular?

Um possível equívoco poderia ocorrer com os zeros depois da vírgula no número 448,00. Para esse esclarecimento, as professoras previram o seguinte questionamento:

- Qual é o papel da vírgula no número 448,00?

³⁵ Souza (2012).

Sem a compreensão de que a vírgula indica separação entre a parte inteira e a parte não inteira e que escrever 448,00 é equivalente a escrever 448, imaginou-se que alguns alunos, mantendo esses zeros, poderiam associar 448,00 a 44800 e apresentar como resposta o número 5600 ao invés de 56,00, esquecendo a vírgula e a relação entre parte inteira e parte não inteira.

Uma sugestão, nesse caso, é pedir ao aluno que leia sua resposta em voz alta. As professoras pensaram que alguns deles escreveriam 5600, mas leriam 56, o que permitiria perceber se tratar de um erro de escrita do número ou de compreensão da operação. De todo modo, é importante enfatizar para eles como a presença da vírgula muda completamente o valor.

Houve preocupação, ainda, com o fato de que muitos alunos poderiam não se atentar para o absurdo de se dividir 448 por 8 e obter como resposta o número 5600. É necessário enfatizar que, em uma divisão por um número natural, não podemos obter como resposta um valor superior à quantidade inicial a dividir. As estimativas são importantes e muito pouco exploradas na educação básica. Questionamentos como “Se o dividendo é da ordem de 400, e o divisor é 8, quanto deve ser, aproximadamente o quociente?” poderiam ser utilizados.

É importante ressaltar que a discussão deve ir além disso e abordar estimativas, cujo tema é muito importante mas pouco explorado na educação básica. Aqui os questionamentos devem explorar perguntas, tal como: “Se o dividendo é da ordem de 400, e o divisor é 8, que tamanho deve ser, aproximadamente, o quociente?”

Durante a exposição das soluções dos grupos, mesmo com o acerto da solução, alguns questionamentos podem ajudar a atribuir mais significado para o algoritmo padronizado da divisão:

- Por que vocês começaram dividindo o 44 e não o 4?

- Por que você colocou esse 5 aqui no quociente?
- Por que o resto é zero?
- Por que não é 8 ou 6 no quociente, por exemplo, no lugar do 5?

A professora Maria Alice destacou que questionamentos como esse último podem ser muito produtivos, pois “a gente vai sempre pelo que é, mas nunca pelo que não é e o que não é pode ser muito estimulador”.

Caso algum aluno apresentasse a decomposição $448=400+40+8$, ou mesmo se ela só fosse apresentada pela professora, questionamentos como os seguintes poderiam ser realizados, tanto partindo dos alunos quanto para os alunos:

- Porque você fez a decomposição dessa maneira?
- Só existe essa maneira de decompor um número?

Seria importante mostrar para os alunos que, ao fazer esse tipo de decomposição, eles estariam usando, via estimativa, a mesma relação de ordens utilizada no algoritmo padronizado da divisão. Outras decomposições poderiam ser feitas como, por exemplo, $448=400+48$.

Os alunos deveriam ser desafiados a sempre pensarem nas semelhanças entre os métodos. Ao expor suas estratégias, dever-se-ia questioná-los:

- Isso é diferente do que fizemos antes?
- Em que sentido isso é diferente?
- Em que sentido isso se assemelha ao método anterior?

Uma das professoras destacou: “Na verdade, quando o aluno faz a conta por estimativa, por exemplo, 50×8 é 400, isso não é diferente do $5 \times 8 = 40$. É a mesma coisa, é a mesma conta, com uma mudança de ordem: esse $5 \times 8 = 40$ que aparece aqui (no algo-

ritmo) é esse 50×8 que aparece na estimativa. Quando a pessoa usa o algoritmo, o que ele vai fazer: $44 \div 8$. Observe como não deixa de ser uma estimativa: 6×8 é 48... passou; 5×8 é 40... ah... então é 5. Isso é estimativa!”.

Problema 2

Para ajudar a compreensão do texto, seria válido questionar:

- São quantos alunos no total?
- Quantos alunos devemos alocar em cada turma?

As professoras imaginaram que a palavra ‘alocar’ poderia gerar dúvidas, mas uma rápida conexão com a palavra colocar resolveria a questão. Cogitaram, então, a possibilidade de os alunos simplificarem os zeros sem compreenderem o motivo, efetuando a divisão de 972 por 30.

Assim, alguns questionamentos que poderiam ser feitos a fim de esclarecer a simplificação realizada seriam:

- Porque você simplificou os zeros?
- E se fosse $9207 \div 30$, poderíamos simplificar os zeros também?
- E se o último dígito do dividendo e do divisor fosse 8, eu poderia simplificar esse algarismo também?

Destacamos aqui a importância de esclarecer para os alunos que cancelar os zeros que aparecem no final do dividendo e do divisor é permitido, pois os dois números são divisíveis por 10. Ao fazer isso estamos, na realidade, dividindo os dois números por 10. As duas divisões, com ou sem zero, apresentam a mesma solução. Mas há que ser ter cuidado: quando a divisão não for exata, apenas os quocientes serão iguais, não os restos.

De fato, se após o cancelamento dos zeros a divisão do dividendo D pelo divisor d resulta em um quociente q e resto r , a divisão original de $10 \times D$ por $10 \times d$ resulta em mesmo quociente, mas resto dez vezes maior:

$$D = d \times q + r \rightarrow 10 \times D = 10 \times (d \times q + r) \rightarrow 10 \times D = 10 \times d \times q + 10 \times r$$

Os alunos precisariam compreender que os zeros não seriam cancelados por se tratarem de algarismos iguais no final do dividendo e do divisor, ou seja, o cancelamento se deve ao fato de dividendo e divisor serem múltiplos de 10. Da mesma maneira, não poderíamos cancelar o zero do dividendo que se encontrasse na ordem das dezenas com o zero da ordem das unidades no divisor, no caso da divisão de 9207 por 30, pois apenas o divisor seria múltiplo de 10.

Outra dúvida que poderia surgir:

- Só é possível dividir dividendo e divisor por 10 para fazer a simplificação na conta?

É importante perceber que podemos dividir tanto o dividendo quanto o divisor por um mesmo número não nulo, qualquer que seja esse número (o que equivale a dizer que eles são divisíveis pelo valor escolhido). A divisão após a simplificação ainda será equivalente à primeira e ambas apresentarão o mesmo quociente, mas não o mesmo resto, como vimos.

Outras duas possíveis respostas incorretas dos alunos seriam 39 e 390, pela compreensão insuficiente da relação entre as ordens e, conseqüentemente, do posicionamento do zero no quociente. A dúvida na relação entre as ordens poderia persistir, mesmo depois da discussão do **Problema 1**. Algum estudante poderia apresentar a seguinte divisão, após fazer a simplificação dos zeros (ou equivalente, caso optasse por dividir 9270

por 30):

$$\begin{array}{r} 927 \quad | \quad 3 \\ 27 \quad 39 \\ 0 \end{array}$$

Ao dividir 9 por 3, obter-se-ia 3 no quociente e, em seguida, ao verificarem a impossibilidade de dividir o algarismo 2, das centenas, por 3, os alunos poderiam ignorar a necessidade de apresentar o resultado zero na ordem das centenas no quociente. Poderiam, então, passar para a divisão de 27 por 3, obtendo 9 no quociente e chegando à resposta final 39.

Alguns alunos, talvez por considerarem o número 39 muito pequeno para ser solução do problema apresentado, acrescentariam um zero, obtendo o valor 390, de modo a tentar ajustar a resposta ao problema.

Cogitou-se, ainda, que algum aluno poderia apresentar 3090 como resposta, através da divisão:

$$\begin{array}{r} 9270 \quad | \quad 30 \\ 270 \quad 3090 \\ 0 \end{array}$$

Ele poderia acreditar que, se o dividendo e o divisor terminam em zero, o quociente também deveria terminar. A divisão seria feita corretamente, mas um zero seria acrescentado de maneira equivocada no quociente.

Problema 3

O terceiro problema propunha a divisão $15120 \div 14$, mas pelo fato do divisor 14 não aparecer no enunciado e sim na imagem, esse entendimento deveria ser verificado por meio de questionamentos, como por exemplo:

- Quantos cadernos serão distribuídos?
- São quantas lojas?

Depois de os alunos perceberem que teriam que proceder uma divisão, seria válido perguntar:

- Eu posso simplificar um algarismo inicial 1 do dividendo com o 1 inicial do divisor?
- E se os dois números terminassem em 1, eu poderia simplificá-los?

Assim reforçaríamos que a simplificação é feita através da divisão do dividendo e do divisor por um mesmo valor e não simplesmente pela eliminação de algarismos iguais, como foi destacado no segundo problema. Ou seja, estamos trabalhando com um divisor comum entre os dois números.

O número 18 foi uma das possíveis respostas erradas previstas, caso um aluno não se atentasse para a questão das ordens e, conseqüentemente, para a existência dos zeros no quociente.

$$\begin{array}{r} 15120 \quad | \quad 14 \\ 112 \quad 18 \\ 00 \end{array}$$

Alguns questionamentos poderiam chamar a atenção dos grupos para esse erro:

- Se tenho mais de 15000 cadernos, faz sentido cada uma das 14 lojas receber 18 cadernos?
- Se fossem 10 lojas, por exemplo, cada uma recebendo 18 cadernos, 10×18 chegaria perto de 15000 cadernos?

É importante trabalhar as estimativas e a análise crítica da resposta do problema. Assim, algumas soluções erradas podem ser descartadas ao se fazer esse tipo de questionamento, verificando assim que alguns valores não são compatíveis com a solução esperada para o problema.

Acreditamos que alguns alunos não se atentariam para a existência do zero das centenas na resposta correta 1080, mas conseguiriam compreender a necessidade de colocar zero na ordem das unidades, apresentando a resposta 180.

Observamos, ainda, que alguns alunos podem achar as respostas anteriores, 18 e 180, muito pequenas e acrescentar zeros para chegar a um número mais plausível e obtendo, assim, a resposta 1800. Isso demonstraria criticidade em relação à resposta, embora desconhecimento do procedimento para efetuar a divisão.

Problema 4

Para garantir a compreensão do Problema 4, sugerimos alguns questionamentos aos alunos:

- O que a distribuidora quer fazer?
- De quantos sacos a distribuidora dispõe?
- Quantos quilogramas serão distribuídos nos sacos?
- Podemos colocar quantidades diferentes de café em cada saco?

Acreditamos que alguns alunos também poderiam trazer perguntas como:

- Como assim “medida”? O que é medida?

Dessa forma, precisaríamos esclarecer que o problema questiona a quantidade de café em cada saco.

Durante as exposições das soluções pelos alunos, consideramos importante fazer alguns questionamentos quanto à existência da vírgula no quociente, como por exemplo:

- Por que vocês colocaram a vírgula nesse local?

É necessário que todos se apropriem da ideia de que a vírgula é utilizada para separar a parte inteira da parte não inteira e que, portanto, não pode ser colocada de maneira arbitrária no quociente.

Apesar de acreditarmos ser pouco provável o questionamento a seguir, algum aluno ainda poderia fazê-lo:

- O que é um número inteiro e o que é um número não inteiro?

Os alunos precisariam compreender que se trata de uma organização de ordens dos números no sistema de numeração decimal. Se estivermos falando de dinheiro, por exemplo, a parte não inteira é relativa aos centavos.

Um possível erro nessa questão seria a resposta 32,5. Isso indicaria que o aluno não levaria em consideração o zero do quociente, apesar de se atentar para as partes inteira e não inteira. Alguns alunos poderiam desconsiderar a parte não inteira, apresentando como resposta o número 32, daí esta pergunta poderia ser apresentada:

- Alguma quantidade de café pode não ser ensacada?

Esse questionamento poderia ser útil para ‘forçar’ o aluno a passar da parte inteira para a parte não inteira do quociente, não deixando resto na divisão.

AVALIAÇÃO

Uma das preocupações do grupo de professoras era o de avaliar o progresso dos alunos. Definiram, então, que seriam aplicados 3 problemas como teste diagnóstico (um teste que acontece no início do ano letivo), os quais deveriam conter as mesmas ideias que seriam trabalhadas durante as aulas. Os mesmos problemas seriam aplicados após as aulas, como pós-teste, o qual aconteceria mais de um mês depois da realização da aula.

Para a realização deste teste diagnóstico escolhemos problemas já experimentados em outras ocasiões³⁶, cujos textos são os seguintes:

1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R\$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explícite seus cálculos.

2) Tia Josefina morreu e deixou uma herança no valor de R\$ 14.210,00 para os seus sete sobrinhos. Sabendo que cada sobrinho receberá o mesmo valor, quanto cada um ganhará? Explícite seus cálculos.

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R\$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explícite seus cálculos.

³⁶ Leite, Prane e Kuster (2012).

Os dois primeiros problemas tratam da divisão de números naturais com quociente inteiro e resto zero, sendo que: o primeiro traz apenas um zero no quociente e tem a situação bastante semelhante àquela trabalhada em aula; e o segundo traz dois zeros no quociente. Já o último problema apresenta a divisão de um número natural por outro com três dígitos. Porém, em todos exploram-se os dígitos finais iguais a zero e a vírgula no quociente.

SIMULAÇÃO DA AULA: O ESTUDO PILOTO

O planejamento foi finalizado com uma aula piloto que oportunizou ajustes no plano de aula (Figura 12) para que a mesma atingisse os objetivos desejados³⁷. Nesse momento, foi decidido o uso de Material Dourado. A simulação de aula também foi importante para discutir e melhorar alguns pontos do planejamento, por exemplo: Como abordar soluções que os alunos não usaram? Como abordar a semelhança entre estratégias? Como trabalhar o erro dos alunos?

Por uma questão didática e para facilitar o entendimento do leitor, a discussão do Material Dourado e as respostas a essas questões foram discutidas na seção anterior. Apenas destacamos que sua necessidade surgiu na simulação de aula.

³⁷ Isoda (2010).

Figura 12: Simulação da aula.

Concluído o planejamento, estávamos prontas para a execução da aula.

Outra questão importante percebida nesse momento era a necessidade de a professora dar tempo para que os alunos respondessem aos seus próprios questionamentos, ao invés de ela perguntar e ela mesma responder.

O PLANO DA AULA

Apresentamos nessa seção um recorte do Plano de Aula elaborado colaborativamente durante o planejamento pelo grupo de professoras na seção anterior.

Desde já, alertamos que fizemos constar nesta seção apenas as ideias básicas do Plano de Aula e da forma como a aula foi conduzida em relação ao **Problema 1**. Reservamos para capítulos posteriores do **Dividir e compartilhar** o detalhamento dos demais problemas que foram usados nas aulas e suas resoluções, buscando evitar repetições que tornariam a leitura cansativa e com idas e vindas desnecessárias ao texto.

PLANO DE AULA SOBRE DIVISÃO

INFORMAÇÕES GERAIS

- Professores participantes: 2 professoras da UFES, 2 do Ifes e 2 da Rede Estadual de Educação do ES.
- Local dos encontros para o planejamento da aula: Centro

de Referência em Formação e em Educação a Distância – Cefor/Ifes.

- Escola para execução da aula: EEEM Professor Fernando Duarte Rabelo.
- Ano escolar: 1º ano do Ensino Médio.
- Quantidade de encontros para a construção do Plano de Aula: 3 encontros presenciais de 3 horas, nas datas 05/01, 23/01 e 02/03/2017, e muitas interações a distância realizadas por meio de aplicativos de mensagens.
- Quantidade esperada de alunos: 36.
- Duração esperada das aulas: 220 minutos.
- Data da execução das aulas: 07 e 08 de março de 2017
- Tempo de aulas: 2 aulas geminadas no dia 07/03 (duração de 110 minutos) e 2 aulas geminadas no dia 08/03 (duração de 110 minutos).
- Local para reunião de reflexão sobre a aula executada (logo após a aula): na mesma sala de aula da escola EEEM Professor Fernando Duarte Rabelo.

OBJETIVOS DA AULA

- Efetuar operações de divisão entre números naturais, com resto nulo e diferentes elementos: números naturais no dividendo e no divisor e ausência de zero no quociente; um zero no quociente; dois zeros não sequenciais no quociente; um número não inteiro no quociente, com a vírgula seguida de um zero, ou seja, o algarismo da ordem dos décimos seria o zero.
- Conhecer diferentes estratégias para operar a divisão: algoritmo padronizado da divisão, ensinado tradicionalmente nas escolas, aproximação regressiva, aproximação progressiva, decomposição e método americano.

O QUE OS ALUNOS DEVEM SABER PARA OPERAR DIVISÃO

- Soma, subtração e multiplicação;
- Ordens decimais.

PROBLEMAS PARA A AULA

Problema 1

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção:

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Problema 2

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas, deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

Problema 3

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papeleria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas, sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

Problema 4

A distribuidora de produtos alimentícios América precisa transportar 22435 quilogramas de café que estão em seus galpões. Há apenas 700 sacos no estoque. Você deve fiscalizar o ensacamento dessa distribuidora, garantindo que os sacos recebam a mesma medida de café. Qual é essa medida?

MATERIAL

Para a aula, serão utilizados os seguintes materiais: Folhas com problemas impressos, lousa grande (para projeção do Material Dourado e *bansho*) e pincéis para a lousa.

O Material Dourado reproduzido em projetor foi eleito como favorecedor da compreensão das ordens decimais necessárias para o desenvolvimento da aula. A reprodução em projetor foi um meio alternativo para a ausência de materiais concretos naquela escola. Poderíamos propor a construção, pelos alunos, desse ou de algum material equivalente, mas consideramos que a construção seria “infantil demais”.

PREPARATIVOS PARA A AULA

- Providenciar a autorização dos responsáveis pelos alunos para o registro da aula em vídeo³⁸;
- Providenciar a utorização da diretora da EEEM Professor Fernando Duarte Rabelo;
- Reservar uma sala de aula com lousa grande e espaço suficiente para acomodar alunos reunidos em grupos e os professores-observadores;
- Imprimir os quatro problemas, cada um em uma folha em uma folha, para os alunos;
- Estudar a aula planejada.

PROPOSTA DE AULA

- **Professora:** Hoje nós buscaremos soluções para algumas situações que qualquer um de nós poderia viver. A aula de hoje faz parte de uma pesquisa que será usada na produção da minha dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Espírito Santo. A participação de vocês é muito importante e, desde já, agradeço. Nosso objetivo é que possamos, juntos, observar a existência de mais de um modo de resolver uma mesma situação e que esses modos sejam aprendidos por vocês.
- **Possível reação dos alunos:** Quem são essas pessoas? [alunos se referindo às professoras-observadoras].
- **Professora:** São professoras que irão nos acompanhar. Já irei apresentá-las.
- **Possível reação dos alunos:** Isso vai valer nota?

³⁸ Os alunos que não apresentarem autorização dos responsáveis assistirão aula com outro professor naquele horário.

- **Professora:** Sim. Valerá 1 ponto de participação.

[Professora apresenta as professoras-observadoras aos alunos]

[Professora organiza a turma em grupos de 4 alunos (3 min); os alunos poderão escolher os membros de cada grupo; professora deve observar se algum aluno estará excluído dos demais e, cuidadosamente, inseri-lo em um dos grupos.]

[Professora entrega uma folha com o **Problema 1** aos alunos (2 min). Cada um dos outros problemas somente será proposto quando o anterior já estiver totalmente concluído pelos alunos.]

[A professora solicita que cada aluno leia individualmente o **Problema 1** (3min); em seguida, a professora solicita que um aluno faça a leitura em voz alta para a turma e verificará se os estudantes compreenderam o problema mediante alguns questionamentos (5min)].

- **Professora:** Alguém poderia explicar com as próprias palavras o problema?
- **Possível reação dos alunos:** [ficarem em silêncio ou repetirem o que o problema diz.]

[A professora deve estimulá-los com questionamentos que os levem a pensar no problema].

- **Professora:** O que está sendo vendido? Quantos celulares serão comprados? Quantas parcelas serão feitas? Quanto custa o celular?
- **Possível reação dos alunos:** O que é “compra a prazo”?
- **Professora:** É uma compra em que você não paga na hora em que pega o produto. A cada mês você paga uma parte do valor do produto. Geralmente as parcelas têm o mesmo valor.

[Após a professora se certificar de que os alunos compreenderam os dados do problema e não apresentam dúvidas quanto

ao texto e ao contexto, ela solicita que os alunos resolvam o **Problema 1**, discutindo-o com os colegas do grupo. A professora deve, ainda, solicitar que os alunos registrem à caneta seus raciocínios na folha que lhes foi entregue, para que o registro de suas estratégias não seja apagado, valorizando o processo de construção e não apenas a solução (10min).]

[A professora deve observar a turma durante o processo de construção de suas estratégias, caminhando entre os grupos e questionando-os. Deve, igualmente, verificar se o tempo de 10min é suficiente ou se deve ampliá-lo.]

- **Professora:** Como você descreveria, passo a passo, a(s) solução(ões) encontrada(s) pelo seu grupo?
- **Possíveis estratégias apresentadas pelos alunos:**
 - Algoritmo padronizado da divisão: valores posicionais de cada algarismo de 448 e a construção do quociente por meio das ordens decimais.
 - Aproximação regressiva: aproximações superiores ao valor de 448.
 - Aproximação progressiva: aproximações inferiores ao valor de 448.
 - Decomposição: decomposição do valor de 448.
 - Método americano: subtrações sucessivas e aproximações.

[Durante a visita aos grupos, a professora deve verificar as diferentes estratégias, possíveis dúvidas e obstáculos pelos alunos. Essa ação subsidiará a condução da aula em meio ao *neriage* e outros momentos.]

[Em seguida, a professora solicita que um representante de cada grupo vá à lousa para apresentar, registrar e discutir com a turma seus modos de resolver o **Problema 1**. Caso algum grupo não queira realizar essa ação, a professora deve apresentar o(s) modo(s) eleito(s) por esse grupo tomando para si a autoria, pois

se esse(s) for(em) equivocado(s) ela estará evitando constrangimentos daqueles alunos frente à turma e, ao mesmo tempo, não deixará de trazer ao primeiro plano as dúvidas/equívocos ali gerados, tendo em vista o enriquecimento do pensamento matemático de todos.]

[A professora deve garantir que os registros dos grupos sejam mantidos na lousa por toda a aula. Além disso, ela deve conectar as estratégias dos alunos e propor as que não tenham sido vislumbradas por eles, mas planejadas pelas professoras como uma ampliação dos modos de pensar a mesma ação.]

- **Possibilidade de dúvidas dos alunos:** uso dos zeros da parte não inteira do 448,00, como unidade e dezena do dividendo (44.800).
- **Condução pela professora:** Qual é o papel da vírgula no número 448,00?

[A professora deve promover análise e discussão com os alunos dos erros/obstáculos matemáticos encontrados, sem constrangê-los.]

[Após esgotadas as discussões do **Problema 1**, os alunos receberão o **Problema 2** e a professora irá conduzi-los do mesmo modo como no **Problema 1**].

AVALIAÇÃO

[Será realizado um diagnóstico anterior à aplicação do Plano de Aula visando à identificação de estratégias dos principais obstáculos quando da operacionalização da divisão, uma vez que a professora já havia detectado que os alunos dominavam esse conceito.]

Problemas usados para o diagnóstico das estratégias³⁹:

1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R\$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explícite seus cálculos.

2) Tia Josefina morreu e deixou uma herança no valor de R\$ 14.210,00 para os seus sete sobrinhos. Sabendo que cada sobrinho receberá o mesmo valor, quanto cada um ganhará? Explícite seus cálculos.

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R\$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explícite seus cálculos.

[A avaliação da produção de conhecimentos dos alunos será realizada ao longo da aula com a apresentação e discussão de estratégias, dúvidas, equívocos e sínteses dos discentes. Ademais, após a aplicação da aula, buscar-se-á conhecer os progressos individuais dos alunos por meio de uma avaliação escrita com os mesmos problemas do diagnóstico.]

³⁹ Leite, Prane e Kuster (2012).

A AULA

No início da aula, os alunos foram organizados em grupos e, após a entrega do Problema 1(Figura 13), a professora solicitou-lhes que fizessem a leitura individualmente.

Figura 13: Problema 1.

Problema 1

Você quer comprar um celular novo e decidiu pesquisar alguns preços na internet. A propaganda abaixo te chamou atenção:

Você tem pouco dinheiro e decidiu comprar a prazo. Qual será o valor de cada parcela que você pagará?

Uma aluna interrompeu o fluxo de leitura e perguntou:

Aluna Professora, o que é comprar a prazo?

Núbia É quando você faz uma compra e divide em parcelas.
Vai comprar para pagar depois. Isso é compra a prazo.

Esse era um questionamento previsto no planejamento. Na sequência, a professora solicitou que algum aluno lesse o **Problema 1** em voz alta. Na etapa de compreensão, indagou se alguém conseguiria explicar o que estava sendo solicitado.

Aluna O valor de 448 [eu] dividido em 8 parcelas...

Núbia O que está sendo vendido?

Aluna Celular.

Núbia Quanto custa o celular?

Aluna R\$448,00.

Núbia Ele custa R\$448,00 e vai ser comprado a prazo. Em quantas parcelas?

Aluna 8.

Núbia Então o preço do celular é R\$448,00. Esse preço você vai parcelar em quantas prestações?

Aluna 8.

Núbia Todo mundo entendeu isso?

Os alunos afirmaram que entenderam e a professora questionou se alguém tinha alguma outra pergunta, mas os alunos negaram.

Verificando que não havia dúvida na compreensão da atividade, a professora solicitou que os alunos tentassem resolvê-lo individualmente e depois discutissem nos grupos. Entretanto, no decorrer do tempo destinado para as soluções em grupo, os alunos chamaram a professora várias vezes para sanar dúvidas

sobre o que deveria ser feito mostrando que, na verdade, eles não compreenderam o enunciado como tinham afirmado. A professora poderia ter captado o não entendimento dos alunos e visto se a pergunta não estava muito ampla (todo mundo entendeu isso?). Esse tipo de questionamento é comum em salas de aula, mas se trata de uma pergunta ampla e que não verifica o que se propõe.

Depois que os alunos discutiram o problema em grupo, a professora solicitou que alguns alunos fossem à lousa apresentar a sua resolução.

Aluna A gente fez 448 dividido por 8. Quatro não dá para dividir por 8, aí a gente pegou 44 dividido por 8. Que número vezes 8 é que chega mais próximo a 44? A gente chegou à conclusão que é 5. Aí para 44, faltaram 4. Abaixamos o 8. Que número vezes 8 chega mais próximo de 48? Aí a gente colocou 6 aqui e não sobra nada.

Após a explicação das alunas, a professora fez alguns questionamentos com o objetivo de perceber se compreendiam o valor posicional do 4 e do 44.

Núbia Por que a escolha do 44?

Aluna Porque não dava para dividir.

Núbia Então você simplesmente junta os outros dois?

As alunas repetiram a mesma explicação feita acima. A professora então questionou:

Núbia Por que você *abaixou* esse 8?

Aluna Eu precisava juntar para somar.

Núbia Precisamos juntar o 4 [dezena] com o 8 [unidade] para dividir?

Aluna Isso aí.

Veja que a professora, de início, não integrou a turma como um todo nas discussões, restringindo-se aos alunos na lousa. Logo após, fez as mesmas indagações, agora para a turma, com o intuito de verificar se havia outras explicações.

Núbia Podemos juntar esse 4 [dezena] com esse 8 [unidade]?

Aluna 1 Porque sobrou.

Aluna 2 Porque tinha que descer.

Núbia percebeu que os alunos não sabiam justificar as etapas da divisão, limitando-se a responder sobrou e descer. A professora retomou as relações de ordens (unidade, dezena, centena) que havia iniciado em uma aula anterior usando imagens do Material Dourado (Figura 14)⁴⁰. Ao apresentar o slide abaixo, reforçou estas relações entre as ordens, o que foi importante para familiarizá-los com os agrupamentos.

Figura 14: Imagem da divisão com Material Dourado.

⁴⁰ Foi planejada uma revisão sobre a relação entre ordens e valores posicionais em aula anterior, de modo a otimizar o tempo.

Nos encontros de planejamento, as professoras avaliaram importante que os alunos compreendessem a construção do quociente por meio dos valores posicionais, por isso a primeira maneira de explicar o algoritmo foi utilizando imagens do Material Dourado.

É comum, nas salas de aula, explicações do tipo “quatro não divide oito”. Ressaltamos que há que se ter cuidado com tal afirmação, pois a divisão de 4 por 8 é, sim, possível e o resultado é 0,5. A atenção aqui deve estar centrada nas ordens do sistema de numeração posicional.

A professora chamou a atenção dos alunos para o fato de a divisão exigir que as 4 centenas fossem divididas igualmente entre os 8 grupos (as 8 parcelas da compra a prazo). Cada grupo receberia 0 centenas e deveríamos reagrupar 4 centenas para 40 dezenas. Assim, dividiríamos 40 dezenas em 8 grupos.

Agrupando com as 4 dezenas originais do número 448, ficamos com um total de 44 dezenas, sendo, agora, possível a distribuição igualitária de dezenas entre os 8 grupos (Figura 15a). Como nenhum dos 8 grupos recebeu centenas, inseriu-se o zero na ordem das centenas do quociente (Figura 15b).

Figura 15: Slides com o reagrupamento de centenas em dezenas.

Ao dividir as 44 dezenas por 8 grupos, cada um recebeu 5 dezenas e sobraram 4 dezenas (Figura 16).

Figura 16: Slide com a divisão de dezenas.

A professora destacou que é necessário reagrupar as dezenas, como fizemos com as centenas. Dessa forma, as quatro dezenas foram reagrupadas em 40 unidades, resultando um total de 48 unidades (Figura 17).

Figura 17: Slide com o reagrupamento de unidades.

Após finalizar a explicação, a professora perguntou aos alunos se agora saberiam explicar as razões de se “juntar esse 4 com esse 8”, pergunta feita anteriormente por ela aos alunos. Apenas um aluno se manifestou, repetindo a explicação da professora.

No planejamento, as professoras avaliaram importante neste momento inserir o zero no quociente, mesmo que um

zero à esquerda não faça diferença no número ($48 = 048$). A ideia é de que os alunos começassem a compreender o significado posicional do zero no quociente, questão que apresentam muita dificuldade⁴¹. A atribuição de significado deve ser priorizada em relação à memorização de regras.

Ao perceber que todos os grupos haviam resolvido o problema da mesma maneira, a professora buscou relacionar a estratégia apresentada pelas alunas com o correspondente no Material Dourado e algoritmo padronizado da divisão detalhado (Figura 18).

Figura 18: Justificativa do Algoritmo padronizado da divisão.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{c|c|c}
 C & D & U \\
 \hline
 4 & 4 & 8 \\
 \hline
 & 40 & \\
 + & 4 & \\
 \hline
 & 44 & \\
 - & 40 & \\
 \hline
 & 4 & \\
 \hline
 & 4 &
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c|c|c}
 & 40 & \\
 + & 8 & \\
 \hline
 & 48 & \\
 - & 48 & \\
 \hline
 & 0 &
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 \begin{array}{c|c|c}
 C & D & U \\
 \hline
 0 & 5 & 6 \\
 \hline
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 8 \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array}$$

Percebemos um engajamento dos alunos quando a professora os questionava:

Núbia Se tenho 4 centenas e quero dividir para 8 grupos, quantas centenas cada grupo irá receber?

Aluna Zero.

Núbia Essas 4 centenas correspondem a quantas dezenas?

Aluna 40.

⁴¹ Leite, Prane e Kuster (2012).

Ao final desse processo, um aluno pontuou que a explicação detalhada do algoritmo padronizado da divisão ficou muito complicada. Núbia pontuou que aquele modo serviria para eles compreenderem a operação e que voltariam a realizá-la por um modo abreviado, mas, agora, entendendo o significado para além de etapas mecanizadas e desprovidas de sentido.

Nesse momento, a professora viu a oportunidade de relacionar a explicação com o algoritmo na forma que os alunos comumente usam (Figura 19):

Figura 19: Algoritmo padronizado da divisão.

$$\begin{array}{r}
 448 \quad | 8 \\
 - 40 \\
 \hline
 48 \\
 - 48 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Ao final, a mesma aluna que achou complicado o algoritmo completo, com o destaque para as ordens, destacou que sempre teve essa dúvida, pois “nunca ninguém explicou o porquê que descia esse número”.

A professora questionou a turma se eles conseguiam pensar em outras estratégias para resolver o problema. Não havendo manifestação dos alunos, ela apresentou outras possibilidades, começando pelas aproximações progressiva e regressiva que descrevemos no capítulo de planejamento (Figura 20), estimulando o uso de outras estratégias.

Figura 20: Aproximações progressiva e regressiva.

$$\begin{array}{r|l}
 8 \times 60 = 480 & 8 \times 50 = 400 \\
 8 \times 4 = 32 & 8 \times 6 = 48 \\
 \hline & + \quad + \\
 56 & 56 \quad 448
 \end{array}$$

O penúltimo método discutido foi a decomposição, o que se pode observar no diálogo a seguir, entre a professora e uma aluna:

- Núbia* Podemos escrever o 448 como sendo $400 + 40 + 8$. Oito vezes quanto resulta em quatrocentos?
- Aluno* 50.
- Núbia* Quando eu distribuo quatrocentos por 8 dá 50. E quando eu distribuo 40 por 8?
- Aluno* 5.
- Núbia* E o 8?
- Aluno* 1.
- Núbia* Quando fazemos essa distribuição, alocamos quanto em cada grupo? $50 + 5 + 1 = 56$.

Durante os questionamentos, a professora registrava na lousa o pensamento que estava construindo com os alunos (Figura 21) e por vezes ela mesma os respondia, como apresentado no diálogo acima.

Figura 21: Método de Decomposição.

$$448 = \underbrace{400}_{50 \times 8} + \underbrace{40}_{5 \times 8} + \underbrace{8}_{1 \times 8}$$

$$50 + 5 + 1 = 56$$

Por último, a professora apresentou o método americano. Por tentativas, atribuímos quantidades ao quociente (quociente parcial) e, se o resto for ainda maior que o divisor, define-se um outro quociente parcial, continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor. Por exemplo (Figura 22): escolhemos um primeiro quociente parcial igual a 10. Mas $10 \times 8 = 80$, então ainda preciso distribuir $448 - 80 = 368$ reais. Escolhemos, então, um segundo quociente parcial igual a 20. Como $20 \times 8 = 160$, ainda resta $368 - 160 = 208$. Definimos o terceiro quociente parcial valendo 20, novamente. Temos que $20 \times 8 = 160$ e $208 - 160 = 48$. Atribuímos então um último quociente parcial igual a 6, pois $6 \times 8 = 48$, zerando o dividendo.

Figura 22: Método Americano.

Ao final, a lousa apresentava diferentes estratégias de divisão que serviram como ponto de partida para conectá-las e, posteriormente, realizar uma síntese conjunta da aula (Figura 23).

Figura 23: Diferentes estratégias de solução.

A professora, ao avaliar o tempo de aula restante, percebeu que não havia tempo suficiente para iniciar uma nova atividade. Daí, ela apresentou um novo exemplo ($132 \div 6$) com as imagens visuais do Material Dourado, reforçando os valores posicionais. Em seguida, propôs dois exercícios de fixação, $212 \div 4$ e $434 \div 7$, em cuja resolução os alunos podiam usar a estratégia que quisessem. Após dar-lhes tempo para resolvê-los em conjunto, dois grupos foram ao quadro e realizaram as divisões utilizando algoritmo padronizado da divisão.

O tempo de aula não foi suficiente para realização de novo *bansho* e *neriage*, mas, ao circular entre os grupos e observar o registro das respostas feitas pelos alunos na lousa, a professora constatou que eles pareceram dominar o algoritmo padronizado da divisão.

No segundo dia, a aula começou com o **Problema 2**:

Problema 2

Você está ajudando a Secretaria de Educação do seu município a distribuir 9270 alunos em algumas de suas escolas. Nessas escolas, deverão ser colocados exatamente 30 alunos em cada turma. Quantas turmas serão necessárias para alocar esses estudantes?

Os alunos não tiveram dificuldades com a etapa de compreensão, demonstrando reconhecer os dados do problema e o que se pedia. Para a resolução, a professora solicitou que apresentassem duas estratégias diferentes.

Após dar-lhes tempo para a resolução coletiva, Núbia visitou os grupos com o intuito de conhecer as estratégias eleitas e, eventualmente, esclarecer-lhes dúvidas. Em seguida, solicitou que os alunos fossem à lousa apresentar suas resoluções (*bansho*). Os cinco grupos que foram à lousa utilizaram o algoritmo padronizado da divisão como uma das estratégias. Como segunda opção, um escolheu por estimativa, dois por decomposição, e outros dois revelaram não ter conseguido, como descreveremos adiante.

A professora solicitou que os grupos fossem à lousa expor e explicar para a turma suas soluções. O primeiro grupo começou a explicação:

Aluno Como 9 não dá para dividir por 30, peguei o dois, por causa da unidade, dezena, centena, que nós aprendemos ontem. O número que chegava mais próximo de 92 quando eu multiplico por 30 era o 3, porque 3 vezes 30 dá 90. Aí diminuí e sobrou 2. Depois eu desci o 7. Nisso que eu desci o 7, não deu também, então eu adicionei um 0 aqui [no quociente]. Ficou 270, o número que chegava mais próximo era o 9, que vai dar exato, pois 9 vezes 30 dá 270. Aí acabou.

A professora questionou o grupo sobre o porquê do zero no quociente (Figura 24).

Figura 24: Zero no quociente.

$$\begin{array}{r}
 9270 \overline{) 30} \\
 \underline{-90} \\
 270 \\
 \underline{-270} \\
 0
 \end{array}$$

A aluna então tenta justificar:

Aluna Desceu outra casa e coloca o zero, é igual aquele negócio da vírgula, entendeu?

Núbia Então deveria colocar uma vírgula também?

Aluna Não, não, não estou falando que tem que colocar a vírgula, essa é outra história, é quando sobra.

Núbia Mas coloco o zero só porque eu desci uma outra casa?

Aluna É, aí coloca o zero.

Núbia Mas aqui você também desceu... [a professora estava se referindo ao número 2].

Aluna Mas aqui eu só desci uma, coloco zero quando descem duas eu acho.

Com essa explicação, a aluna quis dizer que o zero entra no quociente na ordem das dezenas, quando 27 dezenas divididas por 30 resultam em 0 dezenas e, portanto, é necessário recorrer à ordem das unidades para prosseguir com a divisão.

Na sequência, o segundo grupo foi chamado à lousa e apresentou a resolução mostrada na Figura 25.

Figura 25: Solução apresentada pelo grupo 2.

$$\begin{array}{r}
 9 \overline{) 270} \quad \begin{array}{r} 30 \\ 309 \end{array} \\
 \underline{-90} \\
 270 \\
 \underline{-270} \\
 0
 \end{array}$$

A aluna explicou que resolveu o problema como ela tinha aprendido no ensino fundamental:

Aluna Quando o número tem o zero, a minha professora me ensinou que pode cortar os dois zeros. Aí, 9 dividido por 3 dá 3 e sobra zero. Depois desce o 2. O 2 não dá para dividir por 3, coloca um zero aqui [apontando para o quociente] e desce a próxima casa [que seria o 7]. Aí 27 dividido por 3 é 9 e sobra zero [se referindo ao resto].

A explicação dada por essa aluna foi prevista no planejamento da aula. Núbia então perguntou:

Núbia Por que você riscou o zero, mesmo?

Aluna A minha professora ensinou assim, não me explicou o porquê.

Núbia se dirige para a turma dizendo:

- Núbia* Alguém consegue me explicar o porquê de a gente poder fazer isso? [Neste momento a professora está apontando para os zeros na unidade]. Está todo mundo de acordo que é possível fazer isso? Por que eu posso fazer isso?
- Aluna* Porque o zero é um número neutro?

A terminologia dada pela aluna levou Núbia a lançar mão de um contraexemplo previsto pelas professoras e que pudesse esclarecer que nem sempre o zero será neutro no contexto que a aluna propôs. Por isso, a professora continuou estimulando os alunos:

- Núbia* E se fosse 9027/30, eu poderia cancelar os zeros?

Alguns alunos disseram que não podia. A professora perguntou, então, se o zero era elemento neutro, conforme a aluna disse. Nesse momento, vários alunos tentaram explicar ao mesmo tempo porque isso não é possível. A professora reproduz o que escutou de alguns alunos, questionando-os:

- Núbia* No meio não pode, mas no final pode?
- Aluna* Porque no final não faz diferença.

A professora retomou o planejado para explicar o cancelamento do zero. De forma simplificada, lembrou com os alunos o que era um múltiplo de 10 e indagou o que havia de característica comum entre esses múltiplos. Os alunos observaram que todos terminavam em zero, ou seja, o algarismo da unidade era o zero. Assim, os números terminados em zero eram múltiplos do 10 e, portanto, 9270 e 30 eram múltiplos de 10.

Para dar sequência à explicação, a professora relembrou o conceito de frações equivalentes⁴², ou seja, se o numerador e o denominador forem divididos pelo mesmo número, a nova fração seria equivalente à anterior. Assim, como ambos os números eram múltiplos de 10, podemos dividi-los por 10 (Figura 26):

Figura 26: Frações equivalentes.

Um aluno indagou à professora:

<i>Aluno</i>	Sempre que tiver um zero no final, o número vai ser divisível por 10?
<i>Núbia</i>	Sim. Sempre será divisível por 10.

⁴² O conceito de frações equivalentes e a associação de divisão com uma fração foram trabalhados no início do ano pela professora com esses alunos. Relembrar estes conteúdos neste momento não foi algo trabalhoso que viesse a desviar o foco da discussão.

A professora mostrou aos alunos que as duas divisões eram equivalentes, por isso era correto simplificar os zeros, como a aluna havia feito, e o quociente seria o mesmo. No entanto, não poderíamos fazer o mesmo na divisão $9027 \div 30$, uma vez que o 9027 não era múltiplo de 10.

O grupo 4 armou a divisão pelo algoritmo padronizado da divisão (Figura 27).

Figura 27: Solução apresentada pelo grupo 4.

No entanto, sua explicação de como resolveram estava associada ao Método Americano:

Aluna A gente pegou um número que, multiplicado por 30, chegasse mais próximo de 9270. Aí deu 300, que deu 9000 $[300 \times 30 = 9000]$. Sobrou 270 $[9270 - 9000]$, que a gente deixou aqui. Pegamos um número que multiplicado por 30 dava 270 ou mais próximo, que foi o 9. Aí colocamos o nove aqui [referindo-se ao quociente] e acabou.

A professora reforçou a explicação, clarificando todos os passos utilizados no método americano utilizado pelo grupo (Figura 28).

Figura 28: Explicação da professora sobre o Método Americano.

- Núbia* Ela pegou o 9270 e dividiu por 30. No primeiro momento vocês pensaram no 300 vezes 30?
- Aluna* Sim.
- Núbia* Então você tem 300 grupos de 30? Quando eu estou dividindo 9270 por 30, de certa forma eu estou querendo saber quantos grupos de 30 eu consigo dentro do 9270. Se eu tivesse 300 grupos de 30, eu chegaria bem perto, 9000. Retirando esse 9000, iria sobrar 270.
- Aluna* O número mais próximo de 30 que iria dar 270 é o 9.
- Núbia* Primeiro ela viu os 300 grupos. Depois pensou no 9, retirou o zero e colocou o 9 direto. Agora somamos e encontramos 309.

Após essa explicação, a professora discutiu outra forma de organizar a divisão pelo método americano (Figura 29):

Figura 29: Outro exemplo de organização da divisão para fixação do Método Americano.

$$\begin{array}{r}
 9270 \overline{) 130} \\
 - 3000 \quad 100 \\
 \hline
 6270 \quad 200 \\
 - 6000 \quad + 9 \\
 \hline
 270 \quad 309 \\
 - 270 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Após essa explicação, a turma passou a discutir a segunda estratégia de resolução empregada pelos grupos.

Os grupos 1 e 2 utilizaram, respectivamente, os métodos de estimativa e decomposição, mas o grupo 3 não finalizou a divisão. Este, ao decompor 9270 em 9000+200+70, começou substituindo cada uma das parcelas por produtos, mas não se atentou, ou não conseguiu escrever, cada parcela como múltiplo de 30 e, portanto, não concluiu o processo. Talvez não tenha ficado claro para esses alunos que, no método de decomposição, o dividendo deveria ser decomposto em parcelas que fossem múltiplas do divisor. Uma outra possibilidade seria mesclar o método de decomposição com métodos de aproximação.

A partir da solução parcial dos alunos, utilizando o erro como estratégia de aprendizado, a professora construiu com eles um novo exemplo de solução por decomposição (Figura 30).

Figura 30: Uma solução por decomposição.

$$\begin{array}{r}
 300 \times 30 \\
 6 \times 30 \\
 2 \times 30 \\
 + 1 \times 30 \\
 \hline
 309 \times 30
 \end{array}$$

O grupo 4 não apresentou uma segunda estratégia de solução.

O quinto grupo não quis ir à frente realizar a explicação. Como a forma de armar o algoritmo foi semelhante à primeira solução do segundo grupo, a professora lembrou que ambos os números são múltiplos de 10 e, desta forma podemos realizar a simplificação, ou seja, o resultado da divisão de $9270 \div 30$ ou $927 \div 3$ é o mesmo. Destacamos a utilização da prova real por esse grupo.

Essas maneiras de resolução apresentadas pelos grupos estão resumidas no Quadro 1.

Quadro 1: Estratégias de resolução apresentada pelos grupos.

Métodos	Grupo	Resolução
Estimativa	1	$\begin{array}{r} 300 \\ \times 30 \\ \hline 9000 \end{array}$ $\begin{array}{r} 305 \\ \times 30 \\ \hline 9150 \end{array}$ $\begin{array}{r} 309 \\ \times 30 \\ \hline 9270 \end{array}$
Decomposição	2	$9270 = 9000 + 270$ $300 \times 30 = 9000$ $+ 9 \times 30 = 270$ $\hline 309 \qquad 9270$
	3	$9000 + 200 + 70$ $300 \times 30 + 10 \times 20 + 7 \times 10$
4		Não apresentou outra estratégia de solução.
Algoritmo padronizado da divisão + Simplificação + Prova real	5	$\begin{array}{r} 9270 \quad 130 \\ 027 \quad 309 \\ \emptyset \\ \hline 309 \\ \times 30 \\ \hline 9270 \end{array}$

Como para essa atividade nenhum grupo havia realizado a explicação utilizando o algoritmo padronizado da divisão detalhado e, ao visitar os grupos no início da aula, a professora percebeu respostas iguais a 39. Ela viu neste momento a oportunidade de trabalhar com essa estratégia. Primeiro, retomando a questão dos múltiplos que é a questão do cancelamento do zero; depois, enfatizando a questão do zero no quociente e, por último, mostrando que o resultado da divisão $927 \div 3$ esse método é o mesmo.

Figura 31: Algoritmo padronizado da divisão com dividendo e divisor simplificados.

$$\begin{array}{r}
 \text{C D U} \\
 9 \overline{) 27} \quad \begin{array}{r} 1 \ 3 \\ \hline 3 \overline{) 09} \\ \hline \text{C D U} \end{array} \\
 \begin{array}{r} -9 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ +7 \\ \hline 27 \\ -27 \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}$$

Após finalizar o *neriage*, a lousa apresentava tudo o que tinha sido estudado no Problema 2 (Figura 32).

Figura 32: Soluções do Problema 2 na lousa.

Em seguida, um novo problema foi iniciado, com a entrega de uma folha com a atividade para os alunos.

Problema 3

Com a proximidade da volta às aulas, a rede de papelaria Papel Mágico precisou reabastecer os estoques de cadernos em todas as suas lojas da região Sudeste. Você é estagiário dessa rede. A gerente comprou 15120 cadernos e pediu que você os enviasse para as lojas, sem que uma recebesse maior quantidade de cadernos que a outra. Quantos cadernos você enviou para cada loja?

Novamente foi realizada a etapa de compreensão e destinado um tempo para a compreensão individual e a resolução do problema em grupo. Em seguida, deu-se início ao *bansho*, ou seja, o momento em que os alunos socializam suas resoluções. Quatro grupos foram à lousa. Um deles utilizou o método americano e os demais o algoritmo padronizado da divisão. O grupo justificou a utilização do método americano por julgar mais fácil.

Não solicitamos que o **Problema 3** fosse resolvido por dois métodos distintos, daí as estratégias eleitas pelos grupos estão representadas no Quadro 2.

Quadro 2: Estratégias de resolução eleitas pelos grupos.

Grupo	Métodos	Resolução
1	Algoritmo da divisão	$\begin{array}{r} 15 \overline{) 120} \quad \underline{114} \\ 112 \quad 1080 \\ 0 \end{array}$
2		$\begin{array}{r} 15 \overline{) 120} \quad \underline{114} \\ -14 \quad 1080 \\ \hline 0112 \\ 0 \end{array}$
3		$\begin{array}{r} 15 \overline{) 120} \quad \underline{114} \\ 112 \quad 1080 \\ 00 \end{array}$
4	Americano	$\begin{array}{r} 15 \overline{) 120} \quad \underline{114} \\ -14 \quad 000 \quad 1000 \\ \hline 1120 \quad 50 \\ -700 \quad +30 \\ \hline 320 \quad 1080 \\ \hline 0 \end{array}$

A professora aproveitou a solução apresentada pelo grupo 4 para enfatizar que o método americano (utilizado por esse grupo) pode ser utilizado de mais de uma maneira, propondo para os alunos o exemplo a seguir (Figura 33):

Figura 33: Exemplo para fixação do método americano.

$$\begin{array}{r}
 15120 \overline{) 14} \\
 \underline{- 14000} 1000 \\
 10 \\
 \underline{- 140} 10 \\
 10 \\
 \underline{- 140} 20 \\
 20 \\
 \underline{- 140} + 10 \\
 1080 \\
 \underline{- 280} \\
 3420 \\
 \underline{- 280} \\
 140 \\
 \underline{- 140} \\
 0
 \end{array}$$

Como aconteceu no **Problema 2**, a professora ainda percebeu a dificuldade de alguns alunos em atribuir zeros no quociente, chegando, portanto, a resultados incorretos esperados, como 18 e 180.

Novamente, utilizou o detalhamento do algoritmo padronizado da divisão chamando atenção para a relação entre as ordens (Figura 34).

Figura 34: Algoritmo padronizado e detalhado da divisão.

$$\begin{array}{c}
 \text{D} \quad \text{U} \quad \text{C} \quad \text{D} \quad \text{U} \\
 \begin{array}{r|l}
 1 & 5 \\
 \hline
 \rightarrow 10 & 10 \\
 + 5 & + 1 \\
 \hline
 15 & 11 \\
 - 14 & - 12 \\
 \hline
 1 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Ao final da aula, uma aluna questionou sobre a necessidade de serem estudados diferentes métodos para operar uma divisão quando ela já dominava o algoritmo padronizado da divisão. Um aluno se antecipou e respondeu que finalmente ele havia compreendido como calcular uma divisão e que isso só foi possível quando Núbia promoveu a discussão por diferentes estratégias. Para ele, o algoritmo de divisão não era o método mais simples. Isso mostra a potencialidade da aula para o resgate da aprendizagem dos alunos, como vemos no diálogo a seguir.

<i>Aluna</i>	Professora, então o objetivo de mostrar vários tipos de divisões é para a gente escolher o método que acha mais fácil?
<i>Núbia</i>	Exatamente. Você tem várias opções e não precisa ficar presa a uma só.

A professora finalizou a aula sem discutir o **Problema 4**, uma vez que o tempo em aula foi insuficiente para completar o planejamento.

AVALIAÇÃO

Dos 36 alunos que participaram das aulas, apenas 24 responderam ao teste diagnóstico e à avaliação propostos à turma. Analisamos as produções de cada aluno e observamos que houve uma maior evolução de aprendizagem dos alunos que participaram mais ativamente do processo, como era esperado. Em muitos casos, a natureza dos erros antes e depois da aula não era a mesma, mostrando que houve algum aprendizado. Isso mostra a importância do olhar individual apurado, que percebe o que não está escrito ao comparar questões de teste diagnóstico e de avaliação pós-aula⁴³ dos alunos que se envolveram mais ativamente na aula. Vamos destacar algumas situações a seguir.

Um dos alunos, por nós codificado como A14, havia deixado todas as questões do pré-teste em branco. No pós-teste, todas as questões foram resolvidas. Na primeira questão, esse aluno

⁴² Campos (2018).

utilizou corretamente o algoritmo de divisão, cometendo um erro de tabuada ao associar 9×5 a 45 e não a 40 (Figura 31). Além disso, apresentou corretamente a segunda questão. Embora os cálculos da questão 3 não estejam completamente explícitos, há indícios novamente de erro de tabuada mas com compreensão do algoritmo.

Figura 31: Questão 1 do pós-teste de A14.

1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R\$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explícite seus cálculos.

$$\begin{array}{r} 3540/5 \\ 3540 \\ \underline{040} \\ 40 \\ \underline{0} \end{array}$$

Joaquim pagará R\$ 708,00 em cada prestação.

Cabe destacar que o erro em tabuada não foi pontual, ocorrendo com outros alunos, a exemplo de A18 que acertou todas as questões, cometendo equívoco apenas em uma multiplicação ao considerar $4 \times 400 = 18.000$ (Figura 32).

Figura 32: Questão 3 do pós-teste de A18.

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R\$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explícite seus cálculos.

$$\begin{array}{r} 18.020 \overline{) 400} \\ - 18.000 \\ \hline 2000 \\ - 2000 \\ \hline 000 \end{array}$$

O aluno por nós codificado como A19 havia acertado as duas primeiras questões do pré-teste e deixado a terceira questão em branco, destacando que não sabia “fazer divisão com número de três dígitos ou mais” (Figura 33).

Figura 33: Questão 3 do pré-teste de A19.

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R\$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explícite seus cálculos.

18.020 / 400

Não sei fazer divisão com números de 3 dígitos ou mais!
Na verdade eu não lembro ou eu nunca aprendi. se lá!

Esse estudante conseguiu começar a desenvolver corretamente a divisão proposta no pós-teste (Figura 34), embora ainda não tenha se apropriado das ordens do sistema decimal.

Figura 34 - Questão 3 do pós-teste de A19.

3) Uma escola com 400 alunos fará uma excursão. O custo total será R\$ 18.020,00. Supondo que somente os alunos serão pagantes, quanto cada aluno deverá pagar? Explícite seus cálculos.

18020 / 400

1600 405,05

2020

~~2000~~

2000

0

Dos 24 alunos que participaram da avaliação, 6 erraram a questão 1 por não compreenderem o texto do problema e utilizarem como quociente o número 42 que se refere às polegadas da televisão, como foi o caso do Aluno A1 (Figura 35). Esses alunos deveriam ter calculado o quociente da divisão de 3.540 por 5, que era o número de prestações possíveis.

Figura 35: Questão 1 do pós-teste de A1.

1) Joaquim comprou uma televisão de 42 polegadas que custava R\$ 3.540,00, parcelados em cinco vezes iguais e sem juros. Qual será o valor de cada prestação que Joaquim deverá pagar? Explícite seus cálculos.

Handwritten calculations for the division of 354000 by 42:

$$\begin{array}{r} 354000 \overline{) 42} \\ \underline{-336} \\ 18 \\ \underline{-16} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 354000 \overline{) 42} \\ \underline{-336} \\ 18 \\ \underline{-16} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 354000 \overline{) 42} \\ \underline{-336} \\ 18 \\ \underline{-16} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 0 \end{array}$$

Handwritten multiplication facts on the right:

$$\begin{array}{l} 4 \times 8 = 32 \\ 4 \times 9 = 36 \\ 4 \times 5 = 20 \\ 4 \times 0 = 0 \\ 4 \times 7 = 28 \\ 4 \times 6 = 24 \\ 4 \times 9 = 36 \end{array}$$

Handwritten result: 168

Por fim, cabe destacar que as análises revelaram que a questão 3 apresentou o maior número de erros e atribuímos isso à dificuldade dos alunos com o zero no quociente.

O QUE DEU CERTO... O QUE NÃO DEU CERTO... UM BALANÇO FINAL

Antes de partirmos para um balanço, gostaríamos de esclarecer que um estudo detalhado do currículo, parte integrante do planejamento em um *Lesson Study*, não foi realizado por se tratar de um tema deslocado do ano escolar proposto nas orientações nacionais. O objetivo aqui era de retomar, no Ensino Médio, algo que deverá ser trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Assim que a aula do primeiro dia terminou, os alunos foram para o recreio e as professoras reuniram-se para refletir sobre o planejamento conjunto e a execução realizada até aquele momento (Figura 36). O Plano de Aula previu a abordagem das questões 1 e 2 naquele primeiro dia, mas, em função do tempo, somente o Problema 1 foi executado. Falaremos disso mais adiante.

Figura 36: Reflexão sobre o planejamento e a aula.

As primeiras palavras foram da Professora Núbia, que relatou ter se sentido nervosa pois, apesar de ser uma aula como outra qualquer, um dia normal na escola, tratava-se de uma coleta de dados para a sua própria dissertação de mestrado, como mostramos a seguir:

Júlia Ter professores te assistindo te deixou nervosa?

Núbia Não. Isso não. Minha preocupação era de ter todos os alunos envolvidos e bem focados para que o processo surtisse efeito.

Em seguida, a professora declarou que, apesar dessa sua inquietação, os alunos mostraram-se muito participativos e atentos ao que estava sendo dito. Pareciam realmente estar compreendendo as informações que lhes eram apresentadas.

O grupo elogiou a professora regente, dizendo que ela se mostrou muito segura, muito preparada, inclusive na valorização de erros dos alunos. Núbia seguiu falando sobre suas impressões:

- Núbia* Eu gostei muito do desempenho daquele aluno que sentou no canto [e aponta para uma mesa]. Ele não conseguiu fazer a primeira divisão, 448 por 8. Ele tentou de um jeito, tentou de outro e não saiu, foi acrescentando zeros de maneira aleatória no quociente. E os últimos exemplos ele fez sozinho.
- Bruna* Não só fez sozinho como fez muito rápido. Eu observei também. Quando eu vi a dificuldade inicial desse aluno, fui sentar perto dele para acompanhá-lo de perto. Ele ficou a aula toda concentrado e interessado. Ele e aquela outra aluna [apontando para uma nova mesa].

Bruna relatou que essa aluna não conseguia entender o método de estimativa. Porém, ao longo da aula esse conteúdo foi ganhando mais sentido e tinha certeza de que, para esses dois alunos que ela acompanhou mais de perto, a aula fez uma grande diferença. Essa aluna, em determinado momento da aula, relatou impressionada que “agora tudo fez sentido. Ninguém nunca tinha me explicado isso”.

A maioria dos alunos insistiu em fazer os exercícios todos pelo mesmo método, o algoritmo padronizado da divisão. Houve também quem falasse que bastava saber um único método. Porém, o mais importante é que percebemos que os alunos não estavam mais trabalhando mecanicamente, mas significando os procedimentos, mesmo que ainda apresentem erros, por exemplo, de tabuada.

Camila chamou atenção para um momento em que a Núbia estava fazendo uma aproximação regressiva com a turma e um aluno sugeriu multiplicar por 5. Esse não era o número do planejamento e, de verdade, transformaria a aproximação regressiva em uma aproximação progressiva. Esse foi, talvez, o único momento em que, ao tentar seguir o planejamento, a professora não se permitiu acolher o pensamento dos alunos.

Núbia É... eu queria seguir o método que sobe.... eles sugeriram multiplicar por um número que faria a estimativa alternar por cima e por baixo... é verdade, eu poderia ter deixado fluir.

As professoras ressaltaram que o planejamento não deve funcionar com um *script*, mas deve dar subsídios para a condução da aula. E reconheceram que esse era um momento rico e o descolamento daquilo que foi planejado teria sido valioso no processo de aprendizagem.

As professoras Julia e Bruna destacaram a importância de o grupo ter planejado alternativas para o caso de o tempo de aula não ser suficiente para um novo problema, o que de fato aconteceu.

Maria Alice perguntou sobre diferenças que Núbia destacaria em relação a planejamentos tradicionais e o planejamento que foi realizado para essas aulas. Núbia destacou que a principal diferença era exatamente prever aquilo que poderia acontecer. Como exemplo, a primeira pergunta dos alunos foi sobre a palavra prazo, e isso estava no planejamento. Isso não estaria em um plano de aulas tradicional, e a palavra prazo realmente causou muitas dúvidas por parte de vários grupos.

Uma dúvida não prevista no planejamento do **Problema 1** foi a pergunta de uma aluna, se era para multiplicar [ao invés de dividir] 448 por 8, exatamente pelo não entendimento da palavra prazo. A professora saiu-se muito bem, traçando um paralelo e questionando os alunos sobre algo familiar, a compra de calças do uniforme da escola.

Maria Alice provocou o grupo dizendo que alguns alunos se mostraram cansados com os diferentes métodos de solução. De fato, houve interferência de um aluno nesse sentido, como descrevemos na execução da aula. Hellen complementou que

muitos deles não se sentiram instigados a aprender vários métodos. Maria Alice analisou que isso era próprio da nossa cultura, que valoriza a resposta em detrimento do processo e, por isso, os alunos não valorizavam o esforço da professora durante toda a aula. Destacou que eles ainda não tinham maturidade para compreender que o entendimento daquilo poderia fertilizar outros conceitos, então não era possível convencê-los dizendo que será útil no futuro. E uma maneira que ela via, na nossa cultura escolar, de convencer os alunos a abraçar a ideia de compreender diferentes métodos é cobrar mais de uma via de solução. Então ela sugeriu que o grupo acrescentasse isso no planejamento já para a próxima aula, com o que todas as outras professoras concordaram.

A turma era heterogênea e houve vantagens em mostrar os diferentes métodos em todos os problemas, mas a sugestão de Hellen e Camila era que o algoritmo padronizado da divisão fosse trabalhado no primeiro problema (caso nenhum aluno propusesse solução distinta dessa) e todos os outros métodos fossem trabalhados a partir do segundo problema em um planejamento futuro. E acrescentaram que isso poderia minimizar o cansaço dos alunos.

Bruna destacou que, até a primeira hora de aula, a maioria dos alunos estava concentrada e que o motivo de terem se dispersado pode não ter sido a repetição dos métodos, mas sim o tempo longo de aula. Maria Alice ponderou que esse é um ponto que merece atenção e pode ter sido também uma falha no planejamento. Uma sugestão que propuseram para contornar isso seria mudando a dinâmica da aula ou da atividade.

A professora Camila alertou que foram planejados dois problemas para cada dia, mas na prática ficaram o tempo todo em uma só questão. Julia complementou dizendo que demorou 30 minutos para iniciar a aula e, também, os alunos chegaram

atrasados e demoraram para formar os grupos. O **Problema 1** durou aproximadamente o tempo previsto de 50 minutos e haveria tempo hábil para seguir o planejado. No entanto, após o primeiro problema, restavam apenas 20 minutos de aula inviabilizando a aplicação do segundo, o que levou Núbia a optar (conforme o planejado para esse caso) pelo aprofundamento do que havia sido discutido, por meio de exercícios. Verificou-se, então, que esse consumo de tempo com atrasos dos alunos e arrumação da sala precisa ser minimizado.

Ainda sobre gerenciamento de tempo e heterogeneidade da turma, Bruna questionou o grupo sobre o tempo dado aos alunos para resolverem, em grupo, o **Problema 1**. Ela relatou que a maioria dos alunos resolveu rapidamente o problema, enquanto dois grupos apresentaram dúvidas. Nesse caso, as professoras questionaram: deveríamos avançar ou esperar? As opiniões foram distintas: havia quem defendia o avanço, mas também quem destacou que se avançarmos o tempo todo, quem não estiver compreendendo vai ficando cada vez mais para trás. Maria Alice defendeu que avançar é reforçar a cultura do acerto.

- Maria Alice* Por que não transformar o erro em uma grande oportunidade de aprendizagem?
- Núbia* Mas levar o erro para o quadro?
- Julia* Aí vamos expor o aluno...
- Maria Alice* Essa é a cultura... a cultura do acerto. Qual o problema de o aluno estar errado e ter a ajuda dos professores e colegas como uma oportunidade de corrigir seu pensamento matemático?
- Hellen* Podemos chegar no aluno e trabalhar o erro só com ele, ou com aquele grupo...

Maria Alice Quem garante que a dúvida deles dois era só deles dois? Eu, quando aluna, muitas vezes fiquei calada por vergonha de me expor. Mas se alguém tivesse ido lá na frente eu com certeza iria aproveitar.

Uma sugestão de Maria Alice foi que o professor tomasse para si a dúvida do aluno, perguntando à turma: se eu tivesse feito isso, eu estaria certa? Como vocês me corrigiriam? O que não podemos fazer, disse a professora, é deixar passar uma dúvida. Todas concordaram que com a dinâmica da aula, em que a professora visita os grupos verificando as estratégias e ações dos alunos, isso é possível. Porém, analisando de maneira mais ampla sobre o gerenciamento de aula, em aulas expositivas é mais difícil de detectar erros pontuais dos alunos. Novamente, esbarramos em questões culturais, ou seja: temos que valorizar e estimular os alunos a irem à lousa, a expor seus raciocínios até que, naturalmente, isso seja incorporado na cultura.

Algumas outras considerações e cuidados que devemos ter foram levantados durante o momento de reflexão. Por exemplo: falar com a turma enquanto eles estão envolvidos com os problemas pode quebrar o fluxo de raciocínio dos alunos. Logo, esse procedimento deve ser evitado, assim como responder às nossas próprias perguntas, sem deixar tempo de o aluno pensar por ele mesmo.

Devido à riqueza das discussões no primeiro dia, a reflexão após a segunda aula não trouxe novos ingredientes que merecessem destaques pelo grupo de professores. Assim, o grupo considerou adequados os ajustes no planejamento e a aula fluiu da maneira esperada. Uma ressalva é feita em relação ao tempo: com uma maior agilidade na organização dos grupos no início da aula, foi adequado o uso de 100 minutos para aplicação de dois problemas. No entanto, só conseguimos aplicar 3, dos 4 previstos.

Analisando a aprendizagem dos alunos, objetivo principal do *Lesson Study*, percebemos pelas avaliações que houve evolução de aprendizagem. Entretanto, algumas questões merecem destaque, as quais apresentamos a seguir.

Alguns alunos erraram a tabuada, mostrando um resgate anterior ao conteúdo de divisão que precisa ser feito.

Outros alunos não conseguiram interpretar corretamente o texto do problema, dividindo o valor a ser pago pela televisão pelo seu número de polegadas e não pela quantidade de prestações. Concluímos, com isso, que a compreensão do texto é algo que precisa ser incentivado e trabalhado com os alunos.

O resultado das avaliações permite que uma hipótese seja levantada: a questão cultural escolar de aprovação automática faz com que muitos alunos se esforcem pouco ou quase nada, chegando ao 1º ano do Ensino Médio com deficiências do início do Ensino Fundamental.

Em se tratando da operação matemática de divisão, o zero no quociente ainda é uma questão que carece de maior aprofundamento e reflexão pelo grupo, podendo inclusive ser repensado em atividades futuras.

O *Lesson Study* para a formação de professores mostrou-se valioso exatamente pela sua essência: aprimoramento da prática a partir da reflexão de uma necessidade surgida na sala de aula e a intervenção realizada sobre ela. Ainda que seja um conteúdo previsto para as séries iniciais do Ensino Fundamental, o cálculo da divisão é um tema que permeia todo o ensino básico e que, ainda assim, muitos alunos terminam o Ensino Médio sem dominá-lo.

Há saberes de conteúdo matemáticos que são específicos da atividade profissional de ensinar matemática na escola básica. A falta de legitimação e de reconhecimento desses saberes estão alicerçados, em última instância, no não reconhecimento

do ser professor com uma atividade profissional. Ou seja: em que momento de suas formações os professores vão se debruçar sobre isso⁴⁴? E mais: como os alunos vão aprender esse conteúdo?

Um *Lesson Study* tem como objetivo final o aprendizado do aluno e é sobre isso que precisamos sempre manter um olhar atento. O resultado apresentado nas avaliações nos permite levantar algumas hipóteses, por exemplo: há uma desvalorização crescente de todo o processo escolar, refletindo em falta de motivação e envolvimento dos alunos. Na prática vivenciada pelas professoras, o que conseguimos perceber foi uma maior evolução dos alunos que participaram ativamente do processo, o que leva a crer que a aula tenha cumprido seus objetivos, mesmo que parcialmente.

Pequenos avanços soam para nós como grandes conquistas e esperamos que esses feitos funcionem como fontes de inspiração para outros professores.

⁴² Isso nos remete à dupla descontinuidade na formação universitária de professores, criticada por Felix Klein já em 1908, caracterizada por uma dupla ruptura entre a matemática dos cursos universitários e aquela aprendida na escola básica, e, também, entre a matemática dos cursos universitários e aquela com que lidarão futuramente nas salas de aula da escola básica (GIRALDO et al., 2018).

REFERÊNCIAS

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de *lesson study* nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. In: XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, São Paulo - SP. *Anais...* 2009.

BALL, D. L. Magical hopes: manipulatives and the reform of mathematics education. *American Educator*, Washington DC/USA, v.16, n. 2, p. 14–18. Summer. 1992.

BEZERRA, R. C. *Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no contexto da Lesson Study*. 210 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2017.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br>>. Acesso em: 30 mai 2018.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC/SEB, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, N. Q. *O Lesson Study Potencializando o Ensino-Aprendizagem de Divisão: uma experiência no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática). Universidade Federal do Espírito Santo, 2018.

CYRINO, M. C. C. T.; CALDEIRA, J.S. Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de Matemática. *Investigações em Ensino de Ciências (Online)*, v.16, p. 373-401, 2011.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). *Ousadia Criativa nas Práticas de Educadores Matemáticos*. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015a.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 29, p. 1-17, 2015b.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. *Educar*, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008.

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. *Lesson Study: a japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. New Jersey, EUA: Autores Associados, 2004.

FERREIRA, A. C. *Metagognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo* (Tese) Doutorado em Educação Matemática. Campinas, SP: FE/Unicamp, 2003.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte- MG: Autêntica, p. 47-76, 2004.

FUJII, T. Implementing japanese *lesson study* in foreign countries: misconceptions reviewed. *Mathematics Teacher Education and Development*, v.16, n.1, p. 2-18, 2014.

GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F. de.; WROBEL, J. S.; Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. *Vidya* (Santa Maria Online), v. 37, p. 35-50, 2017.

GIRALDO, V. et. al. Práticas Docentes Compartilhadas: Integrando Saberes Emergentes da Prática na Formação Inicial de Professores de Matemática. In: Márcia Cristina de Costa Trindade. (Org.). *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas*. 1ed.

Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 1, p. 215-239, 2018.

GIRALDO, V. et al. Shared Teaching Practices: Integrating Experiential Knowledge into Pre-Service Mathematics Teachers. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)*, v. 7, p. 4-23, 2017.

IBIAPINA, I. M. L. M. *Pesquisa Colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimento*. Brasília-DF: Líder, 2008.

ISODA, M. *Lesson Study: Japanese Problem Solving Approaches*. Trabalho apresentado à *APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education*, Koh Samui, Thailand, 7-12 Mar. 2010.

ISODA, M.; OLFOS, R. *El enfoque de resolucion de problemas: en la enseñanza de la Matemática a partir del estudio de classes*. Ediciones Universitarias de Valparaiso: Valparaiso, 2009.

KANDEL, E. R. *Em busca da memória: o nascimento de uma nova ciência da mente*. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.

KRUTETSKII, V. A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

LEITE, H. C. A.; PRANE, B. Z. D.; KUSTER, J. S. Erros de alunos do 6º ano e dificuldades de licenciandos na explicação do zero no quociente. In: *V seminário internacional de pesquisa em educação matemática (SIPEM)*. Petrópolis: SBEM, 2012.

MISKULIN, R. G. S. et al. Pesquisas sobre Trabalho Colaborativo na Formação de Professores de Matemática: um olhar sobre a produção do PRAPEM/UNICAMP. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática*. São Paulo: Musa Editora, 2005, p. 196-219.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante*, 24(2), 11-134, 2015.

SCHOENFELD, A. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, J. P. Ponte (Ed.). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT, p. 61-72, 1996.

SILVEIRA, E. Afinal, está certo ou errado? Um estudo sobre indicações de uso de blocos base dez em livros didáticos de matemática no Brasil. In: *VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)*, Foz do Iguaçu, SBEM, 2018.

SOUZA, M. A. V. F. de. A Produção de Significados e a Representação Mental na Solução de Problemas Mal-estruturados de Matemática. *Boletim GEPEM*, jan/jun.2012 n.60, 129-144, 2012.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. *Quadrante*, Lisboa, v. XXIV, n.2, 135-162, 2015.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S. *Lesson Study*. 2018. Disponível em: <<https://youtu.be/uscwZBRkrGM>>. Acesso em: 06 fev. 2018.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S. *Café, Leite e Matemática*. 1. ed. Vitória - ES: Edifes, 2017. 86p.

SOUZA, M. A. V. F.; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. Y. *Lesson Study* como Meio para a Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática - Entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. *Boletim GEPEM*, N. 73, p. 155-130. 2018.

TAKAHASHI, A. Characteristics of japanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, v.25, p.37-44, 2006.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. *Didática de matemática: como dois e dois - a construção da matemática*. FTD, 1997.

VANDENBOS, G. R. (Org.). *Dicionário de Psicologia da APA*. Porto Alegre: Artmed, 2010. p.807.

WROBEL, J. S.; GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F.; LEITE, H. C. A. Inquiries in problem solving with contributions from *lesson study*. In: *Proceedings of PME 40*, v.1, p.341. Szeged: Hungary, 2016.

WROBEL, J. S.; SOUZA, M. A. V. F. de. Avaliação da qualidade de aula baseada na resolução de problema de matemática planejada e executada em um cenário de *Lesson Study*. In: Márcia Cristina de Costa Trindade. (Org.). *Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e*

perspectivas. 1ed. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. 1, p. 70-101, 2018.

Nota:

Todas as imagens e transcrições de áudios usados neste livro, bem como o uso do nome e imagem da Escola Estadual foram devidamente autorizados por escrito.

APÊNDICE

Gostaríamos de clarificar alguns termos japoneses frequentemente usados na literatura sobre Lesson Study⁴⁵:

<i>Bansho</i>	Aula registrada na lousa. Não se trata da simples exposição das estratégias, mas sim a questão da aula, diversas soluções dos alunos com suas estratégias e justificativas, e a síntese final pelo professor. A lousa não é apagada durante a aula. Professores japoneses consideram-na como importante ferramenta de ensino para organizar os pensamentos dos alunos.
<i>Hatsumon</i>	Formular uma questão fundamental para atrair o pensamento do aluno sobre um ponto particular na lição, com o objetivo de testar ou promover sua compreensão do problema.

⁴⁵ Fernandez; Yoshida (2004, p. 235); Isoda; Olfos (2010, p. 90-92). Adaptação das autoras.

<i>Jugyou Kenkyu</i>	Termo original para <i>Lesson Study</i> ou Pesquisa de aula.
<i>Konaikenshu</i>	Formação continuada de professores realizada em uma escola. Konai significa “na escola” e kenshu, “treinamento” no sentido da formação do profissional.
<i>Matome</i>	Síntese do professor sobre os conceitos aprendidos pelos alunos com a atividade.
<i>Neriage</i>	Momento em que os alunos, cuidadosamente guiados pelo professor, compartilham seus entendimentos, analisam, comparam e contrastam criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança com o que foi aprendido. É a conclusão coletiva apurada por todos, e que se formaliza no <i>matome</i> .

MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

Núbia Quenupe Campos é capixaba, mestre em Matemática pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Espírito Santo (2018) e licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2012). Já atuou no Ensino Fundamental II é professora efetiva da Secretaria de Estado de Educação - SEDU-ES.

Julia Schaetzle Wrobel é carioca, doutora em Matemática Aplicada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2005), mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2001), licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Rio de Janeiro (1998). É Professora da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) desde 2006, onde trabalha principalmente com a Licenciatura em Matemática. É coordenadora de Matemática do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) na Ufes.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza é carioca, com pós-doutorado em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa (2014) e em Números Racionais pela Rutgers University - New Jersey - USA (2018), doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2007), mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2001), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1995). É professora do Instituto Federal do Espírito Santo desde 2008, onde trabalha, principalmente, na Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Tem interesse em ensino, pesquisa e extensão ligados à formação de professores que ensinam matemática, em resolução de problemas, *Lesson Study*, psicologia cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, aplicações estatísticas e matemáticas na área da Educação, Ciências, Matemática e Engenharias.

Bruna Zution Dalle Prane é capixaba, doutoranda e Mestre (2015) em Educação pela Universidade Federal de São Carlos – (UFS-Car), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2010). Membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Cultura e do Grupos de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (Gepeme). É Professora do Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Vitória, desde de 2017. Temas de interesse: Modelagem Matemática na Educação Matemática, *Lesson Study*, ensino e aprendizagem de matemática.

Volume 1 da Série *Lesson Study* em Matemática:

Ebook disponível para download em
http://edifes.ifes.edu.br/images/stories/eBook-LessonStudy_em_Matematica_n1_Cafe-Leite-e-Matematica.pdf

Volume 2 da Série *Lesson Study* em Matemática:

Ebook disponível para download em
<https://edifes.ifes.edu.br/images/stories/2018-ebook-final.pdf>

A série *Lesson Study* em Matemática foi motivada pelo desejo de divulgar aulas de Matemática elaboradas sob as premissas do modelo japonês *Lesson Study* ou Pesquisa de Aula na Língua Portuguesa.

O que se pretende é propagar, aos professores de Matemática, o resultado de aulas planejadas-executadas-refletidas de maneira colaborativa que poderão ser ponto de partida para suas próprias ações de ensino, deixando a cargo da criatividade, experiência e intuição de cada um avanços em aulas de Divisão, imprimindo, desse modo, sua marca pessoal, pois cada turma tem seu modo de ser e sentir o mundo, seu contexto e sua história.

Edifes
PARCERIA