FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XIX.

Kolozsvár, 2014. március 20–21.

FOLYADÉKÁRAMLÁSI PROBLÉMÁK VIZSGÁLATA HASONLÓSÁGI MÓDSZERREL NEM-NEWTONI KÖZEGBEN

INVESTIGATION OF FLUID FLOW PROBLEMS OF NON- NEWTONIAN FLUIDS WITH SIMILARITY METHOD

HRICZÓ Krisztián

Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Analízis Intézeti Tanszék, 3515, Magyarország, Miskolci-Egyetemváros, Egyetem út 1. Telefon: +36-46-565-111/18-82, Cím: 3786, Magyarország, Lak, Dózsa György út 14., krisztian.hriczo@gmail.com

Abstract

Boundary layer flow of non-Newtonian fluids is examined along the horizontal and vertical plane orientation. The boundary layer flow is modeled by a system of partial differential equations, which are derived from the Navier-Stokes equation and the energy equation. A horizontal, permeable flat plate is placed in a non-Newtonian medium, while the vertical, impermeable flat plate is placed in non-Newtonian fluid-saturated porous medium. The assumed boundary layer flow is caused by free convection. Using similarity transformations the original mathematical model is reduced to a system of ordinary differential equations, its solutions provide the velocity and the temperature distribution in the boundary layer. Numerical approximate solutions are determined to illustrate the velocity and temperature changes in the boundary layer.

Keywords: Navier-Stokes equation, non-Newtonian fluid, permeable surface, porous medium.

Összefoglalás

Nem-newtoni folyadékok határréteg áramlását vizsgáljuk vízszintes és függőleges tájolású síklap mentén. A határréteg áramlást a Navier-Stokes egyenletből származtatott parciális differenciálegyenlet rendszerrel és energia egyenlettel modellezzük. Vízszintes esetben áteresztő síklapot helyezünk nem-newtoni közegbe, míg függőleges esetben egy nem áteresztő síklapot nem-newtoni folyadékkal telített porózus közegbe helyezünk el. A feltételezett határréteg áramlást a szabad konvekció idézi elő. Hasonlósági transzformációk alkalmazásával visszavezetjük a matematikai modellt közönséges differenciálegyenlet rendszerre, amely megoldása megadja az áramlásban a sebesség és hőmérséklet eloszlást hasonlósági függvényekkel. Numerikus közelítő megoldásokat állítunk elő, melyekkel szemléltetjük a határrétegben végbemenő sebesség és hőmérséklet változást.

Kulcsszavak: Navier-Stokes egyenlet, nem-newtoni folyadék, áteresztő felület, porózus közeg.

1. Bevezetés

A határréteg áramlás már több mint száz éve ismert, és azóta is aktívan kutatott területe a folyadékmechanikának. Elsőként az 1900-as évek elején Heinrich Blasius publikált vízszintes síklap menti folyadékáramlás kísérő jelenségeként megfigyelt határréteg áramlást leíró modelleket és ismertette azok analitikus megoldásait [2]. Az azt követő évtizedekben maradt a síklap mentén fölvetett modell, különböző feltételekkel, melyek leírják a síklap mozgását, áteresztő képességét. Az 1970-es években megjelent publikációkban találkozhatunk először a függőleges síklap körüli határréteg áramlás vizsgálatával [4], [5]. A kutatási tématerület

népszerűségét a széleskörű gyakorlati alkalmazhatóságának köszönheti. A határréteg áramlást alkalmazzák például gázturbinák működtetésénél, polimer lemeztáblák és lemezvártyák gyártásánál, papírgyártás és üvegfüzés során, műanyagok extrudálásánál, a geofizikában, geotermikus energia hasznosításánál [1], [7], [8].

Célunk egy vízszintes és egy függőleges áramlásra fölírt modell bemutatása és hasonlósági megoldásai előállítás.

2. Matematikai modellek

Mindkét esetben kétdimenziós állandósult lamináris áramlást feltételezünk összenyomhatatlan hatványtörvény szerinti folyadék esetén. A folyadék félig végtelen síklap mentén áramlik, melynek a határréteg fölötti része T_∞ hőmérsékletű és állandó U_∞ sebességgel áramlik. A Navier-Stokes egyenletről származtatott folytonossági egyenlet, mely mindkét modellben az anyag összenyomhatatlanságát fejezi ki: $(\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) = 0$.

2.1. Vízszintes síklap feletti áramlás

A mozgás és energiaegyenlet:

$$u_h \frac{\partial u_h}{\partial x} + v_h \frac{\partial u_h}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \quad u_h \frac{\partial T}{\partial x} + v_h \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_t \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1)$$

ahol u_h és v_h a sebesség x illetve y irányú komponensei, T a határrétegben lévő folyadék hőmérséklete. Alkalmazzuk a $\tau_{xy} = K |\partial u_h / \partial y|^{n-1} (\partial u_h / \partial y)$ nyírási feszültség és nyírási sebesség közötti hatványtörvény szerinti kapcsolatot, ahol $\gamma |\partial u_h / \partial y|^{n-1}$ jelöli a kinematikai viszkozitást, K a konzisztencia index, α_t a hődiffúzió és $\gamma = K / \rho$.

Az egyenletekhez járuló peremfeltételek:

$$\text{- a síklap felületén } (y = 0): u_h(x, 0) = 0, \quad v_h(x, 0) = v_w(x), \quad -k(\partial T / \partial y) = h_f(T_f - T_w), \quad (2)$$

ahol $v_w(x)$ a síklap áteresztési képessége, h_f a hőátadási tényező, és k a hővezetési együttható,

$$\text{- a határréteg fölött } (y \rightarrow \infty): u(x, \infty) = U_\infty, \quad T(x, \infty) = T_\infty \quad (3)$$

ahol T_w jelöli a síklap hőmérsékletét és fennáll a következő reláció: $T_f > T_w > T_\infty$.

Bevezetjük az $\eta_h = a \frac{y}{x^\beta}$, $\psi = b x^{-\alpha} f_h(\eta)$, $w(x, y) = (T - T_\infty) / (T_f - T_\infty)$, alábbi dimenziómentes

változókat, melyben az a, b, α, β konstansok, a ψ pedig az áramfüggvény. Az $u = \partial \psi / \partial y$, $v = -\partial \psi / \partial x$ alkalmazásával automatikusan teljesül a folytonossági egyenlet.

Másrészről behelyettesítve a mozgásegyenletre és elvégezve a megfelelő egyszerűsítéseket:

$$\left(|f_h''|^{n-1} f_h'' \right)' + \frac{1}{n+1} f_h f_h'' = 0, \quad (4)$$

$$f_h'(0) = 0, \quad f_h(0) = f_w, \quad f_h'(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} f_h'(\eta) = 1 \quad (5)$$

ahol $f_w = -(n+1)v_w(x)(x^n / \lambda U_\infty^{2n-1})$ jelöli a síklapon átáramló mennyiséget.

Az energiaegyenletről a w hasonlósági függvényrel $\Theta_h(\eta) = w(x, y)$ dimenziómentes hőmérsékletre kapott egyenlet

$$\left(|f_h''(\eta)|^{n-1} \Theta_h'(\eta) \right)' + \frac{\text{Pr}}{n+1} f_h(\eta) \Theta_h'(\eta) = 0, \quad (6)$$

ahol $Pr = \gamma / \omega$ a Prandtl-számot jelöli. Transzformálva az energiaegyenlethez (3)-ban felírt feltételt: $\Theta'_h(0) = -(x\gamma/u_\infty^{2-n})^{1/(n+1)} k^{-1} h_f(x)(1 - \Theta_h(0))$. Megjegyezzük, hogy csak $h_f(x) = c x^{-1/(n+1)}$ esetén létezik hasonlósági megoldás. A (3) felírt másik feltételt a $\Theta(\infty) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta(\eta) = 0$ feltétellel jellemezhetjük. A (4), (6) egyenletrendszer megoldásait a [3] dolgozatban mutattuk be.

2.2. Függőleges síklap menti áramlás

A mozgás és energiaegyenlet:

$$\bar{u} = \frac{gK_v\beta_v}{\nu}(T - T_\infty), \quad \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}, \quad (7)$$

ahol $\bar{u}$ és $\bar{v}$ jelölik az $\bar{x}$ és $\bar{y}$ irányú sebességkomponenseket, g a gravitációs gyorsulás, K_v a porózus közeg áteresztő képessége, β_v a hőtágulási együttható, ν a kinematikai viszkozitás, T a folyadék hőmérséklete és α_m jelöli a hőmérséklet-vezetési tényezőt.

Bevezetjük az alábbi dimenziómentes változókat:

$x_v = \bar{x}/L$, $y_v = Ra^{1/2}(\bar{y}/L)$, $u_v = Ra^{-1}(L/\alpha_m)\bar{u}$, $v_v = Ra^{-1/2}(L/\alpha_m)\bar{v}$, $\theta_v = (T - T_\infty)/(T_r - T_\infty)$, ahol L a felület karakterisztikus hossza, T_r a referencia hőmérséklet és $Ra = gK_v\beta_v(T_r - T_\infty)L/\alpha_m\nu$ a porózus közeg Rayleigh száma. Alkalmazva ezeket a változókat, az alábbi dimenziómentes egyenletrendszert kapjuk (lásd Pop and Ingham [8]):

$$u_v = \theta_v, \quad u_v \frac{\partial \theta_v}{\partial x} + v_v \frac{\partial \theta_v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta_v}{\partial y^2}. \quad (8)$$

A fizikai jelenséget az alábbi peremfeltételekkel írjuk le:

$$\text{- ha } y = 0: v_v(x, 0) = 0, \quad A(x)(T_r - T_\infty)\theta_v(x, 0) - B(x)(T_r - T_\infty) \frac{Ra^{1/2}}{L} \left(\frac{\partial \theta_v}{\partial y} \right)_{y=0} = C(x); \quad (9)$$

$$\text{- ha } y \rightarrow \infty: \theta_v(x, y) \rightarrow 0, \quad (10)$$

ahol $A(x)$, $B(x)$ és $C(x)$ egyelőre x ismeretlen függvényei.

Keressük az (8) egyenletrendszer hasonlósági megoldását az alábbi formulákkal:

$$\eta_v = x^r y, \quad \psi_v(x, y) = x^p f_v(\eta), \quad \theta_v(x, y) = x^q h(\eta), \quad (11)$$

ahol ψ_v az áramfüggvény, a szokásos értelmezésben: $u_v = \partial \psi_v / \partial y$ és $v_v = -\partial \psi_v / \partial x$. A (8) egyenletekből az (11)-gyel és a paraméterekre $p = 1 + m$, $q = 1 + 2m$ és $r = m$ választással kapjuk:

$$f'_v = h, \quad h'' - \left(\frac{1 + 2m}{2} \right) f'_v h + (1 + m) f_v h' = 0. \quad (12)$$

A hasonlósági változóval dimenziómentesített peremfeltételek:

$$\eta_v = 0: \quad f_v(0) = 0, \quad (1 - \varepsilon)h(0) - \varepsilon h'(0) = 1, \quad (13)$$

$$\eta_v \rightarrow \infty: \quad h(\eta_v) \rightarrow 0. \quad (14)$$

A (12)-ben felírt egyenleteknek a (13) és (14)-el létezik hasonlósági megoldása, ahol $\varepsilon = b_v(T_r - T_\infty)^{3/2}$, továbbá vizsgáljuk az $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \rightarrow \infty$ eseteket. A (12) csatolt egyenletrendszer megoldásait a [6] dolgozatban mutattuk be.

3. Numerikus megoldások

A (4),(6) és (12) feladatok numerikus közelítő megoldásait MAPLE 12 programmal állítottuk elő, alkalmazva a beépített peremérték megoldó módszert. A megoldások szemléltetése a prezentációban illetve a [3] és [6] cikkekben látható.

4. Összefoglaló

Vizsgált modelljeink hasonlósági megoldásaival megadjuk a kialakuló határrétegben végbemenő sebesség és hőmérséklet változásokat. Vízszintes síklap esetén a hidrodinamikus határréteg vastagsága jelentősen csökken n növelésével, továbbá a fal hőmérséklet és a termikus határréteg vastagsága csökken a Pr , n és f_w paraméterek növelésének hatására.

Függőleges síklap körüli áramlásnál a megoldásokból látszik, hogy $\varepsilon = 0$ esetén a hidrodinamikai és termikus határréteg vastagsága csökken, míg a kezdeti sebesség és hőmérséklet állandó az m paraméter növekedése mellett. Míg $\varepsilon = 1$ és $\varepsilon \rightarrow \infty$ esetekben a kezdeti sebesség és hőmérséklet csökken a síklap mentén az m paraméter növekedésének hatására, emellett ezekben az esetekben a határrétegek vastagsága állandónak tekinthető.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú "Nemzeti Kiválóság Program - Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése országos program" című kiemelt projekt keretei között valósult meg.

Irodalom

- [1] Aziz A.: *A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition*, Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 14 (2009), pp. 1064-1068.
- [2] Blasius H.: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Z. Math. Phys., 56 (1908), pp. 1–37.
- [3] Bognár G., Hriczó K.: *Laminar thermal boundary layer model for power-law fluids over a permeable surface with convective boundary condition*, in Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology, Harvard, Cambridge, USA, January 25-27, 2012. pp. 198-203., ISBN:978-1-61804-065-7
- [4] Cheng P., Minkowycz W. J.: *Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, Journal of Geophysical Research 82 (14) (1977), pp. 2040-2044.
- [5] Furumoto A. S.: *A systematic program for geothermal exploration on the island of Hawaii*, paper presented at the 45th Annual International Meeting, Soc. Of Explor. Geophys., Denver, Colo. Oct. 12-16, 1975.
- [6] Hriczó Krisztián: *Termikus határréteg áramlás vizsgálata folyadékkal telített porózus közegben*, Tavaszi Szél 2013., Budapest, pp. 184-190., ISBN 978-963-89560-2-6
- [7] Nazar R., Arifin N. M., Pop I.: *Free convection boundary layer flow over vertical and horizontal flat plates embedded in a porous medium under mixed thermal boundary conditions*, Int. Comm. in Heat and Mass Transfer 33 (2006) pp. 87-93.
- [8] Pop I., Ingham D. B.: *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, Oxford, 2001, pp. 381-430.