FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XIX.

Kolozsvár, 2014. március 20–21.

LOKÁLISAN ÖNKORLÁTOZÓ BARRIER FÜGGVÉNNYEL MEGADOTT NEM MEGENGEDETT BELSŐPONTOS ALGORITMUS

INFEASIBLE INTERIOR-POINT ALGORITHM WITH LOCALLY SELF-CONCORDANT BARRIER FUNCTION

DARVAY Zsolt, TAKÁCS Petra-Renáta

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar, Magyar Matematika és Informatika Intézet, Cím: 400084, Románia, Kolozsvár, Kogălniceanu 1; Telefon: +40 264 405327, levelezési cím: darvay@cs.ubbcluj.ro

Abstract

In this paper we introduce a new infeasible interior-point algorithm, which is suitable for solving linear optimization problems. With the algebraic transformation of the system which defines the central path we introduce a new search direction, which can also be given with a locally self-concordant barrier function. Because of the specific character of the search direction, the kernel function which determinates the barrier function is not defined on a neighbourhood of the origin.

Keywords: linear optimization, infeasible interior-point algorithm, self-concordant barrier function, Newton's method, search direction

Mathematics Subject Classification (2010): 90C05, 90C51.

Összefoglalás

Egy új nem megengedett belsőpontos algoritmust vezetünk be, amely lineáris optimalizálási feladatok megoldására alkalmas. A centrális útnak megfelelő egyenletrendszer algebrai átalakításával egy új keresési irányt határozunk meg, amely egy lokálisan önkorlátozó barrier függvénnyel is megadható. A keresési irány sajátos jellegéből adódóan a barrier függvényt meghatározó kernel függvény az origónak egy adott környezetében nem értelmezett.

Kulcsszavak: lineáris optimalizálás, nem megengedett belsőpontos algoritmus, önkorlátozó barrier függvény, Newton módszer, keresési irány

1. Bevezetés

A gyakorlati feladatoknak egy széles köre visszavezethető optimalizálási problémákra. Fountoulakis, Gondzio és Zhlobich belsőpontos módszereket alkalmaztak a tömörített érzékelés (compressed sensing) kapcsán felmerülő feladatok megoldására [3]. Lineáris optimalizálással foglalkozunk, olyan belsőpontos algoritmusokat [5, 7] használva fel, amelyek nem megengedett pontokból indulnak.

Nemrég, egy olyan új belsőpontos algoritmust határoztunk meg, amely egy új keresési irányra épül [2]. A centrális útnak megfelelő nemlineáris összefüggésre egy algebrai

átalakítást alkalmaztunk. Ezt követően a Newton módszerrel új irányokat kaptunk. Az algoritmus olyan pontokat generál, amelyek mindvégig megengedett megoldásai a primál, illetve duál feladatoknak. 2006-ban Roos egy olyan nem megengedett pontokon keresztül haladó algoritmust publikált, amely teljes Newton lépéseket tesz meg a következő pont meghatározása érdekében [4]. Ebben a cikkben egy teljes Newton lépéses nem megengedett algoritmust vezetünk be, amely a [2]-beli irányokra alapszik.

A cikk a Collegium Talentum és az Erdélyi Múzeum-Egyesület támogatásával készült. A szerzők köszönetüket fejezik ki a kutatási munkához nyújtott támogatásért.

2. A lineáris programozási feladat

Tekintsük a következő primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned} \min c^T x, & & \max b^T y, \\ Ax = b, & \quad (P) & A^T y + s = c, \quad (D) \\ x \geq 0, & & s \geq 0, \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$.

A centrális utat jellemező rendszer a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e, & \mu &> 0, \end{aligned} \quad (2)$$

ahol xs a komponensenkénti szorzata az x és s vektoroknak, vagyis $xs = [x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n]^T$. Ha a belső pont feltétel fennáll, tehát létezik szigorúan megengedett megoldása a primál és a duál feladatnak is, akkor egy rögzített $\mu > 0$ esetén a (2) rendszernek egyértelmű megoldása van, melyet μ -centrumnak vagy *analitikus-centrumnak* nevezünk (Sonnevend [6]). Ha $\mu \rightarrow 0$, akkor a centrális út a feladat optimális megoldásához konvergál.

3. A módosított feladatpár

Legyen $\zeta > 0$, és feltételezzük, hogy a primál-duál feladatpárnak létezik egy (x^*, y^*, s^*) optimális megoldása, amelyre $\|x^* + s^*\|_\infty \leq \zeta$, ahol $\|\cdot\|_\infty$ az l_∞ norma. A kezdeti pontok a következőképpen vannak megadva: $x^0 = \zeta e$, $y^0 = 0$, $s^0 = \zeta e$, $\mu^0 = \zeta^2$. Vezessük be az

$$r_b^0 = b - Ax^0, \quad r_c^0 = c - A^T y^0 - s^0$$

jelöléseket. Mivel a kezdeti pontok nem megengedett megoldásai a primál és a duál feladatoknak, ezért $0 < \kappa \leq 1$ esetén tekintsük az alábbi módosított primál-duál feladatpárt:

$$\min \{(c - \kappa r_c^0)^T x : Ax = b - \kappa r_b^0, \quad x \geq 0\} \quad (P_\kappa)$$

$$\max \{(b - \kappa r_b^0)^T y : A^T y + s = c - \kappa r_c^0, \quad s \geq 0\} \quad (D_\kappa)$$

A centrális utat jellemző rendszer a következőképpen adható meg:

$$\begin{aligned} b - Ax &= \kappa r_b^0, & x &\geq 0, \\ c - A^T y - s &= \kappa r_c^0, & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e. \end{aligned} \quad (3)$$

A továbbiakban az [1] cikkben bevezetett módszert használjuk az elmozdulásvektorok meghatározására. Ehhez tekintsük az $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ felett értelmezett $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ folytonosan differenciálható és invertálható függvényt. Ekkor a centrális utat meghatározó (3) rendszer a következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned}
b - Ax &= \kappa_b^0, & x &\geq 0, \\
c - A^T y - s &= \kappa_c^0, & s &\geq 0, \\
\varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), & \forall i &= 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{4}$$

A cikk további részében a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esettel foglalkozunk. Ha x és (y, s) szigorúan megengedett megoldása a (P_κ) , illetve (D_κ) feladatoknak, akkor a Newton módszert alkalmazva a (4) rendszerre, a következő lineáris rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
A\Delta x &= 0, \\
A^T \Delta y + \Delta s &= 0, \\
\left(s - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right)\Delta x + \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right)\Delta s &= \sqrt{\mu x s} - xs.
\end{aligned} \tag{5}$$

A továbbiakban a nem megengedett algoritmust vizsgáljuk.

4. Az algoritmus

Feltételezve, hogy x és (y, s) szigorúan megengedett megoldása a (P_κ) , illetve (D_κ) feladatoknak, egy olyan $(\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s)$ lépést határozunk meg, amelyre a kapott vektorok a (P_{κ_+}) és (D_{κ_+}) feladatoknak is megengedett megoldásai lesznek, ahol $\kappa_+ = (1 - \theta)\kappa$ és $0 < \theta < 1$. Ekkor a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
A\Delta^f x &= \theta \kappa_b^0, \\
A^T \Delta^f y + \Delta^f s &= \theta \kappa_c^0, \\
\left(s - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right)\Delta^f x + \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right)\Delta^f s &= \sqrt{\mu x s} - xs.
\end{aligned} \tag{6}$$

Vezessük be a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$, valamint $d_x = \frac{v\Delta^f x}{x}$ és $d_s = \frac{v\Delta^f s}{s}$ jelöléseket. Fennáll a $\mu v(d_x + d_s) = s\Delta^f x + x\Delta^f s$ összefüggés. Ezeknek a jelöléseknek a segítségével felírható a (6) rendszer skálázott alakja:

$$\begin{aligned}
\hat{A}d_x &= \frac{\theta \kappa}{\mu} r_b^0, \\
\hat{A}^T \Delta^f y + d_s &= \theta \kappa \frac{r_c^0 v}{s}, \\
d_x + d_s &= p_v,
\end{aligned} \tag{7}$$

ahol $p_v = \frac{2(v - v^2)}{2v - e}$ és $\hat{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag}\left(\frac{x}{v}\right)$. Tetszőleges ξ vektor esetén $\text{diag}(\xi)$ azt a diagonálmátrixot jelöli, melynek főátlóján a vektor elemei találhatóak, az eredeti sorrendben.

Ha $d_x + d_s = -\nabla \Psi(v)$, akkor a $\Psi : \mathfrak{R}_+^n \rightarrow \mathfrak{R}, \Psi(v) = \sum_{i=1}^n \psi(v_i)$ függvényt barrier függvénynek nevezzük, ahol $\psi : \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}$ a hozzá tartozó kernel függvény. A fenti esetben $\psi : \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathfrak{R}, \psi(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \ln(2t - 1)$, tehát a kernel függvény $\mathfrak{R}_+$ -nak csak egy

részintervallumán értelmezett. A centrális úttól való távolság mérésére a $\delta(x, s; \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \left\| \frac{v - v^2}{2v - e} \right\|$ jelölést használjuk, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi normát (vagy l_2 normát) jelöli. Az algoritmus a következőképpen adható meg.

Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter, és $\tau > 0$ a centralitási paraméter. Feltételezzük, hogy $x^0 > 0$, $s^0 > 0$ és $x^0 s^0 = \mu^0 e$.

begin

$x := x^0; \quad y := y^0; \quad s := s^0;$

$\mu := \mu^0;$

$\kappa := 1;$

while $\max(x^T s, \|b - Ax\|, \|c - A^T y - s\|) \geq \varepsilon$ **do**

begin

$(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s);$

$\mu := (1 - \theta)\mu;$

$\kappa := (1 - \theta)\kappa;$

$(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s);$

end

end.

1. ábra. Nem megengedett belsőpontos algoritmus

5. Következtetés

Egy új, lineáris optimalizálásra vonatkozó belsőpontos algoritmust vezettünk be, amely lokálisan önkorlátozó barrier függvényekkel is megadható. Az ennek megfelelő kernel függvény sajátossága az, hogy a pozitív ortánsnak csak egy részintervallumán értelmezett. Az algoritmus nem megengedett pontokon keresztül közelíti meg az optimális megoldást.

Irodalom

- [1] Darvay, Zs: New interior point algorithms in linear programming, *Advanced Modeling and Optimization*, 2003, 5(1):51-92.
- [2] Darvay, Zs., Felméri, Á., Forró, N., Papp, I., Takács, P: Egy új belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálási feladatok megoldására. In Bitay Enikő (szerk.) *Fiatal műszakiak tudományos ülészsaka XVII.*, EME Kiadó, Kolozsvár, 2012, 87-90.
- [3] Fountoulakis, K., Gondzio, J., Zhlobich, P: Matrix-free interior point method for compressed sensing problems, *Mathematical Programming Computation*, 2013, DOI 10.1007/s12532-013-0063-6.
- [4] Roos, C: A full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point algorithm for linear optimization, *SIAM J. Optimization*, 16(4): 1110–1136, 2006.
- [5] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [6] Sonnevend, Gy: An “analytic center” for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa and J. Szelezsán and B. Strazicky (eds.), *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1986, 84:866-876.
- [7] Ye, Y: *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*, John Wiley & Sons, 1997.