FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XIX.

Kolozsvár, 2014. március 20–21.

EGY ÚJ PRIMÁL-DUÁL BELSŐPONTOS ALGORITMUS LINEÁRIS KOMPLEMENTARITÁSI FELADATRA

A NEW PRIMAL-DUAL INTERIOR-POINT ALGORITHM FOR LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS

DARVAY Zsolt, PAPP Ingrid-Magdolna

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar, Magyar Matematika és Informatika Intézet, 400084, Románia, Kolozsvár, Kogălniceanu 1; Telefon: +40 264 405327, Eümail: darvay@cs.ubbcluj.ro

Abstract

We deal with optimization opportunities arising from engineering problems. We solve monotone linear complementarity problems using interior-point algorithms. The optimal solution is approximated by following an ideal curve, the central path. We determine new search directions by solving the system of equations which defines the central path, and then using Newton's method. This algorithm has the same theoretical efficiency as the best known interior-point algorithms.

Keywords: interior-point algorithm, primal-dual, linear complementarity problem, Newton's method, search direction

Mathematics Subject Classification (2010): 90C33, 90C51.

Összefoglalás

Olyan optimalizálási lehetőségekkel foglalkozunk, amelyek mérnöki problémákból származnak. Monoton lineáris komplementaritási feladatokat oldunk meg belsőpontos algoritmusokkal. Az optimális megoldást egy ideális görbe, a centrális út követése által közelítjük meg. Egy új keresési irányt adunk meg a centrális utat meghatározó egyenletrendszer algebrai átalakítása által, majd ezt követően a Newton módszert alkalmazva. Az algoritmus elméleti hatékonysága azonos az eddig ismert legjobb belsőpontos algoritmusokéval.

Kulcsszavak: belsőpontos algoritmus, primál-duál, lineáris komplementaritási feladat, Newton módszer, keresési irány

1. Bevezetés

Mérnöki és gazdasági problémák gyakran vezetnek különböző optimalizálási feladatokhoz, melynek során egy függvény szélsőértékét kell megkeresnünk bizonyos feltételek mellett. A merev testek dinamikájának problémája esetén optimalizációs eszközöket használhatunk, mivel általában egy közönséges differenciálegyenletet kell megoldani egy korlátos sokaságon. A feladat egy lineáris komplementaritási problémára vezethető vissza, amely megoldható a Lemke-féle pivotalgorithmus segítségével [1]. Amennyiben belsőpontos algoritmusokat alkalmazunk, hatékonyabb eredményt várhatunk el, mivel ezek általában polinom időben határozzák meg az optimális megoldást.

Az első belsőpontos algoritmust Karmarkar publikálta 1984-ben [6]. Ezt az algoritmust sikeresen alkalmazták a lineáris optimalizálási feladatok megoldására [9, 11], majd általánosították lineáris komplementaritási feladatra is [7, 8].

A belsőpontos módszerek esetén a keresési irányoknak egy osztályát a centrális útnak megfelelő rendszer algebrai átalakításával határozhatjuk meg [2].

A [3] cikkben egy lineáris optimalizálásra vonatkozó új algoritmust vezettünk be, sajátos elmozdulásvektorokkal. Az algebrai átalakítást úgy végeztük, hogy a centrális utat alkotó nemlineáris összefüggésekre az identitás függvény és a négyzetgyök függvény különbségét alkalmaztuk. Észrevehetjük, hogy az így kapott keresési irány nem vezethető le egyetlen eddig ismert belsőpontos algoritmusokra vonatkozó függvényosztályból sem, például nem adható meg önreguláris függvényekkel és az önkorlátozási tulajdonság is csak lokálisan teljesül. Később az algoritmust általánosítottuk konvex kvadrátikus programozásra [4] és lineáris feltételektől függő konvex optimalizálásra [5]. A továbbiakban ezt a módszert terjesztjük ki monoton lineáris komplementaritási feladatra.

A cikk a Collegium Talentum és az Erdélyi Múzeum-Egyesület támogatásával készült. A szerzők köszönetüket fejezik ki a kutatási munkához nyújtott támogatásért.

2. A lineáris komplementaritási feladat

A lineáris komplementaritási feladat célja egy olyan (x, s) páros meghatározása, melyre teljesül a következő összefüggés:

$$\begin{aligned} s &= Mx + q, \\ (x, s) &\geq 0, \\ x^T s &= 0, \end{aligned} \tag{P}$$

ahol s , x és q n -dimenziós oszlopvektorok és M egy n soros és n oszlopos mátrix. Ha az M mátrix pozitív szemidefinit, azaz $z^T M z \geq 0$ minden z vektorra, akkor monoton lineáris komplementaritási feladatról beszélünk. A cikk további részében az M mátrixról feltételezzük, hogy pozitív szemidefinit, tehát monoton lineáris komplementaritási feladatokat vizsgálunk. Annak ellenére, hogy a lineáris komplementaritási feladat nem egy optimalizálási probléma, fontos szerepe van a matematikai optimalizálásban, mivel a Karush-Kuhn-Tucker optimalizálási feltételek sok esetben ilyen problémákhoz vezetnek. Ez történik lineáris és kvadrátikus optimalizálás esetén is.

1. Feltétel (belső pont feltétel). Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy létezik olyan (x^0, s^0) páros, amely teljesíti a következő feltételt:

$$\begin{aligned} s^0 &= Mx^0 + q, \\ (x^0, s^0) &> 0. \end{aligned} \tag{BPF}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy (BPF) fennáll, amely az önduális beágyazás módszerével mindig megvalósítható. Ekkor $x^0 = s^0 = e$, ahol e az egyesekből álló n -dimenziós vektor: $e = [1, \dots, 1]^T$.

A feladat optimalitási feltételét a következő rendszer írja le:

$$\begin{aligned} s &= Mx + q, \\ (x, s) &\geq 0, \\ xs &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol xs az x és s vektorok komponensenkénti szorzata, vagyis $xs = [x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n]^T$. Azt mondjuk, hogy az x és s vektorok teljesítik a megengedettségi feltételt, ha az $s = Mx + q$ összefüggés fennáll. A belsőpontos algoritmusok a megengedett tartomány belsejében haladó centrális utat követve konvergálnak a megoldáshoz.

A centrális utat az alábbi $\mu > 0$ paramétertől függő rendszerrel határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} s &= Mx + q, & x &> 0, \\ xs &= \mu e, & \mu &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Amennyiben a belső pont feltétel fennáll, akkor a (2) rendszernek minden rögzített $\mu > 0$ esetén egy, μ - centrumnak nevezett, egyértelmű megoldása van [10].

3. Egy új primál-duál algoritmus

A [2-5] cikkekben bemutatott eljáráshoz hasonlóan a centrális útnak megfelelő nemlineáris összefüggést egy vele egyenértékű alakra hozzuk. Ennek érdekében tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett, folytonosan differenciálható és invertálható φ függvényt. Ekkor a centrális utat meghatározó (2) rendszer felírható a következő alakban:

$$\begin{aligned} s &= Mx + q, & x &> 0, \\ \varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), & \forall i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

Ezt követően a Newton módszert alkalmazva erre a rendszerre meghatározhatjuk a keresési irányokat.

Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter, és $0 < \tau < 1$ a centralitási paraméter. Feltételezzük, hogy (x^0, s^0) teljesíti a belső pont feltételt, $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}} > \frac{e}{2}$ és $\delta(x^0, s^0; \mu^0) < \tau$. Legyen $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$.

begin

$x = x^0; \quad s = s^0; \quad \mu = \mu^0;$

while $x^T s > \varepsilon$ **do begin**

$\mu = (1 - \theta)\mu;$

meghatározzuk a $(\Delta x, \Delta s)$ lépést a (4) összefüggés alapján

$x = x + \Delta x;$

$s = s + \Delta s;$

end

end.

1. ábra. Belsőpontos algoritmus monoton lineáris komplementaritási feladatra

A [4-5] publikációkhoz hasonlóan az alábbiakban a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esettel foglalkozunk. A (3) nemlineáris rendszerre alkalmazva a Newton módszert az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} M\Delta x - \Delta s &= 0, \\ \left(s - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right)\Delta x + \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right)\Delta s &= \sqrt{\mu xs} - xs. \end{aligned} \quad (4)$$

Bevezetjük a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$, $d_x = \frac{v\Delta x}{x}$ és $d_s = \frac{v\Delta s}{s}$ jelöléseket. Ebből következik, hogy $\mu v(d_x + d_s) = s\Delta x + x\Delta s$.

Egy tetszőleges ξ vektor esetén legyen $\text{diag}(\xi)$ az a diagonálmátrix, melynek főátlóján a vektor elemei találhatók a megadott sorrendben.

Ekkor a (4) rendszer a következő skálázott alakban írható fel:

$$\begin{aligned} -\Lambda d_x + d_s &= 0, \\ d_x + d_s &= p_v, \end{aligned} \quad (5)$$

ahol $\Lambda = \mu VS^{-1}MVS^{-1}$, $V = \text{diag}(v)$, $S = \text{diag}(s)$, $p_v = \frac{2(v-v^2)}{2v-e}$.

A centrális úttól való távolság becslését a $\delta(x, s; \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \left\| \frac{v-v^2}{2v-e} \right\|$ mértékkel valósítjuk

meg, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma. A fentiek alapján az algoritmust az 1. ábrán látható módon adhatjuk meg.

4. Következtetés

A [3] cikkben bevezetett algoritmust általánosítottuk monoton lineáris komplementaritási feladatra. Az új módszer lényege az, hogy a centrális útnak megfelelő nemlineáris egyenletekre a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt alkalmazzuk. Minden iterációban az alkalmazott ekvivalens átalakítást követően a Newton módszer segítségével határozhatjuk meg az elmozdulási irányt. Ha a kezdeti pontok teljesítik a megengedettségi feltételt, akkor a primál és a duál térben is teljes Newton lépést lehet megtenni, és az így kapott új pontok is megengedettek lesznek. Ezt addig ismételjük, ameddig az optimális megoldást egy adott közelítéssel meg nem kapjuk.

Irodalom

- [1] Anitescu, M., Potra, F. A: *Formulating dynamic multi-rigid-body contact problems with friction as solvable linear complementarity problems*, Nonlinear Dynamics, 1997, 14(3): 231-247.
- [2] Darvay, Zs: *New interior point algorithms in linear programming*, Advanced Modeling and Optimization, 2003, 5(1):51-92.
- [3] Darvay, Zs., Felméri, Á., Forró, N., Papp, I., Takács, P: *Egy új belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálási feladatok megoldására*, in Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XVII., EME Kiadó, Kolozsvár, 2012, 87-90.
- [4] Darvay, Zs., Papp, I.-M: *Konvex kvadratikus optimalizálási algoritmus új elmozdulásvektorral*, in Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XVIII., EME Kiadó, Kolozsvár, 2013, 111-114.
- [5] Darvay, Zs., Takács, P.-R: *Egy új rövid lépéses algoritmus konvex optimalizálási feladatra lineáris feltételekkel*, in Fiatal Műszakiak Tudományos Ülésszaka XVIII., EME Kiadó, Kolozsvár, 2013, 115-118.
- [6] Karmarkar, N. K: *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica, 1984, 4: 373-395.
- [7] Kojima, M., Megiddo, N., Noma, T., Yoshise A: *A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*, Springer, 1991.
- [8] Mansouri, H., Pirhaji, M: *A polynomial interior-point algorithm for monotone linear complementarity problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, 2013, 157(2):451-461.
- [9] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [10] Sonnevend, Gy: *An "analytic center" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming*, in System Modeling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1986, 84: 866-876.
- [11] Wright, S. J: *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, 1997.