FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XVIII.

Kolozsvár, 2013. március 21–22.

EGY ÚJ RÖVID LÉPÉSES ALGORITMUS KONVEX OPTIMALIZÁLÁSI FELADATRA LINEÁRIS FELTÉTELEKKEL

DARVAY Zsolt, TAKÁCS Petra-Renáta

Abstract

The goal of our research is to generalize a linear optimization primal-dual algorithm for convex optimization problem with linear constraints. After the algebraically equivalent transformation of the system of equations, which defines the central path, we apply Newton's method and we obtain the new search directions.

Key words:

linearly constrained convex optimization, short-step algorithm, primal-dual algorithm

Mathematics Subject Classification (2010): 90C25, 90C51.

Összefoglalás

Kutatásunk célja a lineáris programozás egy primál-duál algoritmusának általánosítása olyan konvex optimalizálási feladatra, amelyben a feltételek lineárisak. A centrális utat meghatározó egyenletrendszer algebrai átalakítása után a Newton módszert alkalmazva, új elmozdulásvektorokat határozzunk meg.

Kulcsszavak:

konvex optimalizálás lineáris feltételekkel, rövid lépéses algoritmus, primál-duál algoritmus

1. Bevezetés

A mérnöki és gazdasági feladatok megoldásai gyakran nemlineáris optimalizálási problémákat eredményeznek. Például a jelfeldolgozásra vonatkozó eljárások olyan konvex optimalizálási feladatokhoz vezethetnek, amelyekben a feltételek lineárisak [4].

A lineáris programozási feladatok megoldására Karmarkar 1984-ben közölte [5] belső pontokon keresztül haladó projektív algoritmusát, amellyel megalapozta a belsőpontos algoritmusok fejlődését. A lineáris programozásra vonatkozó eredményekről a [7, 8], konvex optimalizálásról pedig az [1, 6] könyvekben olvashatunk.

A továbbiakban a [3] cikkben bevezetett lineáris programozási algoritmust fogjuk általánosítani olyan konvex optimalizálási problémára, amelyben a feltételek lineárisak. A primál-duál belsőpontos algoritmusoknak a két legtöbbet vizsgált csoportja a rövid lépéses (short-step) és hosszú lépéses (long-step) módszerek. Az általunk bevezetett elmozdulásvektorokkal egy új rövid lépéses algoritmust határozzunk meg.

2. A konvex optimalizálás lineáris feltételekkel

Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned} \min f(x) & \quad \max b^T y + f(x) - (\nabla f(x))^T x, \\ Ax = b, & \quad A^T y + s - \nabla f(x) = 0, \\ x \geq 0, & \quad s \geq 0, \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{(P)} \\ \text{(D)} \end{matrix}$$

ahol A egy m soros és n oszlopos mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$ pedig oszlopvektorok. Feltételezzük, hogy $\text{rang}(A) = m$, az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ egy konvex és kétszer folytonosan differenciálható függvény. A $\nabla f(x)$ az f függvény gradiensét jelöli.

1. Feltétel (belső pont feltétel). Létezik (x^0, y^0, s^0) úgy, hogy

$$\begin{aligned} Ax^0 &= b, \quad x^0 > 0, \\ A^T y^0 + s^0 - \nabla f(x^0) &= 0, \quad s^0 > 0. \end{aligned} \quad \text{(BPF)}$$

A belső pont feltétel az általánosság megszorítása nélkül feltételezhető. Az önduális beágyazásból adódóan $x^0 = s^0 = e$, ahol e a következő n -dimenziós vektor: $e = [1, \dots, 1]^T$.

A primál-duál feladat optimális megoldását az alábbi rendszer adja meg:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq 0, \\ A^T y + s - \nabla f(x) &= 0, \quad s \geq 0, \\ xs &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

ahol xs a komponensenkénti szorzata az x és s vektoroknak, vagyis $xs = [x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n]^T$.

Hasonlóan legyen $\frac{x}{s} = \left[\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right]^T$, minden x és s vektorra úgy, hogy $s_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$.

Az (1) rendszer első és második egyenletét *megengedettségi feltételnek*, az utolsó egyenletét pedig *komplementaritási feltételnek* nevezzük. A továbbiakban a komplementaritási feltételt egy paraméteres egyenlettel helyettesítjük, így a következő rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \quad x \geq 0, \\ A^T y + s - \nabla f(x) &= 0, \quad s \geq 0, \\ xs &= \mu e, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ha teljesül a belső pont feltétel, akkor tetszőleges $\mu > 0$ esetén a (2) rendszernek egy egyértelmű megoldása van, melyet μ -centrumnak nevezünk. A különböző paraméterekre kapott μ -centrumok egy folytonos görbét határoznak meg, melyet centrális trajektóriának hívnak. Ha μ tart nullához, akkor ez a centrális út a feladat optimális megoldásához konvergál.

A továbbiakban az elmozdulásvektorokat fogjuk meghatározni a [2] cikkben bevezetett módszerrel, melyet Zhang, Bai és Wang [9] általánosított lineáris feltételekkel rendelkező konvex optimalizálási feladatokra. Ehhez tekintsük az $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ felett értelmezett $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ függvényt, amely a $(0, \infty)$ nyílt intervallumon folytonosan differenciálható, és $\varphi'(t) > 0, \forall t > 0$. Ennek a függvénynek a segítségével a centrális utat meghatározó (2) rendszer a következőképpen alakítható át:

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

$$A^T y + s - \nabla f(x) = 0, s \geq 0, \quad (3)$$

$$\varphi\left(\frac{xs}{\mu}\right) = \varphi(e), \mu > 0.$$

A fenti összefüggésben a φ függvényt komponensenként alkalmazzuk a paraméterként megadott vektorokra. A Newton módszert használva a (3) nemlineáris rendszerre, a következőt kapjuk:

$$A\Delta x = 0,$$

$$A^T \Delta y + \Delta s - \nabla^2 f(x) \Delta x = 0, \quad (4)$$

$$\frac{s}{\mu} \varphi'\left(\frac{xs}{\mu}\right) \Delta x + \frac{x}{\mu} \varphi'\left(\frac{xs}{\mu}\right) \Delta s = \varphi(e) - \varphi\left(\frac{xs}{\mu}\right).$$

A $\nabla^2 f(x)$ az f Hesse-féle mátrixát jelöli, mely pozitív szemidefinit mátrix az f konvexitása miatt.

3. Új elmozdulásvektorok meghatározása

A továbbiakban a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esettel foglalkozunk, és egy új módszert adunk meg az elmozdulásvektorok meghatározására. Ebben az esetben $\varphi'(t) > 0$, ha $t > \frac{1}{4}$, így ezentúl $\frac{xs}{\mu} > \frac{1}{4}$ értékekre fogjuk alkalmazni a függvényt. A (4)-es rendszerbe a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt behelyettesítve a következő összefüggéseket kapjuk:

$$A\Delta x = 0,$$

$$A^T \Delta y + \Delta s - \nabla^2 f(x) \Delta x = 0, \quad (5)$$

$$\left(s - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right) \Delta x + \left(x - \sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right) \Delta s = \sqrt{\mu x s} - xs.$$

A lineáris rendszer skálázása érdekében bevezetjük a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$ vektort és a következő jelöléseket:

$$d_x = \frac{v \Delta x}{x} \text{ és } d_s = \frac{v \Delta s}{s}. \text{ Így a } \mu v (d_x + d_s) = s \Delta x + x \Delta s \text{ és } d_x d_s = \frac{\Delta x \Delta s}{\mu} \text{ összefüggésekhez jutunk.}$$

Ezek alapján az (5) lineáris rendszer a következő alakban írható fel:

$$\bar{A} d_x = 0,$$

$$\bar{A}^T \Delta y + d_s - \overline{\nabla^2 f(x)} d_x = 0, \quad (6)$$

$$d_x + d_s = p_v,$$

ahol $p_v = \frac{2(v - v^2)}{2v - e}$ és $\bar{A} = \frac{1}{\mu} AXV^{-1}$. Itt egy tetszőleges z vektor esetén Z azt a diagonálmátrixot

jelöli, melynek főátlóján a vektor elemei találhatóak. Emellett $\overline{\nabla^2 f(x)} = \mu V S^{-1} \nabla^2 f(x) V S^{-1}$ Hesse-féle mátrix skálázásából kapott mátrix, mely ebben az esetben szintén pozitív szemidefinit, hiszen a V és S pozitív elemekből álló diagonálmátrixok. Az algoritmust a következőképpen definiálhatjuk.

1. Algoritmus Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter. Feltételezzük, hogy (x^0, y^0, s^0) teljesíti a belső pont feltételt, $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$ és $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}} > \frac{e}{2}$.

begin

$x = x^0; y = y^0; s = s^0; \mu = \mu^0;$

while $x^T s > \varepsilon$ **do begin**

$\mu = (1 - \theta)\mu;$

meghatározzuk a $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ elmozdulásvektorokat az (5) összefüggés alapján;

$x = x + \Delta x;$

$y = y + \Delta y;$

$s = s + \Delta s;$

end

end.

4. Következtetések

A lineáris programozás egy primál-duál algoritmusát általánosítottuk olyan konvex optimalizálási feladatra, amelyben a feltételek lineárisak. A centrális útnak megfelelő egyenletrendszer algebrai átalakítása után, a nemlineáris egyenletekre a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt alkalmaztuk. Ezt követően a Newton módszert felhasználva, új elmozdulásvektorokat határoztunk meg.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az Erdélyi Múzeum-Egyesületnek a kutatási munkához nyújtott támogatásért (EME-828.1.2/2012/P.2.).

Irodalom

- [1] Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [2] Darvay, Zs. New Interior Point Algorithms in Linear Programming, *Advanced Modeling and Optimization*, 2003, 5(1):51-92.
- [3] Darvay Zs., Felméri Á., Forró N., Papp I., Takács P. Egy új belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálási feladatok megoldására. In Bitay Enikő (szerk.) *Fiatal műszakiak tudományos ülészsaka XVII.*, EME Kiadó, Kolozsvár, 2012, 87-90.
- [4] Harmany, Z., Thompson, D., Willett, R., Marcia, R.F. Gradient projection for linearly constrained convex optimization in sparse signal recovery. In *17th IEEE International Conference on Image Processing*, 2010, 3361-3364.
- [5] Karmarkar N.K. A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 1984, 4:373-395.
- [6] Nesterov Y. and Nemirovskii A. *Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [7] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior-point Approach*. Chichester: John Wiley and Sons, 1997.
- [8] Ye Y. *Interior Point Algorithms: Theory and Analysis*. Chichester: John Wiley and Sons, 1997.
- [9] Zhang M., Bai Y.Q., Wang G.Q. A new primal-dual path-following interior-point algorithm for linearly constrained convex optimization, *J. Shanghai Univ*, 2008, 12(6): 475-480.

dr. Darvay Zsolt, egyetemi adjunktus,

Takács Petra-Renáta egyetemi hallgató

Babe-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

E-mail: darvay@cs.ubbcluj.r