FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XVIII.

Kolozsvár, 2013. március 21–22.

KONVEX KVADRATIKUS OPTIMALIZÁLÁSI ALGORITMUS ÚJ ELMOZDULÁSVEKTORRAL

DARVAY Zsolt, PAPP Ingrid-Magdolna

Abstract

We introduce a new interior-point algorithm for solving convex quadratic optimization problems. We generalize a recent method for linear programming that is based on an algebraically equivalent transformation of the system of equations which defines the central-path. Using Newton steps we obtain new search directions.

Key words:

convex quadratic optimization, primal-dual, search direction

Mathematics Subject Classification (2010): 90C20, 90C51.

Összefoglalás

Egy új belsőpontos algoritmust vezetünk be, amely konvex kvadratikusan optimalizálási feladatok megoldására alkalmas. Egy olyan új lineáris programozásra vonatkozó módszert általánosítunk, amely a centrális utat meghatározó egyenletrendszer algebrai átalakításán alapszik. A Newton lépéssel új elmozdulásvektorokat határozzunk meg.

Kulcsszavak:

Konvex kvadratikusan optimalizálás, primál-duál, elmozdulásvektor

1. Bevezetés

Informatikai szempontból a mérnöki feladatok három csoportba sorolhatóak: tervezés, analízis és szabályozás. A tervezés folyamatában fontos szerepet kap a megvalósíthatóság, illetve valamilyen (műszaki és gazdasági) szempontból való optimalizálás kérdése. Az optimalizálási problémák megoldására a belsőpontos algoritmusok jól alkalmazhatóak. Például a tömörítő mintavétel esetén konvex kvadratikusan optimalizálási feladatokhoz jutunk [6].

Karmarkar 1984-ben publikálta az első lineáris programozásra vonatkozó belsőpontos algoritmust [5]. Az évek során sikerrel alkalmazták ezeket a módszereket a lineáris optimalizálási feladatok megoldására [8, 10], majd általánosították őket a konvex optimalizálási problémákra [2, 7].

A belsőpontos módszerek esetén az elmozdulásvektoroknak egy osztályát a centrális útnak megfelelő rendszer algebrai átalakításával határozhatjuk meg [3]. Ezt a módszert Achache [1] általánosította konvex kvadratikusan optimalizálási feladatokra. A [4] cikkben egy lineáris optimalizálásra vonatkozó új algoritmust vezettünk be, sajátos elmozdulásvektorokkal. A továbbiakban ezt a módszert terjesztjük ki konvex kvadratikusan optimalizálásra.

A cikk a Collegium Talentum és az Erdélyi Múzeum-Egyesület támogatásával készült. A szerzők köszönetüket fejezik ki a kutatási munkához nyújtott támogatásért.

2. A kvadratikus optimalizálási feladat

Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{aligned} \min c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x, & & \max b^T y - \frac{1}{2} x^T Q x, \\ Ax = b, & (P) & A^T y + s - Qx = c, & (D) \\ x \geq 0, & & s \geq 0, \end{aligned}$$

ahol A egy m soros és n oszlopos mátrix, Q egy n soros és n oszlopos szimmetrikus, pozitív szemidefinit mátrix, b és c pedig m -, illetve n -dimenziós oszlopvektorok és $\text{rang}(A) = m$.

1. Feltétel (belső pont feltétel). Létezik (x^0, y^0, s^0) úgy, hogy

$$\begin{aligned} Ax^0 &= b, & x^0 &> 0, \\ A^T y^0 + s^0 - Qx^0 &= c, & s^0 &> 0. \end{aligned} \quad (\text{BPF})$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy (BPF) fennáll, amely az önduális beágyazás módszerével mindig megvalósítható. Ebben az esetben $x^0 = s^0 = e$, ahol e az egyesekből álló n -dimenziós vektor: $e = [1, \dots, 1]^T$. A primál-duál feladat optimális megoldását a következő rendszerrel határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s - Qx &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Az első két összefüggést *megengedettségi feltételnek* nevezzük, a harmadikat pedig *komplementaritási feltételnek*. A komplementaritási feltétel biztosítja, hogy a megoldás optimális lesz.

Az xs az x és s vektorok komponensenkénti szorzata, vagyis $xs = [x_1 s_1, x_2 s_2, \dots, x_n s_n]^T$.

Használhatjuk az $\frac{x}{s} = \left[\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right]^T$ jelölést is minden x és s vektorra feltételezve, hogy $s_i \neq 0$,

bármely $1 \leq i \leq n$ indexre. A belsőpontos algoritmusok általában a centrális utat követik, melyet az alábbi $\mu > 0$ paramétertől függő rendszerrel adhatunk meg:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s - Qx &= c, & s &\geq 0, \\ xs &= \mu e, & \mu &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Ha a belső pont feltétel fennáll, akkor a (2) rendszernek egy egyértelmű megoldása van minden egyes $\mu > 0$ esetén, melyet *analitikus centrumnak* nevezünk (Sonnevend [9]). A centrumok egy folytonos görbét határoznak meg. Ha a μ paraméter nullához tart, akkor a neki megfelelő centrum az optimális megoldás egy adott pontosságú közelítését szolgáltatja.

3. Egy új primál-duál algoritmus

A továbbiakban a [3] cikkben bevezetett módszert követve, a centrális útnak megfelelő nemlineáris összefüggést egy vele egyenértékű alakra hozzuk, majd a Newton módszert alkalmazva új elmozdulásvektorokat határozunk meg. Ennek érdekében tekintsük a pozitív valós számok halmazán értelmezett φ függvényt, melyről feltételezzük, hogy folytonosan differenciálható és invertálható. Ekkor a centrális utat meghatározó (2) rendszer felírható a következőképpen:

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\geq 0, \\ A^T y + s - Qx &= c, & s &\geq 0, \\ \varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), & \forall i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3)$$

A [4] publikációhoz hasonlóan az alábbiakban a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ esettel foglalkozunk. Egy olyan algoritmust határozunk meg, amelynek minden lépésében az $\frac{x_i s_i}{\mu} > \frac{1}{4}$ feltétel fennáll, ezért a φ függvényt is a $t > \frac{1}{4}$ értékekre vizsgáljuk. Bevezetjük a $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$ vektort, amelyre a $v > \frac{e}{2}$ összefüggés kell teljesüljön.

A cikk további részében feltételezzük, hogy adott (x, y, s) úgy, hogy $Ax = b$ és $A^T y + s - Qx = c$. Továbbá $x > 0$ és $s > 0$, vagyis x és (y, s) szigorúan megengedett. A (3) nemlineáris rendszerre alkalmazva a Newton módszert az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} A\Delta x &= 0, \\ A^T \Delta y + \Delta s - Q\Delta x &= 0, \\ \left(s - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu s}{x}}\right)\Delta x + \left(x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu x}{s}}\right)\Delta s &= \sqrt{\mu xs} - xs. \end{aligned} \quad (4)$$

Egy tetszőleges ξ vektor esetén legyen $\text{diag}(\xi)$ az a diagonálmátrix, melynek főátlóján a vektor elemei találhatóak a megadott sorrendben. Bevezetjük a $d_x = \frac{v\Delta x}{x}$ és $d_s = \frac{v\Delta s}{s}$ jelöléseket, illetve legyen $p_v = \frac{2(v-v^2)}{2v-e}$ és $\hat{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag}\left(\frac{x}{v}\right)$. Mivel $\mu v(d_x + d_s) = s\Delta x + x\Delta s$ a (4) lineáris rendszer a következő skálázott alakban írható fel:

$$\begin{aligned} \hat{A}d_x &= 0, \\ \hat{A}^T \Delta y + d_s - Qd_x &= 0, \\ d_x + d_s &= p_v. \end{aligned} \quad (5)$$

A centrális úttól való távolság becslését a $\delta(xs, \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \left\| \frac{v-v^2}{2v-e} \right\|$ mértékkel valósítjuk meg, ahol

$\|\cdot\|$ az euklideszi norma. A fentiek alapján az algoritmust a következő módon adhatjuk meg:

Konvex kvadratikus optimalizálási algoritmus Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter, és $0 < \tau < 1$ a centralitási paraméter. Feltételezzük, hogy (x^0, y^0, s^0) teljesíti a belső pont feltételt, $\mu^0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$ és $v^0 = \sqrt{\frac{x^0 s^0}{\mu^0}} > \frac{e}{2}$. Továbbá feltételezzük, hogy $\delta(x^0 s^0, \mu^0) < \tau$.

begin

$x = x^0; y = y^0; s = s^0; \mu = \mu^0;$

while $x^T s > \varepsilon$ **do begin**

$\mu = (1 - \theta)\mu;$

meghatározzuk a $(\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ lépést a (4) összefüggés alapján

$x = x + \Delta x;$

$y = y + \Delta y;$

$s = s + \Delta s;$

end

end.

4. Következtetések

A [4] cikkben bevezetett algoritmust általánosítottuk konvex kvadratikus optimalizálási feladatokra. Az új módszer lényege az, hogy a centrális útnak megfelelő nemlineáris egyenletekre a $\varphi(t) = t - \sqrt{t}$ függvényt alkalmazzuk, majd egy Newton lépéssel határozzuk meg elmozdulásvektorokat.

Irodalom

- [1] Achache M.: A new primal-dual path-following method for convex quadratic programming, *Computational & Applied Mathematics*, 2006, 25:97-110.
- [2] Boyd S., Vandenberghe L.: *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] Darvay, Zs.: New interior point algorithms in linear programming, *Advanced Modeling and Optimization*, 2003, 5(1):51-92.
- [4] Darvay Zs., Felméri Á., Forró N., Papp I., Takács P.: Egy új belsőpontos algoritmus lineáris optimalizálási feladatok megoldására. In Bitay Enikő (szerk.) *Fiatal műszakiak tudományos ülészek XVII.*, EME Kiadó, Kolozsvár, 2012, 87-90.
- [5] Karmarkar N.K.: A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 1984, 4:373-395.
- [6] Kim S.-J., Koh K., Lustig M., Boyd S., Gorinevsky D.: An interior-point method for large-scale l_1 -regularized least squares, *IEEE Journal Of Selected Topics In Signal Processing*, 2007, 1(4):606-617.
- [7] Nesterov Y., Nemirovskii A.: *Interior-Point Polynomial Methods in Convex Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [8] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P.: *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [9] Sonnevend, Gy.: An "analytic center" for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa and J. Szelecsán and B. Strazicky (eds.), *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1986, 84:866-876.
- [10] Wright, S.J.: *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, 1997.

dr. Darvay Zsolt, egyetemi adjunktus,

Papp Ingrid-Magdolna egyetemi hallgató

Babeş -Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

E-mail: darvay@cs.ubbcluj.ro