FIATAL MŰSZAKIAK TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XVIII.

Kolozsvár, 2013. március 21–22.

EGY ÚJ NEM MEGENGEDETT BELSŐPONTOS ALGORITMUS A LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁSBAN

DARVAY Zsolt, MESTER Ágnes, PAPP Ingrid-Magdolna, TAKÁCS Petra-Renáta

Abstract

We introduce a new interior-point algorithm for linear optimization, which follows the central path, but it approaches the optimal solution through infeasible points. This method is similar to Roos's algorithm, which was conceived in 2005, but it is based on other search directions.

Key words: linear optimization, infeasible interior-point algorithm, full-Newton step

Mathematics Subject Classification (2010): 90C05, 90C51.

Összefoglalás

Egy olyan új lineáris optimalizálásra vonatkozó belsőpontos algoritmust vezetünk be, amely a centrális utat követi, de nem megengedett pontokon keresztül közelíti meg az optimális megoldást. Ez a módszer a Roos által 2005-ben meghatározott algoritmushoz hasonló, de más elmozdulásvektorokon alapszik.

Kulcsszavak: lineáris optimalizálás, nem megengedett belsőpontos algoritmus, teljes Newton lépés

1. Bevezetés

A lineáris vagy nemlineáris optimalizálási feladatok gyakran bonyolult gazdasági vagy műszaki jellegű problémákból származnak.

A Karmarkar [2] által 1984-ben publikált első belsőpontos algoritmus egy paradigmaváltást jelentett a lineáris optimalizálásban. Később a belső pontokon keresztül haladó útkövető algoritmusoknak számos változata jelent meg, amelyekről a [4, 6, 7] könyvekben olvashatunk. Az algoritmusoknak egy fontos körét olyan módszerek képezik, amelyek esetén az egyes lépések által generált vektorok nem megengedett megoldásai a feladatnak.

A Roos [3] által definiált belsőpontos algoritmus sajátossága az, hogy teljes Newton lépéseket használ, de nem megengedett pontokat érint. A továbbiakban az [1] publikációban ismertetett eljárást alkalmazzuk a Roos algoritmusára annak érdekében, hogy új elmozdulásvektorokkal egy új belsőpontos módszert határozzunk meg. Legyen x és s két n -dimenziós vektor. A cikkben használt jelölések a következők:

- xs a komponensenkénti szorzata az x és s vektoroknak, vagyis $xs = [x_1s_1, x_2s_2, \dots, x_ns_n]^T$;
- e az egyesekből álló n -dimenziós vektor, vagyis $e = [1, \dots, 1]^T$;

- $\frac{x}{s}$ az x vektor komponensenkénti osztása az s vektorral, vagyis $\frac{x}{s} = \left[\frac{x_1}{s_1}, \frac{x_2}{s_2}, \dots, \frac{x_n}{s_n} \right]^T$, ahol $s_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$;
- $\sqrt{xs}$ az xs elemeiből komponensenkénti gyökvonással kapott vektor, azaz $\sqrt{xs} = \left[\sqrt{x_1 s_1}, \sqrt{x_2 s_2}, \dots, \sqrt{x_n s_n} \right]^T$;
- $\text{diag}(x)$ az a diagonálmátrix, melynek főátlóján az x vektor elemei találhatóak, az eredeti sorrendben;
- $\|x\|$ az x vektor euklideszi normája (vagy l_2 normája).

2. A lineáris optimalizálási feladat

Tekintsük az alábbi primál-duál feladatpárt:

$$\begin{array}{ll} \min c^T x, & \max b^T y, \\ Ax = b, & A^T y + s = c, \quad (\text{D}) \\ x \geq 0, & s \geq 0, \end{array} \quad (\text{P})$$

ahol A egy m soros és n oszlopos mátrix, b és c pedig m - és n -dimenziós oszlopvektorok.

Feltételezzük, hogy $\text{rang}(A) = m$ és az alábbi belső pont feltétel fennáll mindkét feladat esetén.

1. Feltétel (belső pont feltétel). Létezik (x^0, y^0, s^0) úgy, hogy

$$\begin{array}{ll} Ax^0 = b, & x^0 > 0, \\ A^T y^0 + s^0 = c, & s^0 > 0. \end{array} \quad (\text{BPF})$$

Tudjuk, hogy az önduális beágyazás technikáját felhasználva mindig szerkeszthetünk egy lineáris optimalizálási feladatot úgy, hogy a belső pont feltétel fennálljon. Továbbá, az önduális beágyazásból adódóan $x^0 = s^0 = e$. Ennek alapján $\mu^0 = (x^0)^T s^0 / n = 1$. A belsőpontos algoritmusok általában a centrális utat követik, melyet az alábbi rendszerrel adhatunk meg:

$$\begin{array}{ll} Ax = b, & x \geq 0, \\ A^T y + s = c, & s \geq 0, \\ xs = \mu e, & \mu > 0. \end{array} \quad (1)$$

Ha a belső pont feltétel fennáll, akkor egy rögzített $\mu > 0$ esetén a (1) rendszernek egy egyértelmű megoldása van, melyet μ -centrumnak nevezünk (Sonnevend [5]).

3. A módosított feladatok

Mivel a kezdeti pontok nem megengedett megoldásai az eredeti feladatoknak, az alábbi módosított primál-duál feladatpárt tekintjük:

$$\min \{ (c - \kappa(c - A^T y^0 - s^0))^T x : Ax = b - \kappa(b - Ax^0), \quad x \geq 0 \} \quad (P_\kappa)$$

$$\max \{ (b - \kappa(b - Ax^0))^T y : A^T y + s = c - \kappa(c - A^T y^0 - s^0), \quad s \geq 0 \} \quad (D_\kappa)$$

A módosított feladatokra vonatkozó centrális út a következő rendszerrel jellemezhető:

$$\begin{aligned}
b - Ax &= \kappa(b - Ax^0), & x &\geq 0 \\
c - A^T y - s &= \kappa(c - A^T y^0 - s^0), & s &\geq 0 \\
xs &= \mu e.
\end{aligned} \tag{2}$$

Legyen φ egy folytonosan differenciálható és invertálható függvény, melynek segítségével a centrális utat meghatározó (2) rendszert a következőképpen alakítjuk át:

$$\begin{aligned}
b - Ax &= \kappa(b - Ax^0), & x &\geq 0, \\
c - A^T y - s &= \kappa(c - A^T y^0 - s^0), & s &\geq 0, \\
\varphi\left(\frac{x_i s_i}{\mu}\right) &= \varphi(1), & \forall i &= 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{3}$$

A cikk további részében a $\varphi(t) = \sqrt{t}$ esetet tárgyaljuk, és a Newton módszert alkalmazva a (3) rendszerre, elmozdulásvektorokat határozunk meg. Ha x és (y, s) szigorúan megengedett megoldása a (P_κ) , illetve (D_κ) feladatoknak, akkor a következő lineáris rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
A\Delta x &= 0, \\
A^T \Delta y + \Delta s &= 0, \\
s\Delta x + x\Delta s &= 2(\sqrt{\mu xs} - xs).
\end{aligned} \tag{4}$$

A fenti összefüggések alkalmazhatóak arra, hogy egy adott pontból a centrumhoz közelebb kerüljünk.

4. Egy új primál-duál algoritmus

A továbbiakban nem élünk azzal a feltételezéssel, hogy az x és (y, s) vektorok megengedett megoldásai a módosított feladatoknak. A Newton módszert alkalmazva a (3) rendszerre olyan $(\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s)$ lépést határozunk meg, amelyre a kapott vektorok a (P_κ) , illetve (D_κ) feladatoknak megengedett megoldásai lesznek. Így az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}
A\Delta^f x &= \theta \kappa r_b^0, \\
A^T \Delta^f y + \Delta^f s &= \theta \kappa r_c^0, \\
s\Delta^f x + x\Delta^f s &= 2(\sqrt{\mu xs} - xs).
\end{aligned} \tag{5}$$

Legyen $v = \sqrt{\frac{xs}{\mu}}$, valamint $d_x = \frac{v\Delta^f x}{x}$ és $d_s = \frac{v\Delta^f s}{s}$. Ezekből következik, hogy

$\mu v(d_x + d_s) = s\Delta^f x + x\Delta^f s$, és a (4) lineáris rendszer a következő skálázott alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
\hat{A}d_x &= \frac{\theta \kappa}{\mu} r_b^0, \\
\hat{A}^T \Delta^f y + d_s &= \theta \kappa \frac{r_c^0 v}{s}, \\
d_x + d_s &= p_v,
\end{aligned} \tag{6}$$

ahol $p_v = 2(e - v)$ és $\hat{A} = \frac{1}{\mu} A \text{diag}\left(\frac{x}{v}\right)$. Bevezetjük a $\delta(xs, \mu) = \frac{\|p_v\|}{2} = \|e - v\|$ jelölést, amelyet a centrális úttól való távolság mérésére használhatunk. Az algoritmus az alábbi módon adható meg.

1. Algoritmus Legyen $\varepsilon > 0$ a pontossági paraméter, $0 < \theta < 1$ a redukciós paraméter, és $\tau > 0$ a centralitási paraméter. Feltételezzük, hogy $x^0 > 0$, $s^0 > 0$ és $x^0 s^0 = \mu^0 e$.

```

begin
   $x := x^0$ ;  $y := y^0$ ;  $s := s^0$ ;  $\mu := \mu^0$ ;  $\kappa := 1$ ;
  while  $\max(x^T s, \|b - Ax\|, \|c - A^T y - s\|) \geq \varepsilon$  do
    begin
       $(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta^f x, \Delta^f y, \Delta^f s)$ ;
       $\mu := (1 - \theta)\mu$ ;
       $\kappa := (1 - \theta)\kappa$ ;
      while  $\delta(x, s; \mu) \geq \tau$  do:
         $(x, y, s) := (x, y, s) + (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ ;
      end
    end
  end.

```

5. Következtetések

Egy új algoritmust vezettünk be, amely a primál-duál feladat nem megengedett megoldásain keresztül közelíti meg az optimumot. A $\varphi(t) = \sqrt{t}$ függvényt a centrális út nemlineáris egyenleteire alkalmazva határoztuk meg az elmozdulásvektorokat.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetüket fejezik ki az Erdélyi Múzeum-Egyesületnek a kutatási munkához nyújtott támogatásért (EME-828.1.4/2012/P.2.).

Irodalom

- [1] Darvay, Zs. New Interior Point Algorithms in Linear Programming, *Advanced Modeling and Optimization*, 2003, 5(1):51-92.
- [2] Karmarkar, N.K. A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica*, 1984, 4:373-395.
- [3] Roos, C. A full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point algorithm for linear optimization, *SIAM J. Optimization*, 16(4): 1110–1136, 2006.
- [4] Roos, C., Terlaky, T., Vial, J.-P. *Interior Point Methods for Linear Optimization*, Springer, 2006.
- [5] Sonnevend, Gy. An “analytic center” for polyhedrons and new classes of global algorithms for linear (smooth, convex) programming. In A. Prékopa and J. Szelecsán and B. Strazicky (eds.), *System Modeling and Optimization: Proceedings of the 12th IFIP-Conference held in Budapest, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer Verlag, Berlin, 1986, 84:866-876.
- [6] Wright, S.J. *Primal-Dual Interior-Point Methods*, SIAM, 1997.
- [7] Ye, Y. *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*, John Wiley & Sons, 1997.

dr. Darvay Zsolt, egyetemi adjunktus,

Mester Ágnes, Papp Ingrid-Magdolna, Takács Petra-Renáta egyetemi hallgatók

Babe-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár, E-mail: darvay@cs.ubbcluj.ro